УДК 530

Сборник задач по квантовой механике. Учебное пособие для студентов физического факультета, НГУ, 1974, 1-116.

В этом выпуске собраны задачи, которые рассматривались на семинарах и предлагались (как задания) для самостоятельного решения студентам физического факультета НГУ в 1963-1973 гг. Чтобы сохранить эти задачи для самостоятельной работы и в дальнейшем, мы отказались от традиции приводить в сборнике развернутые решения и ограничились лишь списком ответов и некоторыми указаниями. Чтобы сделать сборник более цельным и удобным для использования на семинарах, в него включены также некоторые задачи из уже ставших классическими (и редкими) задачников Когана и Галицкого, Гольдмана и Кривченкова. Тем не менее, мы надеемся, что часть задач носит оригинальный характер, хотя и здесь говорить об авторстве трудно.

Сборник подготовили Альтшуль Л.М., Зелевинский В.Г., Коткин Г.Л., Сербо В.Г., Хейфец С.А., Хриплович И.Б., Черняк В.Л.

Предполагалось, что читатель знаком с квантовой механикой по книгам Ландау и Лифшица, Давыдова или "Конспекта лекций по квантовой механике" (изд. НГУ, 1970) В.Г.Зелевинского.

Обозначения

e – заряд электрона, $e = 4{,}8\cdot 10^{-10}$ ед. $CGSE$

$\hbar$ – постоянная Планка, $\hbar = 1{,}05\cdot 10^{-27}$ эрг.сек

c – скорость света, $c = 3\cdot 10^{10}$ см/сек

$\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ – постоянная тонкой структуры

$\lambda_c = \hbar/mc = 3{,}8\cdot 10^{-11}$ см – комптоновская длина волны электрона

$\mu_Б$ – магнетон Бора; $\mu_Б = \frac{|e|\hbar}{2mc} = 0{,}57\cdot 10^{-8}\ \frac{эв}{гаусс}$

$\mu_я$ – ядерный магнетон, $\mu_я = \frac{m}{M_p}\mu_Б$

$a_Б = \hbar^2/me^2$ – Боровский радиус, $a_Б = 0{,}5\cdot 10^{-8}$ см

масса частиц m, M_p (электрона m, протона M_p)

$U(\vec r)$; $U(x)$ потенциал, $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, \vec A$ – электромагнитные поля

$\hat H$, E оператор энергии (гамильтониан) и энергия

Γ; γ – ширина уровня

$\hat L$; l; j – оператор момента или его собственное значение

$\hat{\vec S}$; s – оператор спина или его собственное значение

$\vec\sigma$ – матрицы Паули

$\vec p$ – импульс (оператор или собственное значение)

J^P – момент и четность состояния (частицы)

r, θ, φ – сферические координаты

$\vec n$ – единичный вектор

$Y_{lm}(\vec n)$ – сферические функции

$C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2} = \langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle$ – коэффициенты Клебша-Гордана

δ_{ik} – символ Кронекера

ε_{ikl} – единичный антисимметричный тензор $i,k,l = 1,2,3$

$\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ – то же в четырехмерном случае ($\mu,\nu,\sigma,\rho = 0,1,2,3$)

$\varkappa = m g/\hbar^2$ – константа (используется в § 3)

p_0; ε_0 – импульс и энергия Ферми (в § 9)

в § 4 момент измеряется в единицах $\hbar$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

		Задачи	Ответы
Альтшуль	§ I. Основные принципы квантовой механики	5	60
Хейфец	§ 2. Операторы, теория представлений	8	62
Котыши	§ 3. Уравнение Шредингера (одномерный случай)	II	65
Зелевинский	§ 4. Угловой момент и спин	I9	69
Альтшуль	§ 5. Уравнение Шредингера (трехмерный случай)	24	8I
Сербо	§ 6. Приближенные методы (теория возмущений, квазиклассическое приближение, вариационный метод)	26	83
Черняк	§ 7. Атом, молекула	3I	87
Черняк	§ 8. Излучение	35	9I
Зелевин.	§ 9. Системы многих тел	40	99
Хейфец	§ I0. Рассеяние	44	I05
Хриплов.	§ II. Уравнение Дирака	52	II2
Хриплов.	§ I2. Изотопический спин, различные правила отбора, простейшие оценки в квантовой электродинамике	55	II4
	Литература	II5	

§ I. Основные принципы квантовой механики

I. Найти красную границу фотоэффекта для калия, если работа выхода электронов $A = 2{,}15$ эв.

2. Оценить относительную величину $\Delta\omega/\omega$ красного смещения излучения, приходящего на Землю с а) поверхности Солнца; б) поверхности нейтронной звезды, имеющей массу такого же порядка, как Солнце, и радиус $R \sim 10$ км.

3. В опытах Паунда и Ребке по исследованию смещения частоты излучения в гравитационном поле Земли источник располагался на расстоянии 22 м от приемника по вертикали. Оценить величину смещения γ - линии Fe^{57} (I4,4 кэв) в этих условиях.

4. Используя принцип соответствия, оценить время жизни возбужденного атома водорода в нижних состояниях, из которых возможны дипольные переходы.

5. Как изменяется энергия медленных ($\varepsilon < 0{,}01$ эв) нейтронов при их рассеянии в жидком гелии в зависимости от угла рассеяния ?

6. Быстрые электроны при движении в среде могут излучать электромагнитные волны (эффект Вавилова-Черенкова). Найти зависимость частоты излучения от угла, если начальная скорость электронов имеет определенное значение.
Указание. Воспользоваться законами сохранения энергии и импульса.

7. Считая, что частота излучаемых системой квантов совпадает с частотой её периодического движения по классической траектории, и учитывая соотношение $\varepsilon = \hbar\omega$, связывающее энергию и частоту квантов, показать, что адиабатический инвариант $J = \oint p\,dq$ должен отличаться на различных орбитах на величину, кратную $2\pi\hbar$.

8. С помощью правил квантования Бора - Зоммерфельда найти энергетический спектр:

а) одномерного осциллятора;

б) частицы в сферически симметричной потенциальной яме;

в) атома водорода.

9. Оценить число связанных состояний в потенциале Юкавы
$U = -\frac{g^2}{r}\exp(-r/a)$.

I0. В одном из опытов Дэвиссона и Джемера по отражению электронов от монокристалла никеля максимум 4-го порядка наблюдался в направлении, составляющем угол $\alpha = 55^0$ с нормалью к поверхности образца, при нормальном падении электронов с энергией I80 эв. Вычислить соответствующее межплоскостное расстояние. Под каким углом к поверхности ориентированы плоскости? Насколько монохроматичным должен быть пучок, чтобы этот максимум можно было разрешить ?

II. "Траектории" электронов с энергией I кэв очерчиваются в камере Вильсона цепочкой малых капель тумана с диаметром порядка I мк. Не противоречит ли это утверждению об отсутствии траекторий у квантовой микрочастицы ?

I2. При коллимации пучка монохроматических частиц с импульсом p возникает неопределенность поперечной составляющей импульса $\Delta p_\perp$. Как эта неопределенность зависит от ширины щели ? Рассмотреть предельные случаи очень широкой и очень узкой щели.

I3. Лазерный луч с поперечным сечением $S \sim$ I $см^2$ направлен в сторону ближайшей звезды α -Центавра, находящейся на расстоянии $\ell \sim 4$ световых года. Предполагая, что луч имеет минимальное расхождение, оценить вероятность, с которой фотоны попадают на звезду, если её диаметр $d \sim 10^6$ км.

I4. Иглу массой I г и длиной $\ell \sim$ I см, имеющую острие толщиной $d \sim$ I мк, установили вертикально острием на плоское основание и отпустили. Оценить, в течение какого максимального времени игла может удерживаться в вертикальном положении.

I5. Может ли электрон стационарно находиться внутри ядра ?

I6. Оценить относительную ширину $\Delta\omega/\omega$ линии L_α лаймановской серии в атоме водорода.

I7. Объяснить, почему некоторые спектральные линии, излучаемые нагретым газом, исчезают по мере увеличения плотности газа. Оценить, при какой плотности водорода в его эмиссионном спектре исчезнут линии, обусловленные квадрупольными и магнитодипольными переходами, если температура $T \sim 1000^0$.

I8. Подобно тому, как кванты электромагнитного поля - фотоны, ответственны за электромагнитные взаимодействия, кванты поля ядерных сил - π -мезоны, обуславливают ядерные взаимодействия. Радиус действия ядерных сил $r \sim 10^{-13}$ см. Оценить массу π -мезона.

?

I9. Доказать, что в одномерной потенциальной яме произвольной глубины всегда существует хоть одно связанное состояние, в

то время, как в трехмерном случае - лишь при достаточной глубине ямы.

20. Объяснить, почему пучок нейтронов в неоднородном магнитном поле расщепляется на два пучка с различными проекциями магнитного момента, а пучок протонов не расщепляется. Как в этом отношении ведут себя ионы ?

2I. Найти средний импульс и неопределенности координат и импульсов у частицы в состояниях с волновыми функциями:

а) $\psi = C \exp(ik_0x - x^2/a^2)$;

б) $\psi = C/(x^2+a^2)$;

в) $\psi = \begin{cases} C & , \text{ при } |x| < a/2 , \\ 0 & , \text{ при } |x| > a/2 . \end{cases}$

22. Оценить с помощью соотношения неопределенности энергию основного состояния для:

а) частицы в одномерном потенциале $U = \alpha x^4$;

б) осциллятора;

в) атома водорода.

23. Определить уровни энергии и нормированные волновые функции частицы, находящейся в одномерной потенциальной яме с бесконечными стенками. Объяснить, каким образом происходит переход к описанию движения частицы по траектории в классическом пределе (построить пример соответствующего состояния).

24. Для частицы, находящейся в стационарном состоянии в одномерной глубокой прямоугольной потенциальной яме, найти:

а) распределение вероятности по импульсам;

б) средние значения координаты и импульса;

в) неопределенности координат и импульсов.

25. Частица находится в стационарном состоянии в бесконечно глубокой прямоугольной одномерной потенциальной яме. Найти силу, с которой она действует на стенки ямы.

26. Найти изменения со временем волнового пакета, описывающего свободную нерелятивистскую частицу и имеющего в начальный момент вид :

а) $C \exp(ik_0x - x^2/a^2)$;

б) $\begin{cases} C & , |x| < a/2 , \\ 0 & , |x| > a/2 . \end{cases}$

Найти изменение неопределенности координат.

27. Найти закон преобразования волновой функции при преобразованиях Галилея.

28. Определим потенциал $U_a(x)$ соотношением:

$$U_a(x) = \begin{cases} U(x), & |x| < a, \\ \infty, & |x| > a. \end{cases}$$

Показать, что энергия основного состояния частицы в поле U_{a_1} не больше, чем в поле U_{a_2}, если $a_1 > a_2$.

29. Доказать, что из двух стационарных состояний, отвечающих одномерному движению частицы в потенциальном поле, большей энергией обладает то, волновая функция которого имеет больше нулей (осцилляционная теорема).

§ 2. Операторы, теория представлений

1. Указать, каким из операторов: энергии H, момента $\vec{l}$, импульса $\vec{p}$, четности P_z, будут соответствовать интегралы движения в следующих полях:

а) свободное движение;

б) поле однородного шара;

в) поле бесконечного однородного цилиндра;

г) поле бесконечной однородной плоскости;

д) однородное переменное поле.

2. Коммутирует ли гамильтониан, описывающий движение частицы в бесконечно глубокой прямоугольной яме с оператором импульса ? Будет ли собственная функция гамильтониана собственной функцией оператора импульса ?

3. Доказать, что свойство эрмитовости операторов и их коммутационные соотношения не зависят от представления.

4. Является ли оператор $-i\,\partial/\partial\tau$ эрмитовым на классе непрерывных, квадратично интегрируемых с весом единица функций на интервале $\ldots < \tau < \infty$?

5. а) операторы l_x; l_y не коммутируют. Однако в состоянии с моментом $l=0$ $\langle(\Delta l_x)^2\rangle = \langle(\Delta l_y)^2\rangle = 0$. Есть ли здесь противоречие ?

б) коммутатор $[l_z, \varphi] = -i\hbar$. В то же время в состоянии с определенной проекцией момента l_z неопределенность $\Delta\varphi \leq 2\pi$. Есть ли здесь противоречие с соотношением неопределенностей ?

6. Операторы A, B, C попарно коммутируют $[A,B] = [B,C] = 0$. Будут ли коммутировать операторы A, C ?

7. Коммутатор двух эрмитовых операторов равен $AB - BA = C$. Как связаны их среднеквадратичные средние значения ? (что их?)

8. Доказать тождества:

а) $$e^{i\theta\vec{\sigma}\vec{n}} = \cos\theta + i\vec{\sigma}\vec{n}\sin\theta,$$

$|\vec{n}| = 1$, $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули;

б) $$e^{A} B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A[A,B]] + \ldots;$$

в) $$e^{A} e^{B} = e^{A+B+C}, \text{ где } C = \frac{1}{2}[A,B],$$

если $[A,C] = [B,C] = 0$.

9. Доказать тождество

$$\vec{p}\, e^{i\varphi\vec{n}\vec{l}}\, \vec{p}\, e^{-i\varphi\vec{n}\vec{l}} = (\vec{p}\vec{n})^2 + (\vec{p}\times\vec{n})^2 \cos\varphi,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, $\vec{l}$ – оператор момента. Каков геометрический смысл этого тождества ?

10. Представить следующие операторы в виде ряда по $\hat{B}$

а) $(\hat{A}+\hat{B})^{-1}$; б) $\exp\{-\lambda(\hat{A}+\hat{B})\}$.

11. а) Доказать дипольное правило сумм

$$S_1 \equiv \frac{2m}{\hbar^2}\sum_n |\langle n|x|0\rangle|^2 (E_n - E_0) = 1, \text{ где } H|n\rangle = E_n|n\rangle;$$

б) вычислить сумму

$$S_2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2}\sum_n |\langle n|x|0\rangle|^2 (E_n - E_0)^2.$$

Для потенциала $U = \alpha\, r^{-n}$ выразить ответ через энергию состояния E_0.

12. В координатном представлении найти оператор p^{-1}, обратный оператору импульса p (в одномерном случае).

13. Частица движется в периодическом поле $U(x+a) = U(x)$. Коммутирует ли оператор сдвига T_a на период поля $T_a\psi(x) = \psi(x+a)$ с гамильтонианом ? Определить возможные собственные значения оператора сдвига T_a.

14. Построить квантовый аналог вектора Рунге-Ленца

$\vec{A} = -\sqrt{m}\,(\vec{v}\times\vec{l} - \alpha\,\vec{r}/r)$, сохраняющегося в классической механике при движении в кулоновском поле $U = -\alpha/r$ (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика[2],стр.53). Получить коммутационные соотношения компонент этого оператора между собой и с оператором момента $\vec{l}$. Доказать $\vec{l}\vec{A}=0$.

I5. В центрально-симметричном поле построить оператор, соответствующий радиальной компоненте импульса. Проверить его эрмитовость.

I6. Построить явное выражение для операторов

а) пространственной четности; б) обмена координат двух частиц $\vec{r}_{1,2}\leftrightarrow\vec{r}_{2,1}$; $\vec{P}_{1,2}\leftrightarrow\vec{P}_{2,1}$ через операторы координаты и импульса.

Указание: сначала доказать для операторов

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{2}}(r_k+ip_k);\quad a_k^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(r_k-ip_k),\qquad k=1,2,3$$

утверждение: если некоторое унитарное преобразование $\hat{O}$ преобразует $a_k\to a_k'=\hat{O}a_k\hat{O}^+=R_{k\ell}a_\ell$, то

$$\hat{O}=\exp\{-i\,S_{\mu\nu}\,a_\mu^+a_\nu\}\quad\text{и}\quad S_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}.$$

I7. Гамильтониан частицы в электромагнитном поле имеет вид

$$H=\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+e\varphi(\vec{r}),\quad \vec{p}=-i\hbar\vec{\nabla}.$$ Найти

а) выражение для оператора скорости $\vec{v}_i$;

б) коммутационные соотношения для компонент скорости $\vec{v}_i$;

в) уравнение для $m\dot{\vec{v}}$ (операторный аналог уравнения Ньютона);

г) показать, что в однородном магнитном поле $\mathcal{H}$ операторы

$$x_0=x+\frac{1}{\omega}v_y;\quad y_0=y-\frac{1}{\omega}v_x;\quad \omega=e\mathcal{H}/mc$$

соответствуют сохраняющимся величинам.

I8. Гамильтониан заряженной частицы с учетом взаимодействия ее магнитного момента с внешним электрическим полем (релятивистский эффект) имеет вид

$$H=\frac{p^2}{2m}+\varphi(\vec{r})+V_0\vec{l}\vec{s},\quad \vec{l}=\vec{r}\times\vec{p};\quad \vec{s}$$ — оператор спина. Пусть $V_0=Const$. Найти то же, что в задаче I7 п. а,б,в.

I9. Найти $\hat{X}(t)$ и зависимость дисперсии $\langle(\Delta x)^2\rangle$ от времени в гейзенберговском представлении. В начальный момент форма пакета $f(x,0)=(\pi a^2)^{-1/4}\exp\{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}+ik_0x\}$. Рассмотреть:

а) свободное движение,

б) движение в поле $U(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$.

20. Описать движение частицы в однородном магнитном поле в гайзенберговском представлении.

2I. Найти собственные функции оператора $|\vec{r}|$ в x,p представлениях.

22. Вычислить $\langle(\Delta x)^2\rangle$; $\langle(\Delta p)^2\rangle$ для n-го состояния гармонического одномерного осциллятора.

23. а) Построить из собственных функций одномерного осциллятора $|n\rangle=(\hat{a}^+)^n|0\rangle$ собственные функции оператора

$$a=\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega\hat{x}+i\hat{p}),$$

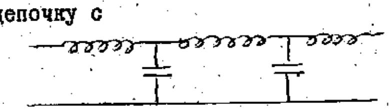
(так называемые когерентные состояния);

б) найти среднее значение гайзенберговского оператора координаты $\hat{X}(t)$ по этим состояниям;

в) доказать полноту полученной системы функций (хотя функции неортогональны);

г) показать, что вероятности найти систему, находящуюся в когерентном состоянии, в состояниях с определенной энергией распределены по закону Пуассона.

24. Проквантовать L,C -цепочку с



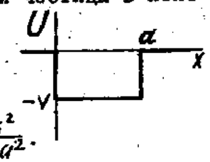
распределенными параметрами.

25. Получить одновременные коммутационные соотношения между квантованными операторами компонент электрической и магнитной напряженностей свободного электромагнитного поля.

§ 3. Уравнение Шредингера (одномерный случай)

I. Найти уровни энергии связанных состояний частицы в поле

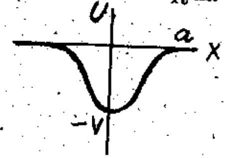
$$U(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0 \text{ или } x>a,\\ -V & \text{при } 0<x<a.\end{cases}$$



Рассмотреть, в частности, случай $V\ll\frac{\hbar^2}{ma^2}$.

При какой глубине ямы в ней есть n связанных состояний ?

2. Определить правило "сшивания" производной волновой функции на краях узкой потенциальной ямы $U(x)$

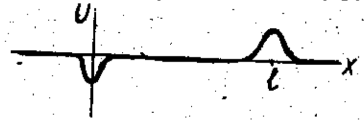


$\left(V \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \right.$, a - характерная ширина ямы, V - её глубина) при энергии $E \ll V$. Показать, что для получения тех же условий "сшивания" можно заменить $U(x)$ на $G\delta(x)$, где $G \sim Va$. (Во всех задачах этого параграфа, где встречается $G\delta(x)$, подразумевается, что речь идет об узкой потенциальной яме).

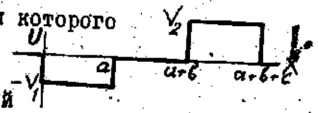
3. Найти уровень энергии и волновую функцию связанного состояния в поле $U = -G\delta(x)$.

4. Определить распределение вероятностей различных значений импульса для связанного состояния частицы в поле $U = -G\delta(x)$.

5. При каком значении ℓ в поле $U = -G_1\delta(x) + G_2\delta(x-\ell)$ нет связанных состояний ?

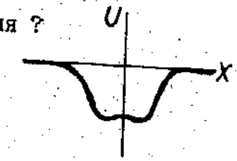


6. Частица движется в поле, потенциал которого $U(x)$ изображен на рисунке. При каком значении b количество связанных состояний в поле U уменьшается на одно по сравнению с тем, которое было при $b \to \infty$?



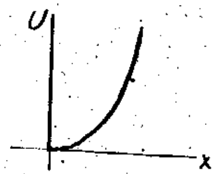
Могут ли быть "вытеснены" из ямы два уровня ?

7. Какова четность основного состояния в симметричной потенциальной яме $U(-x) = U(x)$?



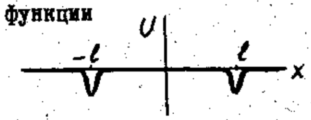
8. Найти уровни энергии в поле

$$U = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{при} \quad x > 0, \\ \infty & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$



9. Найти уровень энергии и волновые функции частицы в поле

$$U = -G\delta(x+\ell) - G\delta(x-\ell)$$



при

$$\ell \gg \frac{\hbar^2}{mG}$$

Найти силы, действующие на каждую из ям.

I0. Определить $\psi(x,t)$ (зад.9), если при $t < 0$ между ямами была непроницаемая перегородка и частица находилась в стационарном связанном состоянии вблизи левой ямы.

Найти силу, действующую на левую яму, в зависимости от времени.

II. Определить распределение вероятностей различных значений импульса для связанных стационарных состояний в зад. 9.

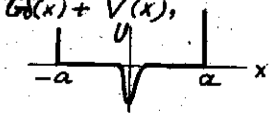
I2. Найти уровни энергии и волновые функции частицы в поле

$$U = G\delta(x) + V(x),$$

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad |x| > a, \\ 0 & \text{при} \quad |x| < a. \end{cases}$$

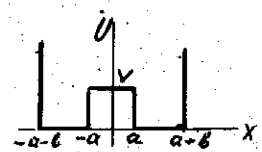
I3. При какой ширине $2a$ потенциального ящика исчезает отрицательный уровень энергии в поле $U = -G\delta(x) + V(x)$,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad |x| > a, \\ 0 & \text{при} \quad |x| < a. \end{cases}$$



I4. Найти уровни энергии и волновые функции частицы в поле

$$U = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad |x| > a+b, \\ 0 & \text{при} \quad a < |x| < a+b, \\ V & \text{при} \quad |x| < a. \end{cases}$$



Ограничиться низшими уровнями.

I5. Определить вид оператора $\hat{U} = -G\delta(x)$ в импульсном представлении.

Найти уровни энергии и волновые функции связанного состояния в поле $U = -G\delta(x)$, решая задачу в импульсном представлении.

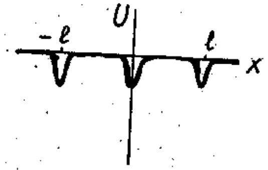
I6. Найти уровень энергии в поле

$$U = -G\delta(x) - G\delta(x-\ell),$$

решая задачу в импульсном представлении.

I7. Найти уровни энергии и волновые функции частицы в поле $U=-G_1\delta(x)-G_2\delta(x-\ell)$. При каких значениях $G_1 - G_2$ частица в стационарном состоянии находится преимущественно вблизи одной из ям ?

I8. Нарисовать качественно $\psi(x)$ для связанных состояний в поле трех мелких одинаковых ям (см. рис.). Ширина ям порядка a,



$$V \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \ll V\frac{\ell}{a}.$$

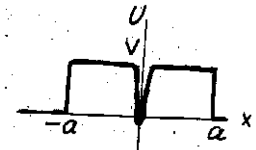
Найти энергию первого возбужденного состояния.

Как изменится ответ, если средняя яма примерно вдвое мельче крайних ?

I9. При какой ширине барьера a в поле

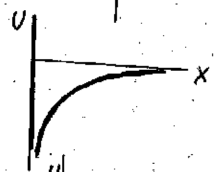
$$U=-G\delta(x)+V(x),\quad V(x)=\begin{cases} V & \text{при } |x|<a,\\ 0 & \text{при } |x|>a\end{cases}$$

нет связанного уровня ?



20. Найти уровни энергии для частицы в поле

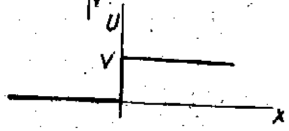
$$U=\begin{cases}\infty & \text{при } x<0,\\ -\dfrac{\alpha}{x} & \text{при } x>0,\end{cases}$$



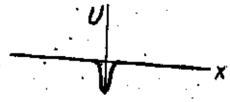
решая задачу в импульсном представлении.

2I. Определить коэффициент отражения частицы от прямоугольной стенки

$$U(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ V & \text{при } x>0.\end{cases}$$

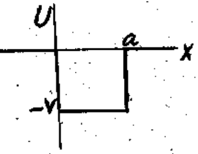


22. Найти коэффициент отражения частицы в поле $U=-G\delta(x)$.



Как найти уровни дискретного спектра, продолжая амплитуду отраженной волны в комплексной плоскости E в область отрицательных энергий?

23. Найти коэффициент отражения частицы от прямоугольной потенциальной ямы.

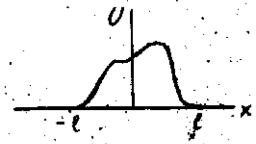


При каких энергиях яма полностью прозрачна?

24. Показать, что решения уравнения Шредингера в поле U (таком, что $U=0$ при $|x|>\ell$) могут быть выбраны в виде

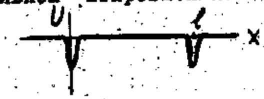
$$\psi_+(x)=A\begin{cases}\cos(\kappa x+\delta_+) & \text{при } x>\ell,\\ \cos(\kappa x-\delta_+) & \text{при } x<\ell,\end{cases}$$

$$\psi_-(x)=B\begin{cases}\sin(\kappa x+\delta_-) & \text{при } x>\ell,\\ \sin(\kappa x-\delta_-) & \text{при } x<\ell.\end{cases}$$



Выразить коэффициент отражения через $\delta_\pm$.

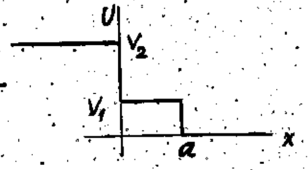
Являются ли волновые функции, описывающие отражение частиц, падающих на барьер в положительном и отрицательном направлениях оси x , взаимно ортогональными ?



25. Найти коэффициент прохождения частицы в поле $U=-G\delta(x)-G\delta(x-\ell)$.

Оценить $|\psi(x)|$ в области $0<x<\ell$ в условиях, когда коэффициент прохождения мал и когда он близок к единице.

26. При каких условиях коэффициент отражения частиц от пары ступенек обращается в нуль (просветленная оптика)?



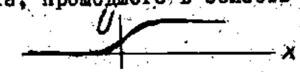
27. Частица, волновая функция которой в начальный момент представляет собой волновой пакет $\psi(x,0)=\int a(k)e^{ikx}dk$, падает на потенциальный барьер $U=G\delta(x-\ell)$.

Выразить $\psi(x,t)$ через $a(k)$ при $t<\frac{\ell}{v}$ и $t>\frac{\ell}{v}$.

Каким образом выражается время задержки волнового пакета при прохождении барьера через амплитуду прохождения ?

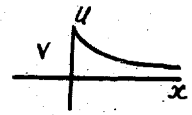
28. Найти время задержки волнового пакета при прохождении прямоугольной ямы (зад. 23).

29. Волновой пакет падает на ступеньку потенциала. Какой оказывается ширина волнового пакета, прошедшего в область $x>0$?



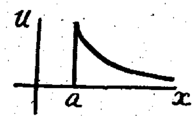
30. Определить коэффициент отражения от потенциального барьера

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ V e^{-\frac{x}{a}} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$



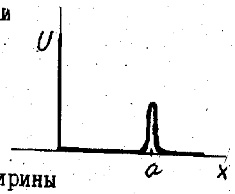
31. Найти коэффициент отражения частиц от потенциала

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{\alpha^2}{x^2} & \text{при } x > a > 0. \end{cases}$$



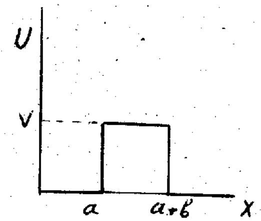
32. Найти квазистационарные уровни энергии и их ширины для частицы в поле

$$U = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ G\delta(x-a) & \text{при } x > 0. \end{cases}$$



33. Найти квазистационарные уровни и их ширины в поле

$$U = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < a, \\ 0 & \text{при } a + b < x, \\ V & \text{при } a < x < a + b. \end{cases}$$



Рассмотреть случай малой прозрачности барьера.

34. Определить квазистационарные уровни и их ширины в поле $U = - G\delta(x) - G\delta(x - \ell)$,

рассматривая амплитуду прохождения частицы (см.зад. 25; зад. 22) в области комплексных значений E.

35. Определить время задержки волнового пакета при прохождении пары потенциальных ям (зад. 25) при энергии, лежащей вблизи квазистационарного уровня, принимая, что зависимость амплитуды прохождения от энергии определяется, главным образом, полюсом

$$\left(E - E_n + \frac{i}{2}\Gamma_n\right)^{-1}.$$

36. Определить квазистационарные состояния в поле

$$U = - G_1 \delta(x) + G_2 \delta(x - \ell).$$

Каково отношение вероятностей вылета частицы в положительном и отрицательном направлениях оси x ?

37. Найти волновые функции стационарных состояний частицы в поле (зад. 32).

Определить распределение вероятностей различных значений энергии в состоянии $\psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$.

Найти $\psi(x,t)$, ограничиваясь приближением, в котором зависимость волновой функции от энергии при $0 < x < a$ определяется полюсом $\left(E - E_0 + \frac{i}{2}\Gamma\right)^{-1}$.

38. Определить волновые функции частицы в однородном поле

$$U = - Fx,$$

используя импульсное представление. Почему при этом дифференциальное уравнение второго порядка (имеющее два линейных независимых решения) заменяется на дифференциальное уравнение первого порядка (имеющее только одно решение)?

39. При $t < 0$ частица находится в основном состоянии в поле $U(x,t) = - G_1 \delta(x)$. В момент $t = 0$ поле скачком изменяется, так что при $t > 0$

$$U(x,t) = - G_2 \delta(x).$$

Найти вероятность того, что частица останется вблизи потенциальной ямы при $t \to \infty$.

40. Определить распределение вероятностей различных значений энергии для частицы, покинувшей потенциальную яму (зад. 39).

41. Волновой пакет, имеющий в начальный момент вид

$$\psi(x,0) = A e^{-\frac{(x-\ell)^2}{2s^2} + i\frac{p_0 x}{\hbar}},$$

движется в поле $U(x) = - G\delta(x)$.

Определить вероятность того, что при $t \to \infty$ частица окажется вблизи потенциальной ямы $\frac{mG\ell}{\hbar^2} \gg 1$.

лучше бы взять $\psi(x,0) = A e^{-\frac{(x+\ell)^2}{2s^2} + i\frac{p_0 x}{\hbar}}$

и условия $s \ll \ell$ и $\varkappa_0 s \ll \ell/s$, где $\varkappa_0 = \frac{mG}{\hbar^2}$

42. Потенциальная яма движется с постоянной скоростью V:

$$U(x,t) = U(x - Vt).$$

Доказать, что $\psi(x,t) = \psi_n(x - Vt)\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar} + i\frac{mVx}{\hbar} - \frac{mV^2 t}{2\hbar}}$,

где $\psi_n(x)$ – волновая функция стационарного состояния для неподвижной потенциальной ямы $U(x)$, удовлетворяет уравнению Шредингера.

43. Потенциальная яма, двигавшаяся с постоянной скоростью V, мгновенно останавливается:

$$U(x,t) = \begin{cases} -G\delta(x - Vt) & \text{при} \quad t<0, \\ -G\delta(x) & \text{при} \quad t>0. \end{cases}$$

Какова вероятность того, что частица, находившаяся в основном состоянии (в системе координат, двигавшейся с ямой), останется в основном состоянии вблизи неподвижной потенциальной ямы.

44. Определить распределения вероятностей различных значений энергии для частицы, улетевшей в положительном и отрицательном направлениях оси x после остановки потенциальной ямы (зад. 43). Подробно исследовать распределения в случае $\hbar$.

45. Определить зоны разрешенной энергии

для частицы, движущейся в периодическом потенциальном поле. Исследовать случай $bV = const$, $V\to\infty$, $b\to 0$.

46. Найти волновые функции стационарных состояний в поле

$$U = -G\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x - na),$$

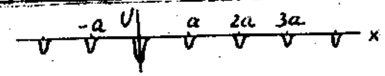
являющиеся одновременно собственными функциями оператора $\hat{T}$ сдвига на расстояние a.

Для зоны $E<0$ найти явную зависимость $E(q)$, где $e^{i\frac{qa}{\hbar}}$ есть собственное значение оператора $\hat{T}$ $\left(\frac{mGa}{\hbar^2} \gg 1\right)$.

47. Определить поток частиц в состояниях, найденных в зад.46. Нормировать волновые функции на единичный поток.

48. В периодическом поле $U = -G\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)$ в одном из узлов потенциал заменен на $-G_1\delta(x)$. Найти коэффициент отражения

от этой "примеси".

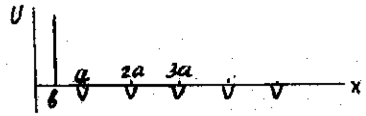


49. Найти энергию и волновую функцию частицы в периодическом поле, локализованной вблизи "примеси" (см. зад. 48).

50. Найти "поверхностный уровень" в поле

$$U(x) = -G\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na) + V(x), \quad V(x) = \begin{cases}\infty & \text{при} \quad x<b, \\ 0 & \text{при} \quad x>b,\end{cases}$$

$$\frac{mGa}{\hbar^2} \gg 1.$$



§ 4. Угловой момент и спин

I. Показать, что для любого состояния Ψ системы с моментом $J=1$ справедливо тождество

$$\left\{(\vec{J}\vec{n})^3 - (\vec{J}\vec{n})\right\}\Psi = 0,$$

$\vec{n}$ – фиксированный единичный вектор.

2. Исследовать качественно угловое распределение плотности вероятности для состояний, описываемых сферическими функциями $Y_{l,m=l}$ и $Y_{l,m=0}$ (считая $l \gg 1$).

3. Построить линейные комбинации s – и p – состояний, отвечающие ортогональным волновым функциям с дипольными моментами, направленными из центра к вершинам тетраэдра (модель валентных связей атома углерода).

4. Какая линейная комбинация решений уравнения Лапласа с l = 0,I может представлять электростатический потенциал в центре ячейки кубического кристалла ? Для частицы, находящейся в центре ячейки, определить возможный вид угловой части волновой функции.

5. Определить возможные значения энергии E, момента ℓ и кратность вырождения $N(E)$ состояний частицы в поле изотропного пространственного осциллятора частоты ω. Чему равны вероятности различных значений ℓ и ℓ_z в состоянии с квантовыми числами в декартовых координатах $n_x=1$, $n_y=0$, $n_z=2$?

6. Исходя из геометрического смысла операторов момента $\vec{J}$ и импульса $\vec{P}$, найти перестановочные соотношения

$$[P_i, P_k]; \quad [J_i, P_k]; \quad [J_i, J_k].$$

7. Вычислить (исходя из геометрических соображений и непосредственно) результат перемножения операторов

$$e^{-i\alpha J_z} J_y e^{i\alpha J_z}.$$

8. Частица находится в состоянии с импульсом $\vec{p}$, направленным по оси z, и определенной спиральностью (проекция спина на направление импульса). Найти характеристики состояния, полученного из исходного действием оператора

$$R = e^{-i\varphi J_z} e^{-i\theta J_y} e^{i\varphi J_z},$$

9. Система находится в состоянии с моментом J и проекцией $J_z = M$. Найти среднее значение проекции момента на ось, имеющую полярные углы θ, φ.

10. Найти относительные интенсивности расщепленных пучков в опыте Штерна-Герлаха (для частиц спина 1/2 и 1), если первоначальный пучок поляризован под углом θ к направлению магнитного поля прибора.

11. Найти вероятности различных результатов измерения проекции момента на ось, имеющую полярные углы θ, φ, для системы, находящейся в состоянии с моментом J и максимальной проекцией J_z.

12. Показать, что любая матрица 2x2 может быть разложена по матрицам Паули согласно

$$A = \tfrac{1}{2} Sp\, A + \tfrac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot Sp\,(A\vec{\sigma}).$$

13. Для системы двух частиц спина 1/2 построить операторы спинового обмена и операторы проектирования на синглетное и триплетное состояния.

14. Гамильтониан взаимодействия двух одинаковых частиц спина 1/2 зависит от их относительного расстояния r и спинов $\vec{s}_1, \vec{s}_2$. Показать, что если момент и четность сохраняются, то наиболее общий вид такого оператора есть

$$H = A(r) + B(r)\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2 + C(r)\frac{(\vec{s}_1\cdot\vec{r})(\vec{s}_2\cdot\vec{r})}{r^2}.$$

Выразить этот оператор через полный спин $\vec{S}$.

15. Для частицы со спином 1/2 построить оператор поворота на угол α_1 вокруг оси $\vec{n}_1$, а затем на α_2 вокруг $\vec{n}_2$. Рассмотреть те же повороты в обратном порядке.

16. Показать, что для частицы со спином 1/2, находящейся в состоянии со спиновой волновой функцией ψ, всегда существует направление, на которое проекция спина равна + 1/2, с вероятностью, равной единице.

17. Для состояния электрона в центральном поле с квантовыми числами $n, \ell, j, j_z = m$ найти вероятности различных значений проекций ℓ_z и s_z и их средние значения.

18. Найти, как меняется направление (θ_0, φ_0) поляризации частицы со спином 1/2 (см. задачу 16) в зависимости от пространственных координат частицы, которая находится в состоянии с определенными значениями $\ell, j, j_z = m$.

19. Разложить произведение двух сферических функций $Y_{\ell_1 m_1}(\theta,\varphi)Y_{\ell_2 m_2}(\theta,\varphi)$ по сферическим функциям $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$.

20. Доказать, что коэффициент векторного сложения $C^{10}_{10\,10}$ равен нулю.

21. Построить проекционные операторы, выбирающие из произведений состояний двух подсистем $\Phi^{(1)}_{j_1 m_1}$ $\Phi^{(2)}_{j_2 m_2}$ с данными j_1, j_2 состояния всей системы с полным моментом j. Выразить коэффициенты векторного сложения через матричные элементы этих проекционных операторов в базисе $\Phi^{(1)}\Phi^{(2)}$.

22. Система состоит из двух спинов I/2, взаимодействие которых имеет вид $K\vec{s}_1\vec{s}_2$. Найти уровни энергии системы во внешнем магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$, если гиромагнитные отношения равны g_1 и g_2.

23. Найти основное и низшие возбужденные состояния замкнутой цепочки N спинов $(s=1/2)$, в которой ближайшие соседи взаимодействуют по закону $H=-K\vec{s}_1\vec{s}_2$, $K>0$.

24. Доказать, что скалярный оператор имеет правила отбора $\Delta J=0$, $\Delta M=0$ и его матричные элементы не зависят от M.

25. Доказать, что векторный оператор имеет правила отбора $\Delta J=0,\pm 1$.

26. Показать, что для диагональных по величине полного момента J матричных элементов любого вектора $\vec{V}$ справедливо тождество ("векторная модель")

$$\langle \alpha' JM'|\vec{V}|\alpha JM\rangle = \frac{\langle \alpha' J|\vec{J}\cdot\vec{V}|\alpha J\rangle}{J(J+1)}\langle JM'|\vec{J}|JM\rangle$$

(α - добавочные квантовые числа).

27. Найти правила отбора по орбитальному моменту $\vec{l}$ для дополнительного кулоновского интеграла движения (вектор Рунге-Ленца), и с их помощью получить дискретный спектр атома водорода.

28. Дейтрон является связанным состоянием протона и нейтрона, причем его волновая функция дается суперпозицией ${}^3S_1 + {}^3D_1$. Оценить вес D -волны в этой суперпозиции, если магнитный момент дейтрона равен 0,85 я.м. (магнитные моменты протона и нейтрона равны соответственно 2,79 я.м. и - I,9I я.м.).

29. Определить магнитный момент ядра изотопа кислорода ${}^{17}_{8}O_9$, имеющего сверх заполненных оболочек один нейтрон на уровне $d_{5/2}$.

30. Электрон находится в центрально-симметричном поле в состоянии с квантовыми числами $n, l, j, j_z=m$. Показать, что усредненное по всем квантовым числам, кроме проекции момента, значение магнитного поля, создаваемого им в центре, равно

$$\vec{\mathcal{H}}(0)=\frac{e\hbar}{mc}\,\frac{l(l+1)}{j(j+1)}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle_{nl}\vec{j}.$$

31. Показать, что плотность электрического тока для нерелятивистской частицы со спином s и гиромагнитным отношением g включает добавочное спиновое слагаемое

$$\vec{j}_{\text{намагнич.}} = c\,g\,\mathrm{rot}\,(\psi^+\vec{s}\psi),$$

где ψ и ψ^+ - соответственно столбец и строка из $(2s+1)$ компонент, а в скобке подразумевается матричное умножение $\sum_{\alpha\beta}\psi^+_\alpha\vec{s}_{\alpha\beta}\psi_\beta$. Найти компоненты $\vec{j}_{\text{намагнич.}}$ для основного состояния атома водорода.

32. Получить правила отбора для оператора Q_{ik}, являющегося симметричным тензором второго ранга.

33. Выразить диагональную по моменту J часть симметричного тензора Q_{ik} со следом, равным нулю, через операторы компонент J_i (ср. задачу 26).

34. Найти зависимость от полного момента $\vec{F}=\vec{J}+\vec{I}$ ($\vec{J}$ - момент электронов, $\vec{I}$ - момент ядра) сверхтонкого расщепления атомного терма, если сверхтонкое взаимодействие электронной оболочки и ядра носит

а) магнитно-дипольный,

б) квадрупольный характер.

35. Показать, что нормированная волновая функция дейтрона (см. задачу 28) может быть записана в виде ($m=0,\pm 1$ - проекция полного момента дейтрона)

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{1}{r}\left\{u_0+\sqrt{2}\left[\frac{3}{2}\,\frac{(\vec{S}\cdot\vec{r})^2}{r^2}-1\right]u_2\right\}\chi_{1m},$$

где χ_{1m} - нормированная спиновая функция для $S=1$, $S_z=m$, $u_0(r)$ и $u_2(r)$ - радиальные функции S- и D - волн, нормированные согласно

$$\int_0^\infty dr\left[|u_0|^2+|u_2|^2\right]=1.$$

Найти уравнения, которым удовлетворяют функции u_0 и u_2, если гамильтониан взаимодействия выражается формулой задачи I4.

36. Частица со спином I/2 помещена в постоянное магнитное поле $\mathcal{H}=\mathcal{H}_z$. В начальный момент времени частица поляризована в направлении $\vec{n}$. Показать, что дальнейшее изменение средних зна-

чений компонент $\vec{s}$ отвечает классической картине прецессии вектора спина вокруг внешнего поля.

37. Частица со спином I/2, поляризованная при $t=0$ в направлении $\vec{n}$, находится в переменном магнитном поле $\mathcal{H}(t)$, направленном по оси z. Найти зависимость от времени средних значений компонент спина и направления поляризации частицы.

38. Частица спина I/2 помещена в постоянное поле $\mathcal{H}_z$ и поперечное поле $\vec{\mathcal{H}}'$, направление которого равномерно вращается в плоскости xy с частотой ω. В начальный момент спин направлен по оси z, а $\mathcal{H}'=\mathcal{H}_x'$. Найти вероятность того, что в момент времени t спин перевернут.

§ 5. Уравнение Шредингера (трехмерный случай)

I. Найти энергию и волновые функции стационарных состояний в потенциале

$$U(r) = Ar^2 + B/r^2 .$$

2. Найти волновые функции и энергию стационарных состояний частицы в сферически-симметричной потенциальной яме с бесконечными стенками. Указать радиальные и орбитальные квантовые числа (n_r, ℓ) для шести нижних уровней.

3. Взаимодействие между нуклонами можно приближенно описывать потенциалом $U(r) = -V\exp(-r/a)$. Найти волновые функции S - состояний. Определить V, полагая $a = 2\cdot 10^{-13}$ см, если энергия связи дейтона $\varepsilon = 2{,}2$ Мэв.

4. Амплитуда колебаний атомов в двухатомной молекуле обычно значительно меньше межатомного расстояния. Благодаря этому энергия может быть разделена на вращательную и колебательную части и представлена в виде

$$E = E_{вр} + E_{кол} ,$$

$$E_{вр} = \frac{\hbar^2}{2I}\ell(\ell+1) , \quad E_{кол} = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right).$$

Предполагая, что потенциал взаимодействия атомов имеет вид

$$U(r) = -\alpha/r + \beta/r^2 ,$$

найти энергетический спектр молекулы. В каком случае полученный спектр имеет описанную выше колебательно-вращательную структуру ?

5. Решить уравнение Шредингера с кулоновским потенциалом в параболических координатах.

6. Найти средний электростатический потенциал, создаваемый атомом водорода в основном состоянии.

7. Найти распределение вероятности по импульсам электрона в атоме водорода в состоянии I S .

8. Вычислить среднее магнитное поле, создаваемое электроном в центре атома водорода в состояниях $S_{1/2}, P_{3/2}$ (указание: см. задачу 3 § 4). и зад. 31 § 4

9. Доказать, что в кулоновском поле $U=-\alpha/r$ для средних значений степеней r имеет место соотношение

$$2E(s+1)\langle r^s\rangle + \alpha(2s+1)\langle r^{s-1}\rangle + \frac{s\hbar^2}{4m}(s^2-4\ell^2-4\ell-1)\langle r^{s-2}\rangle = 0.$$

IO. Заряженная частица движется в постоянном однородном магнитном поле. Найти волновые функции стационарных состояний, в которых определенное значение имеет проекция момента импульса на направление поля.

II. Для заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле найти операторы координат центра орбиты, квадрата радиус-вектора этого центра и квадрата радиуса орбиты. Выяснить, являются ли эти величины интегралами движения. Какие из них имеют определенные значения в стационарных состояниях с определенной проекцией момента импульса на направление поля и каковы эти значения ?

I2. Определить энергетический спектр и волновые функции заряженной частицы во взаимно перпендикулярных однородных электрическом и магнитном полях.

I3. Найти волновые функции и уровни энергии плоского заряженного осциллятора в магнитном поле.

I4. Найти энергетический спектр изотропного заряженного осциллятора в магнитном поле.

I5. Найти энергетический спектр в случае трехмерного движения, которое описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(1+z^2)p^2(1+z^2).$$

Решить задачу а) в представлении Шредингера,
б) в представлении Гайзенберга.

§ 6. Приближенные методы
(теория возмущений, квазиклассическое приближение, вариационный метод)

I. Определить поправки к уровням энергии линейного осциллятора за счет малых ангармонических поправок $V = \alpha x^3 + \beta x^4$. Учесть члены первого порядка по β и второго по α.

Используя полученный результат, показать, что частота классического нелинейного осциллятора зависит от амплитуды колебаний, и найти эту зависимость.

2. Вычислить в первом приближении теории возмущений сдвиг энергетического уровня $1s$ основного состояния водородоподобного атома, обусловленный неточечностью ядра.

Ядро считать а) сферой радиуса R, по поверхности которой равномерно распределен заряд; б) шаром радиуса R с равномерно распределенным по объему зарядом.

Оценить поправку для атома водорода, считая $R \sim 10^{-13}$ см.

Как изменится результат для состояния $2p$?

3. Определить поправки к трем нижним уровням энергии двумерного осциллятора $U = \frac{1}{2} m\omega^2(4x^2+y^2)$ со слабой нелинейной связью $V = \alpha x y^2$.

4. Определить поправки к четырем нижним уровням трехмерного осциллятора $U = \frac{1}{2} m\omega^2(4x^2+y^2+z^2)$ со слабой нелинейной связью $V = \alpha x^3 + \beta x(y^2+z^2)$ (модель резонанса Ферми в молекуле CO_2).

Оценить коэффициент ангармоничности β по известным из экс-

$\omega/2\pi c = \lambda^{-1}$

перимента величинам $\omega/2\pi c \sim$ 670 см$^{-1}$ и полному расщеплению третьего уровня $\Delta E/2\pi\hbar c \sim$ 100 см$^{-1}$.

5. Плоский ротатор с моментом инерции I и электрическим дипольным моментом d помещен в однородное электрическое поле $\vec{\mathcal{E}}$, лежащее в плоскости вращения. Рассматривая поле $\mathcal{E}$ как возмущение, вычислить первые неисчезающие поправки к уровням энергии ротатора.

Найти поляризуемость системы $\alpha = \frac{\partial E_m}{\partial \mathcal{E}}$. Объяснить с классической точки зрения различие в знаке α для состояний с $m = 0$ и $m \neq 0$.

6. Ядро со спином I, гиромагнитным отношением g и квадрупольным моментом Q помещено в кристалл, где существует градиент электрического аксиально-симметричного поля $\partial\mathcal{E}_z/\partial z$ и приложено постоянное магнитное поле $\mathcal{H}$ под углом α к оси z. Найти энергетическое расщепление мультиплета ядерных состояний $|I, M\rangle$. Чем выделены уровни с полуцелым I и $M = \pm 1/2$? Предполагается, что $|Q\,\partial\mathcal{E}_z/\partial z| \gg \mu\mathcal{H}$.

7. Линейный гармонический осциллятор, находящийся при $t \to -\infty$ в основном состоянии, подвергается действию однородного электрического поля $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\, e^{-t^2/\tau^2}$, рассматриваемого как возмущение.

Найти в первом приближении теории возмущений вероятность возбуждения осциллятора.

8. Атом водорода, находящийся при $t \to -\infty$ в основном состоянии, подвергается действию однородного электрического поля $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-|t|/\tau}$.

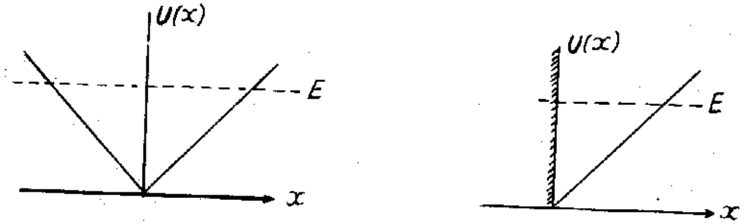
Найти в первом приближении вероятность ионизации, т.е. вероятность обнаружить электрон в состоянии с импульсом от $\vec{p}$ до $\vec{p} + d\vec{p}$ (принять, что для больших значений $p^2/2m \gg me^4/\hbar^2$ электрон можно считать свободным).

Дать графики зависимости d^3W/d^3p от параметра τ и угла вылета электрона.

9. На атом водорода, находящийся при $t = 0$ в основном состоянии, действует однородное периодическое во времени электрическое поле $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \sin\omega t$. Определить минимальную частоту поля, необходимую для ионизации атома, и, пользуясь теорией возмущений,

вычислить отнесенную к единице времени вероятность ионизации. Электрон в конечном состоянии считать для простоты свободным.

10. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии для частицы, движущейся в потенциальном поле вида $U(x)=\alpha|x|$ (рис. I).



а) $U(x)=\alpha|x|$

б) $U=\begin{cases}\infty \text{ при } x<0,\\ \alpha x \text{ при } x>0.\end{cases}$

Рис. I

11. Найти расстояние между соседними уровнями в квазиклассическом поле $U(x)$.

12. Найти в квазиклассическом приближении разность уровней энергии $E_{n_r,\ell+1}-E_{n_r,\ell}$ для частицы, движущейся в центральном поле $U(r)$ с заданным радиальным квантовым числом n_r.

13. Найти волновые функции $\psi_n(x)$ для гармонического осциллятора при $n \gg 1$. Дать график $|\psi_n(x)|^2$ и сравнить его с графиком классической плотности вероятности $\frac{dW(x)}{dx}=\frac{dt}{T\,dx}$, где dt – время пребывания осциллятора на участке от x до $x+dx$ за период движения T. Сравнить также эти величины для состояния $n=0$.

14. Для частицы в центральном поле $U(r)$ найти в квазиклассическом приближении волновую функцию $\psi_{n,\ell,m}(r,\theta)$ с $m=0$; $n,\ell \gg 1$. Указать область применимости полученного результата (см. также задачу № 2 § 4).

15. Определить смещение n-го уровня $(n \gg 1)$ при малом изменении потенциала $U(x) \to U(x)+\delta U(x)$.

16. Частица пролетает над областью с гладким потенциалом вида рис. 2. Найти время задержки в квазиклассическом приближении.

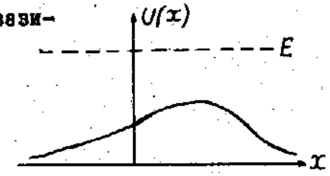


Рис. 2

17. Оценить время жизни ядра U^{235} относительно α – распада, предполагая, что α – частица находится в одномерном потенциальном поле вида рис. 3, и используя характерные значения величин $E\sim 2$ МэВ, $U_{max}-E\sim 12$ МэВ, $b-a\sim 3\cdot 10^{-12}$ см. Сравнить с известным периодом полураспада U^{235}, равным 4,5 млр. лет.

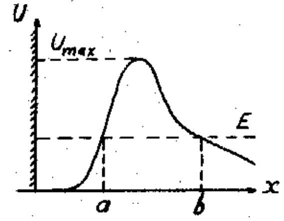


Рис. 3

18. "Пожалуй, самым ярким и удивительным свойством α -распада является очень сильная зависимость периода полураспада $T_{1/2}$ от энергии вылетающих α- частиц E " (Ю.М.Широков, Н.П.Юдин, "Ядерная физика", Наука, 1972 г., стр. 208). Эта зависимость (эмпирический закон Гейгера-Неттола) имеет вид

$$\lg T_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}},$$

где A и B – константы, слабо зависящие от заряда ядра Z (для $Z = 90$ известно $A = -51{,}94$; $B = 139{,}4$ МэВ$^{1/2}$).

Показать, что для α – частиц, движущихся в модельном потенциале вида рис. 4

$$U(r)=\begin{cases}0 & \text{при } r<a,\\ \dfrac{\alpha}{r} & \text{при } r>a\end{cases}$$

и при условии $E \ll \alpha/a$, должен выполняться закон

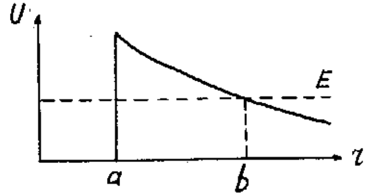


Рис. 4

Гейгера-Неттола, и найти вид коэффициентов A и B через параметры задачи.

19. Вычислить в квазиклассическом приближении коэффициент прохождения электронов через поверхность металла под действием сильного электрического поля $\mathcal{E}$ (рис.5) ("Холодная эмиссия"). Найти границы применимости расчета. Оценить плотность тока через поверхность металла при $E \sim -2$ эВ, $\mathcal{E} \sim 10^6$ в/см.

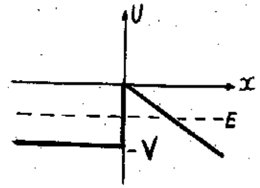


Рис. 5.

20. Определить в квазиклассическом приближении среднее значение кинетической энергии стационарного состояния в одномерном случае.

21. а) Симметричное поле $U(x)$ представляет собой две потенциальные ямы, разделенные барьером (рис.6). Считая выполненным условие квазиклассичности, найти расщепление ΔE_n энергетических уровней отдельной ямы; (см. Л.Л. §50 з.3)

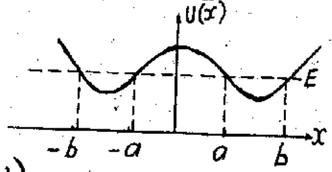


Рис. 6.

б) провести грубую оценку величины барьера $U(x)-E$ на участке $-a<x<a$ для аммиачного мазера, у которого $\Delta E \sim 10^{-4}$ эВ (переходы между такими уровнями приводят к излучению радиоволны с $\lambda \sim 1{,}25$ см);

в) пусть в начальный момент частица находится в состоянии $\psi_0(x)$, соответствующем стационарному состоянию правой ямы. Найти время τ, через которое частица окажется в состоянии $\psi_0(-x)$, соответствующем стационарному состоянию левой ямы. Выразить τ через коэффициент прохождения барьера на участке $-a<x<a$.

22. а) Считая выполненным условие квазиклассичности, найти квазистационарные уровни частицы в симметричном поле, изображенном на рис. 7. Найти также коэффициент прохождения $D(E)$ для частиц с энергией $E<U_0$;

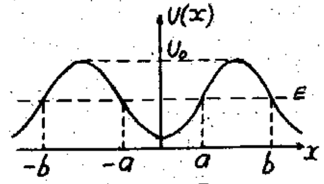


Рис. 7

б) как изменится время жизни частицы в яме, если в центре ямы поставить непроницаемый барьер ?

23. Сравнить зависимость расщепления уровней ΔE_n в задаче 21 и ширины уровня Γ в задаче 22 от коэффициента прохождения и объяснить полученные результаты.

24. Используя вариационный принцип, найти приближенно энергию E_0 основного состояния частицы в поле
$$U(x)=\begin{cases}\infty & \text{при } x<0,\\ c\cdot x & \text{при } x>0.\end{cases}$$

В качестве волновой функции взять функцию вида $\psi = A x e^{-\alpha x}$

Сравнить полученный результат с точным значением $E_0 = 2{,}34\left(c^2\hbar^2/2m\right)^{1/3}$ и оценить точность приближения.

25. Используя вариационный принцип, найти приближенно энергию E_0 основного состояния дейтрона, если потенциал
$$U(r) = -Ve^{-r/a}, \quad V = 32 \text{ МэВ}, \quad a = 2{,}2\cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

В качестве волновой функции взять функцию вида $\psi = A e^{-\alpha r/2a}$

Сравнить полученный результат с экспериментальным значением энергии связи дейтрона $E_0 = -2{,}226 \pm 0{,}003$ МэВ (определяется по порогу реакции фоторасщепления дейтрона).

§ 7. Атом, молекула

1. Оценить величины поправок к кулоновским уравнениям энергии водорода, обусловленных:

а) спин-орбитальным взаимодействием (тонкая структура),

б) релятивистскими поправками к кинетической энергии электрона, в) взаимодействием с магнитным моментом ядра (сверхтонкая структура),

г) наличием у ядра квадрупольного момента,

д) учетом конечных размеров ядра.

2. Для μ - мезоатома оценить (масса μ - мезона $\approx 200 m_e$):

а) кулоновские характеристики: единицы энергии, расстояния, времени, скорости,

б) величину интервалов тонкой и сверхтонкой структуры,

в) зависимость вероятности захвата μ - мезона (из S состояния) от заряда ядра Z.

Указание: ядро считать сферой радиуса $R = Z^{1/3} R_0$; $R_0 \sim 10^{-13}$ см.

3. Для того, чтобы учесть отсутствие случайного кулоновского вырождения по ℓ в спектрах водородоподобных атомов, можно попытаться использовать потенциал вида

$$U(r) = -\frac{Z_a e^2}{r} - \beta r_0 \frac{Z_a e^2}{r^2}, \quad r_0 = \frac{\hbar^2}{m Z_a e^2},$$

где второй член моделирует поляризуемость атомного остатка под действием валентного электрона.

Найти уровни энергии в этом потенциале.

4. Найти электронные конфигурации атомов циркония и гафния и объяснить, почему трудно разделить эти два элемента химическими методами.

5. Определить основные термы элементов O, Cl, Fe, Co, As, La.

6. Указать возможные термы электронных конфигураций:

а) $(np)^3$, б) $(nd)^2$, в) $(ns)(n'p)^4$.

7. На атомном уровне с орбитальным моментом ℓ находится n электронов. Каков максимальный возможный орбитальный момент L всей системы, если её полный спин S имеет минимальное значение?

8. Оценить порядок следующих величин согласно модели Томаса-Ферми:

а) среднее расстояние между электронами и ядром,

б) средняя энергия кулоновского взаимодействия между двумя электронами в атоме,

в) средняя кинетическая энергия электрона,

г) энергия, необходимая для полной и [illegible] атома,

д) средняя скорость электронов в атоме,

е) средний момент количества движения электрона,

ж) среднее радиальное квантовое число электрона.

9. Вычислить величину разности энергий основного состояния водорода и дейтерия (изотопическое смещение).

10. Найти квадрупольный момент атома водорода в состоянии с полным моментом j.

11. Найти расщепление уровней энергии атома во внешнем однородном магнитном поле, если расщепление мало по сравнению с интервалами тонкой структуры (эффект Зеемана).

12. Спектральная линия ртути с длиной волны $\lambda_0 = 1849\ \text{Å}$ в магнитном поле напряженностью 1000 гс расщепляется на три компоненты, отстоящие друг от друга на 0,001 Å. Определить, является ли эффект Зеемана нормальным или аномальным.

13. Можно ли наблюдать линейный эффект Зеемана для позитрония в основном состоянии ?

14. Найти расщепление уровней энергии атома во внешнем однородном магнитном поле $\mathcal{H}$, если расщепление велико по сравнению с интервалами тонкой структуры (эффект Пашена-Бака). Оценить необходимую для этого напряженность магнитного поля.

15. Атом натрия находится в магнитном поле напряженностью $\mathcal{H} = 2{,}5 \cdot 10^4$ э. Учитывая члены первого и второго порядка по полю, найти расщепление линии $3s\,^2S_{1/2} - 2p\,^2P_{1/2}$. Нарисовать схему расщепления.

16. Рассмотреть эффект Зеемана в случае jj - связи для атома, имеющего два электрона сверх заполненных оболочек.

Указание: см. также зад. 31 § 4.

17. Найти расщепление уровней энергии водорода во внешнем однородном магнитном поле, если величина расщепления сравнима с интервалами тонкой структуры.

18. Найти величины сверхтонкого расщепления уровней водородоподобного атома.

Каково отношение энергий расщепления основного состояния атомов водорода и дейтерия ?

Указание: магнитный момент протона $\mu_p = 2{,}79\,\mu_я$ у дейтерия $\mu_d = 0{,}85\,\mu_я$ (см. также зад. 36 из § 4).

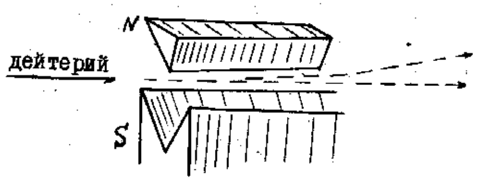
19. Терм $D_{5/2}$ в оптическом спектре ${}_{19}K^{39}$ имеет сверхтонкую структуру, состоящую из четырех компонент. Каково значение спина ядра ? Какое следует ожидать соотношение интервалов в сверхтонком квадруплете ?

20. Найти расщепление уровней с $n=1$ для атома водорода в магнитном поле, если энергия взаимодействия с полем сравнима с интервалами сверхтонкой структуры. Оценить необходимую для этого напряженность магнитного поля.

21. Оценить величину магнитного поля в диффузных туманностях, если экспериментально удается наблюдать триплетное расщепление линии 21 см в спектре водорода; величина расщепления порядка 30 гц. Сравните величину расщепления с допплеровским уширением линии (температура порядка 100°К).

22. Пучок атомов дейтерия, находящегося в основном состоянии, проходит через неоднородное магнитное поле (градиент поля перпендикулярен оси пучка). При напряженности поля $\mathcal{H}=150$ гс пучок не отклоняется.

Найти магнитный момент ядра дейтерия.



23. Найти расщепление уровней атома водорода в однородном электрическом поле, если энергия взаимодействия с полем мала по сравнению с интервалами тонкой структуры. Оценить напряженность поля, при которой эти энергии одного порядка.

24. Найти магнитный момент атома водорода, находящегося в однородном электрическом поле напряженности $\mathcal{E} \sim 10^3$ в/см . Изменится ли результат, если взять $\mathcal{E} \sim 10 \div 100$ в/см ?

25. Как будет проявляться наличие эффекта ионизации атома внешним электрическим полем при экспериментальном наблюдении спектра в эффекте Штарка ?

26. Атом водорода находится в основном состоянии. На расстоянии $R \gg a_Б$ помещен ион с зарядом Z . Найти потенциал взаимодействия.

27. Найти потенциал взаимодействия двух атомов водорода (в основном состоянии) на больших расстояниях. Можно ли дать классическую интерпретацию этому потенциалу ?

28. Найти вероятность того, что при β -распаде трития электрон останется в основном состоянии.

Оценить вероятность возбуждения боровского электрона вылетающим β -электроном.

29. Мимо атома водорода, находящегося в основном состоянии, на большом расстоянии пролетает тяжелый ион. Найти вероятность возбуждения электрона в состоянии 2p 1/2 .

Указание. Траекторию иона считать прямолинейной.

30. Рассмотреть эффект Оже для атома с зарядом ядра Z (в K -оболочке имеется вакансия. Вследствие прямого электростатического взаимодействия каких-либо двух электронов один из них заполняет вакансию, тогда как другой ионизируется). Найти зависимость вероятности перехода от Z , считая волновые функции электронов водородоподобными.

31. Классифицировать нормальные колебания молекулы C_2H_2 . Какие состояния невозможны из-за тождественности частиц?

32. Частота продольных симметрических колебаний молекулы CO_2 приблизительно вдвое больше частоты её изгибных колебаний.

Выразить ангармонические поправки третьей степени по амплитудам колебаний к гамильтониану и найти поправки к первым трем возбужденным уровням энергии, связанным с возбуждением изгибных колебаний.

§ 8. Излучение

1. Определить тип (электрический или магнитный) и мультипольность однофотонных переходов между уровнями атома водорода:

а) $2P_{1/2} \to 1S_{1/2}$;

б) $2P_{3/2} \to 2P_{1/2}$, в) $3P_{3/2} \to 1S_{1/2}$.

2. Определить возможные типы и мультипольности переходов в распадах:

а) $\omega^0(J^P = 1^-) \to \pi^0(J^P = 0^-) + \gamma$, в) $\Delta_{33}(\frac{3}{2}^+) \to N(\frac{1}{2}^+) + \gamma$,

б) $\Sigma^0(\frac{1}{2}^+) \to \Lambda^0(\frac{1}{2}^+) + \gamma$, г) $N^*(\frac{5}{2}^+) \to N(\frac{1}{2}^+) + \gamma$.

3. Найти время жизни $2P_{1/2}$ – состояния атома водорода.

4. Оценить вероятности переходов между компонентами:

а) тонкой структуры,

б) сверхтонкой структуры одного мультиплета.

5. Оценить время жизни $2S_{1/2}$ уровня атома водорода.

6. Найти угловое распределение фотонов в распадах (распадающаяся частица поляризована)

а) $\Sigma^0(J^P = \frac{1}{2}^+) \to \Lambda^0(\frac{1}{2}^+) + \gamma$,

б) $\omega^0(1^-) \to \pi^0(0^-) + \gamma$,

в) $\pi^0(0^-) \to \gamma + \gamma$,

г) $A_1(1^+) \to \pi(0^-) + \gamma$.

7. Найти угловое распределение дипольного излучения, если изменение проекции момента излучающейся системы равно:

а) $\Delta m = 0$, б) $\Delta m = \pm 1$.

8. Атом водорода находится в однородном магнитном поле напряженности H. Рассмотреть переходы $2P_{1/2} \to 1S_{1/2} + \gamma$. Каковы поляризации и частоты фотонов, летящих: а) вдоль поля, б) перпендикулярно полю, если энергия взаимодействия с полем I) мала, 2) велика по сравнению с интервалами тонкой структуры ? Каковы относительные интенсивности спектральных линий ?

9. Заряженная частица находится в поле $U = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$, в начальный момент она была в состоянии с квантовыми числами $n_x = n_y = 1$, $n_z = 0$.
Найти: а) угловое распределение дипольного излучения,
б) как поляризованы кванты, испускаемые вдоль оси z .

10. Найти отношение интенсивностей компонент дублета для первого члена главных серий спектров атомов щелочных металлов ($ns \to np$).

11. Найти вероятности переходов и угловое распределение фотонов при переходах между зеемановскими компонентами одного и того же атомного уровня.

12. Найти вероятность перехода между компонентами сверхтонкой структуры основного состояния атома водорода.

13. π^- мезон захватывается ядром на уровень:

а) $n = 2, \ell = n-1 = 1$. Оценить, при каких значениях заряда ядра Z вероятность захвата π^- мезона ядром будет превышать вероятность радиационного перехода в состояние $n = 1$.

б) $\ell = n-1$, $n \gg 1$ и затем, последовательно испуская фотоны, спускается на уровни с меньшим значением n . При данной величине заряда ядра Z оценить, начиная с каких n вероятность захвата π^--мезона ядром будет превышать вероятность радиационного перехода.

Указание: ядро считать поглощающим шариком радиуса $R = Z^{1/3} \frac{\hbar}{m_\pi c}$, где m_π – масса π^- мезона.

14. Для изотопа Hg^{199} (спин ядра $I = \frac{1}{2}$) наблюдался переход с длиной волны $\lambda_0 = 2656$ Å, соответствующей разности уровней $P_0 \to S_0$. Как известно, переход между этими уровнями является запрещенным (0-0 переход). Попытайтесь найти механизм, приводящий к появлению линии λ_0 в спектре и оцените отношение её интенсивности к интенсивности перехода $^3P_1 \to {}^0S_1$ (длина волны $\lambda_1 = 2537$ Å).

15. В спектре алюминия, помещенного в магнитное поле напряженностью $\mathcal{H} = 2 \cdot 10^4$ э, наблюдалась линия, соответствующая переходу $3p^2P_{1/2} \to 3d\,^2D_{5/2}$. Объясните причину появления этой линии и найдите отношение её интенсивности к интенсивности перехода $3p^2P_{3/2} \to 3d^2D_{5/2}$ (равной интенсивности $3p^2P_{1/2} \to 3d^2D_{3/2}$ перехода).

Указание: длины волн переходов равны:

$$\lambda(P_{1/2}\to D_{5/2}) = 3092\,A^\circ,\quad \lambda(P_{1/2}\to D_{3/2}) = 3089\,A^\circ,$$
$$\lambda(P_{3/2}\to D_{3/2}) = 3092\,A^\circ,\quad \lambda(P_{3/2}\to D_{5/2}) = 3085\,A^\circ.$$

16. Атом водорода, находящийся в $2s_{1/2}$ – состоянии и движущийся со скоростью $v = 10^{-4}c$ вдоль оси x, влетает в однородное магнитное поле напряженностью $\mathcal{H}_0 = 400$ э, направленное по оси z.

Найти время жизни в состоянии $2s_{1/2}$.

17. Заряженная частица находится в поле $U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$. В момент времени $t=0$ распределение по энергиям имеет вид:

$$W(E_n) = const \cdot e^{-E_n/kT}.$$

Найти интенсивность дипольного излучения в этот момент.

18. Одномерный осциллятор (двухатомная молекула) с собственной частотой ω, двигавшийся с импульсом p, внезапно останавливается. Найти интенсивность дипольного излучения в момент после остановки.

19. Используя принцип детального равновесия, установить связь между сечением фотораспада атомной системы ($\gamma + A_1 \to e + A_2$) и сечением радиационной рекомбинации электрона $e + A_2 \to \gamma + A_1$. Моменты систем A_1 и A_2 соответственно J_1 и J_2.

20. Объяснить эффект постепенного исчезновения спектральных линий в водородной плазме по мере увеличения концентрации электронов.

21. Найти закон распада ортопозитрония (парапозитрония), находящегося в однородном магнитном поле напряженности $\mathcal{H}_0$.

22. Определить пороговое поведение сечения фотоионизации:
а) атома,
б) положительного иона,
в) отрицательного иона,
если момент валентного электрона равен $\ell = 0, 1$.

23. Найти угловое распределение электронов и сечение фотоэффекта с основного уровня водородоподобного иона в случае, когда

энергия фотона $I \ll \hbar\omega \ll mc^2$, где I – потенциал ионизации.

24. Найти сечение фоторазвала дейтона в случае, когда энергия фотона немного превышает энергию связи дейтона. Каково пороговое поведение сечения ? Найти отношение сечений фоторасщепления дейтона и обратного процесса – радиационного захвата нейтрона протоном.

Указание: для дейтона использовать аппроксимацию мелкой сферической ямой с энергией связи $I = 2{,}2$ Мэв, вкладом d – волны пренебречь.

25. Найти дифференциальное сечение тормозного излучения медленного электрона на атоме.

Указание: выразить через длину рассеяния "а".

26. Найти дифференциальное сечение тормозного излучения быстрого нерелятивистского электрона на атоме в случае $(|\vec{p}_0| - |\vec{p}|)a_0 \gg 1$ ($\vec{p}_0$ и $\vec{p}$ – начальный и конечный импульсы электрона, a_0 – боровский радиус).

Сравните (по порядку величины) сечение тормозного излучения с сечением упругого рассеяния и с сечением радиационного захвата быстрого электрона.

27. Найти энергию излучения, возникающего при отражении электрона от бесконечно высокой потенциальной стенки.

28. Определить форму спектральной линии в случае допплеровского уширения, обусловленного движением излучающих атомов.

Указание: считать, что распределение по скоростям – Максвелловское, естественная ширина линии много меньше допплеровского уширения.

29. Определить форму спектральной линии, если уширение связано с диффузией возбужденного атома в среде, причем частота излучения немного меньше частоты столкновений с другими атомами.

Указание: при диффузии вероятность нахождения атома в момент t в точке x, если при $t=0$ он находился в точке $x=0$, равна

$$w(x,t) = (2\pi D t)^{-1/2}\, e^{-x^2/2Dt},$$

где D – коэффициент диффузии.

30. Определить максимальное сечение поглощения резонансного фотона частоты $\omega \to \omega_0$ атомной системой.

31. Найти сечение упругого (релеевского) рассеяния света на заряженном изотропном осцилляторе, находящемся в основном состоянии, если длина волны падающего света немного больше характерной амплитуды колебаний осциллятора.

Собственная частота осциллятора равна ω_0 .

32. Фотоны с энергией $\hbar\omega$ упруго рассеиваются на дейтоне (энергия связи I =2,2 Мэв). а) Для случая $\hbar\omega \ll I$ найти сечение рассеяния, включая первую поправку по $\hbar\omega/I \ll 1$; б) То же для случая $Mc^2 \gg \hbar\omega \gg I$ (включая первую поправку по $I/\hbar\omega \ll 1$).

Указание: состояние дейтона описывать как состояние частицы в мелкой сферической потенциальной яме, параметры которой определяются потенциалом ионизации I .

§ 9. Системы многих тел

(В этом параграфе всюду, где это существенно, считать температуру T =0).

I. Для двух тождественных частиц спина s (при заданном состоянии относительного движения) найти число состояний, симметричных и антисимметричных по спинам частиц.

2. Зная, что волновая функция дейтрона является суперпозицией ${}^3S_1 + {}^3D_1$, и предполагая зарядовую независимость ядерных сил, показать, что не существует связанного ядра из двух нейтронов.

3. Две частицы, взаимодействующие по закону $U = U_0\,\delta(\vec r_1 - \vec r_2)$, заключены в непроницаемый параллелепипед с размерами a, b, c . Найти по теории возмущений энергию основного и первого возбужденного состояний системы, считая частицы

а) различными,

б) тождественными, спин равен 0,

в) тождественными, спин равен I/2.

4. Три протона находятся на ядерной оболочке с $j = 5/2$. Найти возможные значения полного момента $\vec J = \vec j_1 + \vec j_2 + \vec j_3$.

5. Квантованные колебания поверхности атомного ядра имеют момент 2. Какие полные моменты допустимы для состояний, в которых имеются два или три таких кванта ? Чему равно полное число состояний системы N квантов (с учетом разных значений проекции полного момента)?

6. N протонов в ядре находятся на оболочке с моментом j . Найти максимальный возможный момент системы; при каком N эта величина достигает наибольшего значения ?

7. Позитроны от β -распада ядра в металле замедляются до тепловых скоростей, а затем аннигилируют с электронами проводимости в два γ -кванта. Оценить вид распределения по углу между фотонами пары.

8. Вводя для электронного газа безразмерный параметр $r_s = a/a_0$, где a – среднее расстояние между частицами $\left(\frac{V}{N} = \frac{4}{3}\pi a^3\right)$, $a_0 = \hbar^2/me^2$ – боровский радиус, выразить через r_s характеристики газа: импульс Ферми p_0 , энергию Ферми ε_0 , среднюю кинетическую энергию на один электрон $\bar\varepsilon$, отношение средней энергии кулоновского взаимодействия к средней кинетической энергии частицы. Как это отношение меняется с изменением плотности газа ?

9. Найти функцию распределения частиц в идеальном ферми-газе по импульсу относительного движения $\vec q = (\vec p_1 - \vec p_2)/2$.

10. Показать, что обусловленное столкновениями с фермиевским фоном (заполненная сфера Ферми) время жизни частицы, возбужденной в состояние с импульсом p над поверхностью Ферми (импульс Ферми p_0 , $(p-p_0)/p_0 \ll 1$) , относительно переходов во все разрешенные состояния пропорционально $(p - p_0)^2$.

II. Для системы тождественных частиц с силами, не зависящими от скоростей, построить операторы плотности $\rho(\vec r)$ и плотности тока $\vec j(\vec r)$ и показать, что они удовлетворяют операторному уравнению непрерывности.

I2. В идеальном ферми-газе плотности n найти спектр всех возбужденных состояний типа частица-дырка.

13. Для системы N тождественных частиц массы m с силами, не зависящими от скоростей, доказать правило сумм сил осцилляторов $\sum_n f_{n0} = N$, где силы осцилляторов

$$f_{n0} = \frac{2m}{\hbar k^2}\,\omega_{n0}\,|(\rho^+_{\vec k})_{n0}|^2,$$

ω_{n0} – частота перехода между n-м стационарным и основным состояниями, $\rho_{\vec k} = \rho^+_{-\vec k}$ – фурье-компонента с волновым вектором $\vec k$ оператора плотности $\rho(\vec r)$ (задача 11). Чему отвечает длинноволновый предел этого правила сумм?

14. Показать, что в системе N тождественных частиц с силами, не зависящими от скоростей, корреляционная функция флуктуаций плотности

$$S_{\vec k}(t) = \langle 0|\rho_{\vec k}(t)\rho^+_{\vec k}|0\rangle,$$

где $\rho_{\vec k}(t) = e^{iHt}\rho_{\vec k}e^{-iHt}$ – оператор $\rho_{\vec k}$ (см. задачу 13) в гейзенберговском представлении, $\rho^+_{\vec k} = \rho^+_{\vec k}(0)$, удовлетворяет правилу сумм

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\,\omega\,S_{\vec k\omega} = N\frac{\hbar k^2}{2m},$$

где $S_{\vec k\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} S_{\vec k}(t)$ – временной фурье-образ $S_{\vec k}(t)$ (так называемый динамический формфактор).

15. Вычислить динамический формфактор (см. задачу 14) идеального ферми-газа, проверить правило сумм задачи 14.

16. Вычислить для идеального ферми-газа корреляционную функцию одновременных флуктуаций плотности

$$S_{\vec k} = \langle 0|\rho_{\vec k}\rho^+_{\vec k}|0\rangle$$

(так называемый статический формфактор).

17. Для основного состояния идеального ферми-газа вычислить вероятность найти одну частицу на расстоянии r от другой.

18. В приближении Хартри-Фока выразить энергию частицы в пространственно-однородной ферми-системе через потенциал взаимодействия $U(r)$ между частицами; найти энергию основного состояния всей системы.

19. Вычислить обменную кулоновскую энергию однородного электронного газа (в присутствии компенсирующего однородного фона положительного заряда) и энергию ε_{F0} одного электрона в приближении самосогласованного поля.

20. Оценить в приближении Хартри-Фока плотность, при которой кулоновский газ перейдет в ферромагнитное состояние (все спины ориентированы в одну сторону).

21. Оценить расстояние, на котором экранируется поле постороннего статического заряда, помещенного внутри металлического образца.

22. В ферми-системе с притяжением (атомное ядро) при увеличении плотности n средняя кинетическая энергия $\bar\varepsilon$ растет $\sim n^{2/3}$ (задача 8), в то время как средняя потенциальная энергия притяжения растет $\sim n$, т.е. система будет коллапсировать. Показать, что если ядерные силы являются смесью прямых и обменных, $U(r) = U_0(r)(1 + \alpha\mathcal{P}_r)$, $\mathcal{P}_r$ – оператор обмена пространственных координат, то при $\alpha > 4$ коллапса не будет (условие насыщения ядерных сил). Ядро рассматривать как ферми-газ из одинакового числа нейтронов и протонов ($N = Z = A/2$) с зарядово-независимыми силами, заключенный в прямоугольный ящик объема $V \gg r_0^3$, где r_0 – радиус действия потенциала $U_0(r)$.

23. Внутри металла в точке $\vec R$ локализован примесный магнитный ион со спином $\vec S$. Взаимодействие электронов проводимости с ионом имеет вид $H' = -g\,\delta(\vec r_e - \vec R)\vec s_e\cdot\vec S$. Рассматривая это взаимодействие по теории возмущений и считая электроны идеальным ферми-газом, вычислить среднюю поляризацию электронного газа как функцию расстояния от примеси.

24. Рассмотреть изменение намагниченности электронов металла в сильных магнитных полях в зависимости от величины поля $\mathcal{H}$, используя двумерную модель (эффективная масса $m^*_\parallel$ для движения вдоль магнитного поля $\mathcal{H}_z$ мала, $m^*_\parallel \to 0$, так что уровни продольного движения не возбуждаются, $p_z^2/2m^*_\parallel \to \infty$).

25. Цилиндрический сосуд радиуса R и высоты d, заполненный идеальным бозе-газом, равномерно вращается вокруг продольной оси с угловой скоростью Ω. При какой скорости вращения в сосуде образуется вихрь? (Вихрю отвечает поле скоростей

$v_\varphi(r) = \frac{K}{r}$, r - радиус цилиндрической системы координат; принять граничное условие для волновой функции на стенках сосуда $\frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_S = 0$).

§ 10. Рассеяние

1. Построить фазовую теорию упругого рассеяния в поле бесконечного однородного цилиндра $U(\rho)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Определить асимптотический вид волновой функции, ввести фазы рассеяния и выразить через них амплитуду и сечение рассеяния.

2. Определить фазы упругого рассеяния на идеально отражающем бесконечно длинном цилиндре радиуса R, ($\psi(R)=0$). Показать, что в классическом пределе получается правильное направление движения отраженной частицы.

3. Пусть внутри идеально отражающего цилиндра (см. задачу № 2) создано однородное магнитное поле $\mathcal{H}$, направленное по оси цилиндра. Показать, что при этом фазы упругого рассеяния электрона на цилиндре изменяются, хотя электрон не проникает в область действия поля (эффект Бома-Ааронова, обсуждение см. Фейнман, Лекции [11] т. 9).

4. Найти фазы рассеяния в поле $U=\alpha/r^2$. Определить сечение рассеяния на малые углы. Объяснить вид углового распределения при $k\to 0$.

5. Рассмотреть ядерную реакцию, идущую через промежуточное состояние $A+a\to C\to B+b$. Каким будет угловое распределение (усредненное по поляризациям) продуктов ядерной реакции в системе, где ядро C покоится, если равен нулю:

а) спин ядра C ,

б) орбитальный момент относительного движения продуктов реакции,

в) орбитальный момент относительного движения сталкивающихся частиц.

6. Объяснить, почему в первом борновском приближении не выполняется оптическая теорема.

7. Используя оптическую теорему, установить критерий неприменимости первого борновского приближения.

8. Быстрый электрон упруго рассеивается протоном, находящимся в ядерном осцилляторном потенциале $U=\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)$. Найти дифференциальное сечение упругого рассеяния, если:

а) протон в основном состоянии,

б) распределение протона по осцилляторным состояниям определяется температурой T . Исследовать предельные случаи

$$\hbar\omega \gg \kappa T, \quad \hbar\omega \ll \kappa T.$$

9. Как получить сечение упругого рассеяния электрона на протоне из экспериментальных данных о рассеянии электрона в водороде ? С какой точностью это сечение совпадает с измеренным при рассеянии на 60^0 при $E_e = 500$ эв ?

10. Связать сечение рассеяния электрона на тяжелом атоме на малые углы с диамагнитной восприимчивостью атома.

11. Определить угловое распределение протонов в реакции срыва $d+\mathcal{A}\to\mathcal{A}'+p$. Считать, что взаимодействие дейтона с тяжелым ядром радиуса R происходит на поверхности ядра, причем нейтрон захватывается на оболочку ядра с энергией $-\varepsilon_\mathcal{A}$ и моментом ℓ , протон с ядром не взаимодействует, кулоновским взаимодействием и спином дейтона пренебречь.

12. Вычислить вероятность упругого рассеяния электрона на почти монохроматической стоячей световой волне частоты ω с плотностью энергии U_ω (энергия стоячей волны в интервале частот $d\omega$ равна $U_\omega d\omega$). Определить угол рассеяния электрона. Оценить сечение для рассеяния на стоячей лазерной волне (эффект Капицы-Дирака).

13. Сформулировать условия, которым должны удовлетворять фазы рассеяния в случае, когда одновременно применимы борновское и квазиклассическое приближения.

14. Оценить, для каких $\ell\gg 1$ перестает работать квазиклассическое рассеяние для потенциала $U=U_0 e^{-r/r_0}$.

15. Оценить сечение рассеяния на потенциале $U=g^2 e^{-\varkappa r}/r$, если $g^2\gg\hbar v$ и $k\gg\varkappa$ (антиборновский случай); $v=\hbar k/m$.

16. Определить дифференциальное сечение рассеяния частицы на идеально отражающем соленоиде радиуса R (см. зад. 2) при а) $kR \gg 1$; б) $kR \ll 1$.

В случае б) сравни с классическим результатом (см. Батыгин Б.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике, 1970, зад. 451).

17. Найти амплитуду упругого рассеяния на потенциале отталкивания:
$$V = V_0(1 - r^2/R^2), \quad r < R;$$
$$V = 0, \quad r > R$$
при $E \gg V_0$ на малые углы $\theta \ll 1$. Рассмотреть случаи
$$\theta \ll (1/kR); \quad 1 \gg \theta \gg (1/kR)$$

а) в борновском приближении,

б) в ВКБ; при $V_0 \ll \hbar^2 k/mR$ сравнить с п.а).

18. Вывести выражение для фаз рассеяния при высоких энергиях $E \gg V$; $ka \gg 1$. Показать, что найденные фазы (которые, вообще, не малы) совпадают с полученными из амплитуды первого борновского приближения.

19. Найти связь между временем жизни τ позитрония в состоянии $J=0$ и сечением аннигиляции $e^+e^- \to 2\gamma$ при малых скоростях $v \ll c$ (оценку сечения аннигиляции см. в задаче 16 § 12).

Указание: аннигиляция происходит на расстояниях порядка
$$r = \hbar/mc \ll a_B.$$

20. Показать, что фазы рассеяния δ_ℓ с $\ell > 0$ для потенциала $U(r) \to r^{-\alpha}$ при $r \to \infty$ при малых энергиях $k \to 0$ ведут себя следующим образом:
$$\delta_\ell \sim k^{2\ell+1}, \quad 2\ell+3 < \alpha;$$
$$\delta_\ell \sim k^{2\ell+1} \ln k, \quad 2\ell+3 = \alpha;$$
$$\delta_\ell \sim k^{\alpha-2}, \quad 2\ell+3 > \alpha.$$

Указание: использовать общее выражение для фазы рассеяния
$$\operatorname{Sin} \delta_\ell = -\int_0^\infty dr\, \frac{2m\, U(r)}{k\, \hbar^2}\, \mathcal{R}_\ell(kr)\, f_\ell(kr),$$

где $\mathcal{R}_\ell(kr)$, $f_\ell(kr)$ – соответственно точные радиальные функции для движения частицы в потенциале $U(r)$ и для свободного движения,
$$f_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_{\ell+1/2}(x);$$

21. Объяснить, почему при $k \to 0$ резерфордовское сечение рассеяния не становится изотропным.

22. Определить сечение упругого рассеяния медленной частицы на прямоугольной сферической потенциальной яме радиуса R и глубины U_0. Исследовать зависимость сечения от параметров ямы (резонансное рассеяние, эффект Рамзауэра). Найти связь между полюсами амплитуды рассеяния и дискретным спектром в яме. Показать, что амплитуды рассеяния при наличии уровня с малой энергией и виртуального уровня при $k \to 0$ отличаются знаком. Из найденного ответа получить сечение рассеяния отталкивающей сферой и найти предел, к которому стремится сечение при $U_0 \to \infty$.

23. Найти сечение рассеяния медленных частиц $ka \ll 1$ в поле отталкивания
$$U = 0, \quad r > a;$$
$$U = U_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad r < a.$$

Сравнить с борновским приближением при $U_0 \ll \hbar^2/ma^2$.

24. Найти сечение рассеяния медленных частиц $E \to 0$ на сферической потенциальной яме $U = \alpha/r^4$, $(\alpha > 0)$.

25. В отрицательном ионе водорода электроны могут находиться в синглетном состоянии с энергией связи $\varepsilon = 0{,}75$ эв. Найти сечение рассеяния медленных электронов, поляризованных под углом θ к оси z на атомах водорода, у которых электроны поляризованы по оси z. Сравнить величину сечения с сечением нерезонансного рассеяния.

26. Обсудить, может ли при рассеянии сильновзаимодействующей заряженной частицы кулоновское упругое рассеяние быть больше ядерного. Сравнение провести при различных углах рассеяния и энергии.

27. Протоны с энергией 100 kev рассеиваются ядрами алюминия ($Z = 13$). Интенсивность рассеяния назад ($\theta = 180°$) составляет 96% от значения, вычисленного по формуле Резерфорда. Допустим, что наблюдаемое расхождение обусловлено изменением фазы

только S - волны (т.к. для взаимодействия с ядром протоны медленные $kR_я \ll 1$). Найти добавку к кулоновской фазе δ_0 . Чему она соответствует: притяжению или отталкиванию ?

28. С известной точностью можно ожидать, что распад $\Sigma^+ \to \pi^+ + n$ идет только в S - волне, а $\Sigma^- \to \pi^- + n$ только в P - волне. Определить, как связана поляризация $\vec{\xi}$ нейтрона с начальной поляризацией η гиперона $\Sigma^\pm$; нейтрон вылетает в направлении $\vec{n}$.

29. Неполяризованный поток нейтронов рассеивается на поляризованной водородной мишени. Амплитуда рассеяния $f = A + B\,\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$. Найти степень поляризации нейтронов после рассеяния

$$P = \frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow} - d\sigma_{\uparrow\downarrow}}{d\sigma_{\uparrow\uparrow} + d\sigma_{\uparrow\downarrow}} .$$

30. Основное состояние дейтона является триплетным с энергией связи 2,2 Mev , что значительно меньше потенциала ядерного взаимодействия нуклонов на малых расстояниях (порядка 25 Mev). Если бы других связанных или виртуальных состояний дейтрона не существовало, то сечение рассеяния медленных неполяризованных протонов на нейтронах должно было бы иметь величину порядка 2 барн. Уже первые измерения этого сечения (Cohen V. et al., 1939). показали, что оно значительно больше (порядка 20 барн.). На основании этого Вигнер выдвинул предположение о спиновой зависимости ядерного взаимодействия и о наличии более мелкого виртуального или связанного уровня в синглетном состоянии нейтрона с протоном. Найти величину энергии этого уровня.

31. Эксперименты по рассеянию медленных неполяризованных нейтронов на протонах свидетельствуют о наличии очень мелкого уровня в синглетном состоянии. Однако характер этого уровня остается неопределенным (см. зад. 30). Теллер и Швингер показали, что ответ могут дать опыты по рассеянию нейтронов на молекулах пароводорода. В соответствующих измерениях (Sunyar A., Goldhaber M., 1949) данными авторами был получен результат σпара = 3,9 барн. Определить, исходя из этого, каким является синглетное состояние дейтона: связанным или виртуальным. С какой точностью должно измеряться сечение ?

Указание: для усреднения по спиновым состояниям удобно записать амплитуду рассеяния (n,p) в виде оператора

$$\hat{f} = \frac{1}{4}\left(f_\sigma + 3f_t\right) + \left(f_t - f_\sigma\right)\left(\vec{S}_n \vec{S}_p\right),$$

где f_σ; f_t - амплитуды синглетного и триплетного рассеяния; $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ - оператор спина.

32. Взаимодействие нуклона с ядром описывается комплексной ямой $U(r) = (1+i\xi)\,V(r)$ и спин-орбитальным взаимодействием $U_{LS} = -\frac{a^2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}(\vec{\ell}\vec{s})$, где ξ, a - константы. Найти в борновском приближении дифференциальное сечение рассеяния неполяризованного пучка и его поляризацию после рассеяния, выразив их через борновскую амплитуду рассеяния $f_Б(\theta)$ на потенциале $V(r)$

33. Найти амплитуду и сечение рассеяния нерелятивистского электрона на нейтроне. Сечение вычислить для неполяризованных частиц.

34. Сталкиваются два поляризованных пучка тождественных частиц со спином 1/2.
Показать, что

$$\frac{d\sigma}{d0} = \frac{1}{4}(1-\cos\gamma)\left|f(\theta)+f(\pi-\theta)\right|^2 + \frac{1}{4}(3+\cos\gamma)\left|f(\theta)-f(\pi-\theta)\right|^2,$$

где γ - угол между векторами поляризаций пучков.

35. Пусть потенциал взаимодействия двух тождественных фермионов со спином 1/2 имеет вид сферически симметричного прямоугольного барьера ширины a , глубины U_0 , $U_0 \gg \hbar^2/ma^2$. Найти дифференциальное сечение рассеяния медленных частиц друг на друге при малых энергиях в триплетном и синглетном состояниях.

36. Пусть короткодействующие силы между тождественными частицами со спином 1/2 и спином 0 не зависят от спина. Найти, как ведет себя отношение упругих сечений

$$d\sigma(1/2 ; 1/2) \quad \text{к} \quad d\sigma(0 ; 0) \quad \text{при} \quad E \to 0 .$$

37. Найти дифракционную картину, возникающую при упругом рассеянии электронов в газе двухатомных молекул. Расстояние между атомами в молекуле a , потенциал каждого атома есть

$U = \frac{\alpha}{r} e^{-r/r_0}$, $\alpha \ll \hbar^2/ma$. Ориентация молекул хаотична. Оценить, при каких энергиях можно наблюдать эту картину, считая $a \sim 3r_0 \sim 3\text{Å}$. Рассмотреть случаи больших и малых передаваемых импульсов $qa \gg 1$, $qa \ll 1$.

38. Выразить дифференциальное сечение упругого рассеяния нейтронов системой ядер, расположенных в узлах кристаллической решетки, через амплитуду рассеяния на одиночном ядре. Получить формулу Вульфа-Брэгга. Оценить ширину дифракционных максимумов $\Delta\theta$ для конечной решетки с линейным размером L. Нарисовать графики зависимости сечения от угла рассеяния в одной из плоскостей кристаллической решетки.

39. Выразить длину рассеяния медленной частицы $kR \ll 1$ на двухатомной молекуле с межатомным расстоянием R через длины рассеяния на каждом из атомов a_1, a_2; $a_1, a_2 \ll R$ с учетом членов порядка a/R.

Указание: для медленных частиц вне области действия потенциала $a \ll r \ll 1/k$, $\qquad f(r) \approx f_0(1 - a/r)$.

40. Выразить амплитуду рассеяния на двух центрах, находящихся на расстоянии $\vec{R}$ друг от друга, через амплитуды рассеяния на каждом из центров f_1, f_2 с учетом поправок порядка $f_1 f_2/R$. Считать, что радиус действия сил в каждом из центров мал по сравнению с расстоянием R между ними и $kR \gg 1$.

41. Пусть сильное взаимодействие моделируется поглощающим черным шаром конечного радиуса. Будут ли конечными полные сечения реакций а) $\pi^- p \to \pi^0 n$, б) $\pi^+ p \to \pi^+ p$ с учетом электромагнитного взаимодействия ?

42. Найти сечение рассеяния электронов на заряженном трехмерном изотропном осцилляторе с потерей энергии а) $\varepsilon = \hbar\omega$, б) $\varepsilon = n\hbar\omega$. До рассеяния осциллятор находился в основном состоянии (модель возбуждения колебательных уровней молекулы).

43. Оценить энергию, приобретаемую в единицу времени невозбужденным трехмерным заряженным изотропным осциллятором, который облучается потоком электронов с плотностью ρ и энергией E.

44. Найти дифференциальное сечение рассеяния электронов на водороде в основном состоянии с возбуждением состояний $n = 2$, $l = 0, 1$. Тождественностью пренебречь.

45. Найти вероятность неупругого рассеяния электрона с энергией E на атоме водорода с потерей энергии ε, $E \gg \varepsilon \gg I$, I – потенциал ионизации водорода.

46. Выразить сечение неупругого рассеяния быстрого электрона с начальной скоростью v_0 на атоме с возбуждением n-го уровня $(E_n - E_0 \ll \hbar v_0/a_Б)$ через матричные элементы дипольного момента атома (приближение Бете). Связать найденное сечение с сечением поглощения линейно поляризованного кванта (ср. с методом эквивалентных фотонов Вайцзекера-Вильямса).

47. Оценить характерные прицельные параметры, при которых происходит передача энергии от возбуждённого атома к такому же невозбужденному при столкновении с относительной скоростью v_0.

48. Вычислить сечение рассеяния нейтрона массы m, движущегося со скоростью v в кубическом кристалле, с возбуждением одного фонона. Потенциал взаимодействия нейтрона с узлом решетки принять равным $V_0\,\delta(\vec{r} - \vec{R}_i)$. В начале решетка не возбуждена, её параметры: один атом массы M в электронной ячейке, скорость продольных звуковых волн s, число атомов в решетке N. Показать, что при $v < s$ нейтрон рассеивается только на кристалле как целом (ср. с эффектом Мессбауэра).

49. а) Связать реакции $\gamma + p \to \pi^+ + n$ вблизи порога прямой реакции $\hbar\omega \gtrsim \mu_\pi c^2$;

б) определить сечение радиационной рекомбинации дейтона $p + n \to d + \gamma$ по сечению фоторасщепления дейтона (см. задачу 24 из § 8).

50. Выразить сечение радиационной рекомбинации быстрого электрона $\alpha \ll v/c \ll 1$ с протоном $e + p \to H + \gamma$ через сечение фотоэффекта, если образуется водород в состоянии с $n = 1$; $n = 2$.

51. На встречных пучках e^+e^- с энергией $E_+ = E_- = E$ изучены сечения аннигиляции в пару π-мезонов $\sigma(e^+e^- \to \pi^+\pi^-)$;

в 2 γ кванта $\sigma(e^+e^- \to 2\gamma)$. Определить сечение не наблюдавшихся до сих пор реакций $\pi^+\pi^- \to 2\gamma$ и $\gamma\gamma \to e^+e^-$ при той же энергии E. (Обратить внимание на тождественность γ квантов).

§ II. Уравнение Дирака

Обозначения:

$$a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}, \qquad \partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right),$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma_m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_m \\ -\sigma_m & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3,$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \qquad \bar{u} = u^+\gamma_0.$$

Греческие индексы пробегают значения 0,I,2,3, латинские - I,2,3.

Нормировка: $\bar{u}\gamma_0 u = 2E/c$.

I. Как преобразуется дираковский спинор при пространственных поворотах и преобразованиях Лоренца ?

2. Получить волновую функцию свободного электрона прямым преобразованием Лоренца из системы покоя.

3. Доказать градиентную инвариантность уравнений Клейна-Гордона и Дирака для заряженной частицы в электромагнитном поле. Какому закону сохранения соответствует инвариантность относительно градиентного преобразования, не зависящего от координат?

4. Доказать, что уравнение Дирака эквивалентно уравнению

$$\left[\left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)^2 - \frac{ie\hbar}{2c}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^2c^2\right]\psi = 0.$$

Сравнить выписанное уравнение второго порядка с уравнением Клейна-Гордона.

5. Вычислить матричные элементы $\bar{u}_2 u_1$, $\bar{u}_2\gamma_\mu u_1$, $\bar{u}_2\gamma_5 u_1$ в случае свободного движения при совпадающих состояниях I и 2.

Найти нерелятивистский предел этих матричных элементов, если состояния I и 2 различны.

6. Упростить произведения матриц $\gamma_\mu\gamma_\mu$, $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu$, $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\varkappa\gamma_\mu$, $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\varkappa\gamma_\lambda\gamma_\mu$.

7. Доказать тождества

$$\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu = \delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu + \delta_{\mu\nu}\gamma_\lambda - \delta_{\lambda\nu}\gamma_\mu - i\varepsilon_{\lambda\mu\nu\varkappa}\gamma_\varkappa\gamma_5,$$

$$\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\varkappa\lambda} = -\delta_{\mu\varkappa}\delta_{\nu\lambda}I + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\varkappa} + i\varepsilon_{\mu\nu\varkappa\lambda}\gamma_5.$$

Здесь $$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} I & \mu = \nu = 0, \\ -I & \mu = \nu = I,2,3, \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$ $\varepsilon_{\mu\nu\varkappa\lambda}$ - полностью антисимметричный тензор четвертого ранга, $\varepsilon_{0123} = I$;

I - единичная матрица.

8. Вычислить следы произведений γ - матриц: $\gamma_\mu\gamma_\nu$, $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\varkappa\gamma_\lambda$, $\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu$, $\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\varkappa\gamma_\lambda$.

9. Найти оператор скорости дираковской частицы. Чему равны его собственные значения ? Как объяснить полученный результат ?

I0. Вычислить для дираковской частицы производную по времени от оператора $\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$. Сравнить результат с классическим уравнением движения.

II. Показать, что в центрально-симметричном поле оператор

$$\vec{r}\times\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}, \quad \text{где } \vec{\Sigma} = \gamma_0\gamma_5\vec{\gamma},$$

является интегралом движения. Дать физическую интерпретацию результата.

I2. Показать, что в магнитном поле, не зависящем от времени, оператор

$$\vec{\Sigma}\cdot\frac{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)}{\left|\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right|}$$

(называемый спиральностью) сохраняется. Чему равна в этом случае частота прецессии спина ?

I3. Доказать, что для связанного электрона в кулоновском поле энергия стационарного состояния

$$E_n = mc^2 \langle n | \gamma_0 | n \rangle$$

(это соотношение является аналогом теоремы вириала).

I4. Получить из уравнения Дирака во внешнем поле уравнение Паули.

I5. Найти релятивистские поправки к уравнению Паули во внешнем поле.

I6. Используя результат предыдущей задачи, найти тонкую структуру спектра атома водорода. Почему в данном случае использование обычной теории возмущений (без учета вырождения) приводит к правильному результату ?

I7. Получить из уравнения Клейна-Гордона во внешнем поле уравнение Шредингера с релятивистскими поправками. Найти тонкую структуру спектра в кулоновском поле. (Такой спектр имеют высокие возбужденные состояния π^- - мезоводорода: π^- - мезона, связанного кулоновским полем протона).

I8. Сколько линий в спектре атома водорода соответствует разрешенным переходам между состояниями с $n = 2$ и $n = 3$? Сколько было бы линий, если бы электрон описывался уравнением Клейна-Гордона ?

I9. До какого порядка по v/c следует доводить расчет спектра атома водорода, используя обычное уравнение Дирака в кулоновском поле ? Перечислить и оценить эффекты, которые приводят к смещению уровней и не учитываются этим уравнением.

20. Показать, что оператор $\frac{e^2 \vec{r}}{r} \cdot \vec{\Sigma} + \frac{i\hbar}{mc}(\vec{\Sigma} \cdot \vec{l} + 1)\gamma_0 \gamma_5 (H - mc^2 \gamma_0)$

является интегралом движения в кулоновском поле. Найти нерелятивистский предел этого оператора. С каким свойством спектра атома водорода связано существование указанного интеграла движения ? (см. ответ задачи I6).

2I. Найти уровни энергии и волновые функции дираковской частицы в постоянном однородном магнитном поле.

22. Найти магнитный момент частицы, описываемой уравнением

$$[\gamma_\mu (i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) - \frac{ie\hbar\varkappa}{4mc^2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - mc]\psi = 0.$$

23. Показать, что уравнение Дирака в ультрарелятивистском пределе можно свести к двум независимым уравнениям для двухкомпонентных спиноров. Что можно сказать о поляризации частиц, описываемых этими уравнениями ? Как преобразуются двухкомпонентные спиноры при пространственной инверсии ? Выразить через эти спиноры электромагнитный ток.

24. Найти в борновском приближении сечение рассеяния релятивистского электрона на кулоновском центре. Почему в ультрарелятивистском случае дифференциальное сечение рассеяния назад оказывается сильно подавленным ?

25. Найти в борновском приближении сечение рассеяния релятивистской заряженной скалярной частицы на кулоновском центре. Объяснить, почему отличие между результатами этой и предыдущей задач не содержит постоянной Планка.

§ I2. Изотопический спин. Различные правила отбора. Простейшие оценки в квантовой электродинамике

I. Доказать, что

а) $d\sigma(p + d \to \pi^+ + n + d) = d\sigma(n + d \to \pi^- + p + d)$,

б) $d\sigma(p + p \to \pi^+ + d) = d\sigma(n + n \to \pi^- + d)$,

в) $d\sigma(\pi^+ + p \to \pi^+ + p) = d\sigma(\pi^- + n \to \pi^- + n)$,

г) $d\sigma(n + p \to p + p + \pi^-) = d\sigma(n + p \to n + n + \pi^+)$,

где $d\sigma$ - дифференциальные эффективные сечения соответствующих реакций, взятые при одних и тех же относительных энергиях, углах разлета и взаимных ориентациях спинов.

2. Доказать, что

а) $d\sigma(p+d\to\pi^++n+d)=2d\sigma(p+d\to\pi^0+p+d)$,

б) $d\sigma(p+p\to\pi^++d)=2d\sigma(n+p\to\pi^0+d)$,

в) $d\sigma(\pi^++p\to\pi^++p)+d\sigma(\pi^-+p\to\pi^-+p)=$

$=d\sigma(\pi^-+p\to\pi^0+n)+2d\sigma(\pi^0+p\to\pi^0+p)$.

Попытайтесь доказать приведенные соотношения, не используя коэффициенты векторного сложения. Для этого следует рассмотреть реакции, идущие из начального состояния, неполяризованного по изоспину, и учесть результаты а) – в) предыдущей задачи. Указанный метод был предложен И.М.Шмушкевичем.

3. Показать, что сечения реакций I) $\bar p d\to\pi^+\pi^-n$; 2) $\bar p d\to\pi^0\pi^0 n$; 3) $\bar p d\to\pi^-\pi^0 p$ связаны соотношением

$$\sigma_1=2\sigma_2+\frac{1}{2}\sigma_3.$$

4. Найти отношения

$d\sigma(\pi^++p\to\pi^++p):d\sigma(\pi^-+p\to\pi^0+n):d\sigma(\pi^-+p\to\pi^-+p)$

в предположении, что рассеяние происходит в основном через промежуточное состояние с изотопическим спином 3/2.

5. Доказать, что в пределе точной изотопической симметрии имеет место неравенство

$$d\sigma_{np}(\theta)+d\sigma_{np}(\pi-\theta)\geqslant d\sigma_{pp}(\theta).$$

Здесь $d\sigma_{np}(\theta)$ и $d\sigma_{pp}(\theta)$ – дифференциальные сечения упругого np и pp рассеяния на угол θ, взятые при одинаковых энергиях и поляризациях частиц.

6. Какими орбитальными моментами обладают состояния, в которых может идти реакция

$$\pi^++\pi^-\to\pi^0+\pi^0\ ?$$

7. η^0 – мезон имеет квантовые числа $J^P=0^-$ (Здесь J означает момент состояния, а P – его четность). Возможны ли распады:

а) $\eta^0\to2\pi^0$, б) $\eta^0\to\pi^+\pi^-$, в) $\eta^0\to\pi^0\gamma$?

8. Квантовые числа ρ^0– мезона I$^-$. Возможны ли распады:

а) $\rho^0\to2\pi^0$, б) $\rho^0\to\pi^+\pi^-$, в) $\rho^0\to\pi^0\gamma$?

9. Квантовые числа ω – мезона I$^-$, а его изотопический спин равен нулю. Возможны ли распады: а) $\omega\to2\pi^0$, б) $\omega\to\pi^+\pi^-$?

I0. Квантовые числа φ – мезона I$^-$, а K – мезонов 0$^-$. Изотопический спин φ – мезона равен нулю, а K – мезонов I/2. Показать, что в силу изотопической инвариантности вероятности распадов $\varphi\to K^+K^-$ и $\varphi\to K^0\bar K^0$ должны быть равны. Чем объяснить, что на самом деле отношение этих вероятностей существенно больше единицы ? (Разные эксперименты дают для этого отношения значения, лежащие в интервале I,3 ÷ 2,I). m_φ = IOI9 Мэв, m_{K^+} = 494 Мэв, m_{K^0}= 498 Мэв.

II. Показать, что захват π^-– мезона с S– уровня мезодейтерия, приводящий к реакции

$$\pi^-+d\to2n,$$

был бы запрещен, если бы π^-– мезон имел квантовые числа 0$^+$.

I2. Из эксперимента известно, что процесс

$$\pi^-+d\to\pi^0+2n$$

идет с очень малой вероятностью. Что можно сказать об относительной внутренней четности π^-– и π^0– мезонов, если захват π^- – мезона может происходить главным образом с S – уровня мезодейтерия ?

I3. Какова относительная ориентация линейных поляризаций γ – квантов в распаде $\pi^0\to2\gamma$?

I4. Могут ли два фотона находиться в состоянии с полным моментом единица ?

I5. В силу соотношения неопределенности позитроний может на короткое время превратиться в один фотон. Оценить величину поправки к спектру, вызванной этим эффектом. Какие уровни и в какую сторону смещаются по указанной причине ?

I6. Оценить сечение аннигиляции $e^+e^- \to 2\gamma$ в пределе малой относительной скорости v начальных частиц.

I7. Оценить время жизни пара— и ортопозитрония.

I8. Позитроний находится в $2P$ состоянии с полным моментом нуль. Что более вероятно: переход с излучением в $1S$ состояние или аннигиляция ?

I9. На встречных электрон-позитронных пучках наблюдается реакция $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$. Могут ли родившиеся π - мезоны двигаться вдоль направлений пучков ? (При обсуждении этого вопроса и решении следующей задачи необходимо учесть результаты задачи 23 из предыдущего раздела). Что можно сказать I) об угловой зависимости сечения; 2) о его зависимости от импульса π - мезона вблизи порога, если реакция идет через промежуточный γ - квант ?

20. η^0 - мезон может распадаться на пару e^+e^- или на пару $\mu^+\mu^-$ через промежуточное состояние с двумя γ - квантами. Оценить отношение вероятностей распадов $\eta^0 \to e^+e^-$ и $\eta^0 \to \mu^+\mu^-$. (μ - мезон описывается уравнением Дирака и взаимодействует с электромагнитным полем так же, как электрон ; масса μ - мезона m_μ = I06 Мэв).

2I. Постоянное однородное электрическое поле может рождать в вакууме электрон - позитронные пары. Какова характерная зависимость вероятности процесса от напряженности поля ?

22. Жесткий γ - квант рождает пару e^+e^- в кулоновском поле тяжелого ядра. В какую сторону изменится результат для полного сечения, если для электрона и позитрона использовать вместо плоских волн, точные кулоновские волновые функции ?

'23. Оценить сечение одноквантовой аннигиляции позитрона, движущегося со скоростью v , на атоме водорода.

Указание: процесс рассматривать как излучение с переходом электрона в состояние с отрицательной энергией.

24. Известно, что магнитные моменты протона и нейтрона отличны от значений, следующих из теории Дирака, и равны

$$\mu_p = 2,79\mu_я; \quad \mu_n = -1,91\mu_я \quad \left(\mu_я = \frac{e\hbar}{2m_pc}\right).$$

Предполагая, что отличие возникает за счет временной (на время $\tau \sim \frac{\hbar}{m_\pi c^2}$) диссоциации нуклона на нуклон и π - мезон, оценить отношение аномальных магнитных моментов $\frac{\mu_p - \mu_я}{\mu_n}$.

Считать, что $m_p \gg m_\pi$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

§ I. Основные принципы квантовой механики

I. $\lambda = 5770$ Å

2. а) $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-6}$, б) $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-1}$

3. $\Delta\omega \sim 10^{4}$ сек$^{-1}$; $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-15}$

4. $\tau \sim \alpha^{-3} \frac{\hbar}{E} \sim 10^{-10}$ сек

5. $\sin^2\vartheta = \frac{(\Delta\varepsilon)^2}{4\varepsilon(\varepsilon-\Delta\varepsilon)}\left[2\frac{\varepsilon}{mu^2} - 1 - \frac{\Delta\varepsilon}{mu^2} - \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2mu^2}\right)^2\right]$,

ϑ – угол рассеяния, ε – начальная энергия, $\Delta\varepsilon$ – изменение энергии, u – скорость звука.

Если $\varepsilon \gg mu^2$,

$$\Delta\varepsilon \simeq \sqrt{2\varepsilon m u^2}\,\sin\vartheta.$$

6. $$\omega = \frac{2c}{\hbar(n^2-1)}\left(\sqrt{m^2c^2+p^2} - npc\cos\vartheta\right),$$

n – показатель преломления, p – начальный импульс.

8. а) $\varepsilon_n = n\hbar\omega$;

б) $\sqrt{\frac{2\varepsilon mR^2}{n_\varphi^2} - 1} - \arccos\frac{n_\varphi}{R\sqrt{2m\varepsilon}} = \frac{\pi n_r}{2n_\varphi}$,

$n_r \gg n_\varphi$, $\varepsilon \simeq \frac{\pi^2}{8}\frac{n_\varphi^2}{mR^2}\left(\frac{n_r}{m_\varphi}+1\right)^2$;

$n_r \ll n_\varphi$, $\varepsilon \simeq \frac{n_\varphi^2}{2mR^2}\left[1+\left(\frac{3\pi}{2}\frac{n_r}{n_\varphi}\right)^{2/3}\right]$.

9. $\frac{2^4}{3^{3/2}\pi^{1/2}}\left(\frac{mg^2a}{\hbar^2}\right)^{3/2}$.

I0. $\vartheta = 27{,}5^\circ$, $d = 2{,}06$ Å, $\Delta\lambda/\lambda \sim \Delta\varepsilon/\varepsilon < \frac{1}{4}$.

I3. 10^{-6}.

I4. $\tau > 10^{-9}\exp(10^{20})$ сек.

I6. $\Delta\omega/\omega \sim \alpha^3 \sim 10^{-6}$.

I7. $n \sim 10^{16}$ см$^{-3}$.

I8. $m_\pi \sim \hbar/rc \sim 3\cdot10^{-25}$ г $\sim 300\, m_e$.

2I. а) $\Delta x^2 = a^2/4$, $\Delta p^2 = \hbar^2/a^2$, $\bar{p} = \hbar k_0$;

б) $\Delta x^2 = a^2/2$, $\Delta p^2 = \hbar^2/4a^2$, $\bar{p} = 0$;

в) $\Delta x^2 = a^2/12$, $\Delta p^2 = \infty$, $\bar{p} = 0$.

22. а) $E \sim (\hbar^4 \alpha/m^2)^{1/3}$,

б) $E \sim \hbar\omega$,

в) $E \sim me^4/\hbar^2$.

23. $E_n = \frac{(\pi n\hbar)^2}{2ma^2}$, $\psi = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n x}{a}$.

24. а) $w_p = \frac{4\pi n^2\hbar^3 a}{[(\pi n\hbar)^2 - (ap)^2]^2}\sin^2\left(\frac{pa}{2\hbar} - \frac{\pi n}{2}\right)$,

б) $\bar{p} = 0$, $\bar{x} = a/2$,

в) $\Delta x^2 = \frac{a^2}{12}\left(1 - \frac{6}{\pi^2 n^2}\right)$, $\Delta p^2 = \left(\frac{\pi n\hbar}{a}\right)^2$.

25. $F = \frac{(\pi n\hbar)^2}{ma^3}$.

26. а) $\psi(x,t) = C\left(1+2i\frac{\hbar t}{ma^2}\right)^{-1/2}\exp\left[\frac{-x^2+ia^2k_0(x-\hbar k_0 t/2m)}{a^2+2i\,\hbar t/m}\right]$;

б) $\psi(x,t) = \frac{C}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-a/2}{\sqrt{i\,\hbar k^2 t/m}}\right) - \Phi\left(\frac{x+a/2}{\sqrt{i\,\hbar k^2 t/m}}\right)\right]$.

§ 2. Операторы, теория представлений

1. а) $E;\ \vec{L};\ \vec{P};\ P_{\bar z}$.
   б) $E;\ \vec{L};\ P_{\bar z}$.
   в) $E;\ L_z;\ p_z;\ P_{\bar z}$.
   г) $E;\ L_z;\ p_x; p_y;\ P_x; P_y$.
   д) $L_z;\ p_z;\ P_x;\ P_y$.

2. Нет.

4. Эрмитов на подклассе функций $f(0)=0$.

5. а) нет, так как $\langle \ell_z \rangle = 0$,
   б) см. книгу Базь, Зельдович, Переломов [12].

6. Не обязательно. Например, $[A,C] = \alpha A + \beta B + \gamma C$.
   Требуется лишь $[B,[A,C]] = 0$.

7. $\langle A^2\rangle \cdot \langle B^2\rangle \geq \frac{1}{4}\langle C^2\rangle$.

10. а) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} + \ldots$,
   б) указание: рассмотреть $f(\lambda) = e^{\lambda A}\, e^{-\lambda(A+B)}$, $f(0)=1$,
   $f(\lambda) = f(0) - \int_0^\lambda d\lambda' B(\lambda') + \int_0^\lambda d\lambda' B(\lambda')\int_0^{\lambda'} d\lambda'' B(\lambda'') - \ldots$,

где $B(\lambda) = \exp(\lambda A)\cdot B\cdot \exp(-\lambda A)$, $f(0)=1$.

11. $S_2 = 4(E_0 - \langle 0|U|0\rangle)$; при $U = \alpha r^{-n}$; $S_2 = \frac{4n}{n-2}E_0$.

Указание: рассмотреть разложение матричных элементов $\langle n|\,x(t/2)\,x(-t/2)\,|n\rangle = \sum_k \langle n|x|k\rangle\langle k|x|n\rangle \exp(it(E_n - E_k))$

в ряд по t.

12. $\langle x|\,p^{-1}|x'\rangle = \frac{i}{\hbar}\,\theta(x-x')$, где $\theta(\xi)=1;\ \xi>0;\ \theta(\xi)=0;\ \xi<0$.

13. $[H, T_a] = 0$; $|\lambda| = 1$.

14. $\vec{A} = -\sqrt{m}\left(-\alpha\,\vec{r}/r + \frac{1}{2m}(\vec{p}\times\vec{\ell} - \vec{\ell}\times\vec{p})\right)$,
   $[\ell_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k$; $[A_i, A_j] = -2i\varepsilon_{ijk}\ell_k$.

15. $p_r = |\vec{p}| = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)$.

16. а) $R_{ik} = -\delta_{ik}$; $\hat{O} = \exp\{-i\pi(\bar{r}^2 + \bar{p}^2 - 3)\}$,
   б) в пространстве $\begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{pmatrix}$; $R_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{pmatrix}$,

где $\hat{1}$ – единичная матрица

$$S_{1,2} = -\frac{\pi}{4}\{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2 + (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)^2 - 6\};\quad \hat{O} = e^{\hat{S}_{1,2}}.$$

17. а) $\bar{v} = \frac{1}{m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}\right)$,
   б) $[v_\alpha\, v_\beta] = \frac{ie\hbar}{m^2c}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\gamma$; $\Delta v_\alpha \Delta v_\beta \geq \hbar\omega/2m$,
   в) $m\dot{\bar{v}} = e\bar{\mathcal{E}} + \frac{e}{c}\bar{v}\times\bar{\mathcal{H}}$; $\bar{\mathcal{E}} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$; $\bar{\mathcal{H}} = \operatorname{rot}\bar{A}$,
   г) $[H; x_0] = [H; y_0] = 0$; но $[x_0; y_0] = -i\hbar/m\omega$.

18. а) $\bar{v} = \frac{\bar{p}}{m} - V_0(\bar{r}\times\bar{s})$, $\frac{e}{2c}\hat{\vec{\sigma}}\times\vec{\mathcal{H}} - $
   б) $[v_\alpha; v_\beta] = -\frac{2i\hbar}{m}V_0\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma$, $-\frac{e}{2c}\vec{\mathcal{H}}\times\vec{v}$
   в) $m\dot{\bar{v}} = -\nabla\varphi + mV_0(\bar{s}\times\bar{v} - \bar{v}\times\bar{s}) +$
   $+ mV_0^2\{\bar{s}\times(\bar{r}\times\bar{s}) + \bar{r}\times(\bar{s}\times\bar{r})\}$.

19. а) $\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar t}{ma}\right)^2$; $\hat{x}(t) = \hat{x} + \frac{\hat{p}}{m}t$,
   б) $\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{a^2}{2}\cos^2\omega t + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{m\omega a}\right)^2\sin^2\omega t$,
   $\hat{x}(t) = \hat{x}\cos\omega t + \frac{1}{m\omega}\hat{p}\sin\omega t$.

В начальном состоянии:

$$\langle x\rangle = x_0;\qquad \langle p\rangle = p_0,$$
$$\langle x^2\rangle = x_0^2 + \frac{a^2}{2};\ \langle p^2\rangle = p_0^2 + \frac{1}{2a^2};\ \langle xp + px\rangle = 2x_0p_0.$$

20. Выберем $\bar{A} = \{0, \mathcal{H}x, 0\}$. Тогда

$$x(t) = A\cos\omega t + \frac{1}{\omega}B\sin\omega t + \xi,$$
$$y(t) = -A\sin\omega t + \frac{1}{\omega}B\cos\omega t + \eta,$$

где

$$A = -\frac{1}{\omega}v_y(0),\quad B = v_x(0);\quad \bar{v} = \frac{1}{m}\left(\bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}\right);$$
$$\xi = x(0) + \frac{1}{\omega}v_y(0),\quad \eta = y(0) - \frac{1}{\omega}v_x(0).$$

21
$$\psi_{\tau}(z)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau^2}}\,\delta(z-\tau);\quad \psi_{\tau}(p)=\frac{\sin(p\tau/\hbar)}{p\sqrt{2\pi^2\hbar}}.$$

22.
$$\langle(\Delta x)^2\rangle=\langle x^2\rangle=\frac{\hbar}{m\omega}(n+1/2),$$
$$\langle(\Delta p)^2\rangle=\langle p^2\rangle=m\omega\hbar(n+1/2).$$

23. а) $|\alpha\rangle=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,\ \hat a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle\equiv Ae^{i\varphi}|\alpha\rangle,$

б) $\langle\alpha|\hat x(t)|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\alpha e^{-i\omega t}+\text{к.с.}\right)=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,A\cos(\omega t+\varphi),$

в) $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\int_0^{\infty}d(A^2)\langle x|A,\varphi\rangle\langle A,\varphi|x'\rangle=\delta(x-x'),$

г) $w(n)=|\langle n|\alpha\rangle|^2=e^{-\bar n}\frac{(\bar n)^n}{n!};\ \bar n=\langle\alpha|\hat a^+\hat a|\alpha\rangle=A^2.$

24. Уравнение (q - заряд, J - ток)
$$\dot q(x)=\frac{\partial J(x)}{\partial x};\quad \dot J(x)=\frac{c}{LC}\,\frac{\partial q(x)}{\partial x}.$$

Гамильтониан
$$H=\sum_x\frac{1}{2}\left(\dot J^2+v_0^2\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2\right),$$
$$J(x)=\sum_k\frac{1}{\sqrt{V\nu_k}}\left(C_k\,e^{i(kx-\nu_k t)}+\text{к.с.}\right),$$
$$\nu_k^2=v_0^2k^2;\quad v_0^2=c/LC.$$

Коммутатор
$$[C_kC_{k'}^+]=\delta_{kk'};\quad H=\sum_k\nu_k(C_k^+C_k+1/2).$$

25.
$$[\mathcal{E}_i(\bar r t);\mathcal{E}_j(\bar r' t)]=[\mathcal{H}_i(\bar r,t)\mathcal{H}_j(\bar r' t)]=0,$$
$$[\mathcal{E}_i(\bar r,t)\mathcal{H}_j(\bar r' t)]=4\pi i\hbar c\,\varepsilon_{ijk}\nabla_k\,\delta(\bar r-\bar r').$$

§ 3. Уравнение Шредингера (одномерный случай)

В этом параграфе $\varkappa=mG/\hbar^2$.

1. $E=-\frac{\hbar^2y^2}{2ma^2}-V$, где $\sin y=\pm\frac{\hbar}{a\sqrt{2mV}}\,y$ или $\cos y=\pm\frac{\hbar}{a\sqrt{2mV}}\,y$ $(\operatorname{tg} y>0)$.

2. После замены $U(x)$ на $G\delta(x)$, где $G=\int_{-\infty}^{\infty}U(x)dx$, условия "сшивания" $\frac{d\psi}{dx}\Big|_{-0}^{0}=\frac{2mG}{\hbar^2}$, $\psi(-0)=\psi(0)$.

3. $E=-\frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m}$, $\psi(x)=\sqrt{\varkappa}\,e^{-\varkappa|x|}$.

4. $\frac{dw}{dp}=\frac{2\hbar^3\varkappa^3}{\pi(\hbar^2\varkappa^2+p^2)^2}$.

5. $|\ell|\le\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{1}{G_1}-\frac{1}{G_2}\right)$.

6. $\ell=\frac{\operatorname{ctg}k_1a}{k_1}-\frac{\operatorname{cth}\varkappa_2a}{\varkappa_2}$, $k_1=\sqrt{2mV_1}$, $\varkappa_2=\sqrt{2mV_2}$.

7. Четное.

8. $E_n=\hbar\omega\left(2n+\frac{3}{2}\right)$, $n=0,1,\dots$.

9. $E_{\pm}=-\frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m}\left(1\pm2e^{-2\varkappa\ell}\right)$, $F=\mp\frac{\hbar^2\varkappa^3}{m}e^{-2\varkappa\ell}$,

$\psi_{\pm}\approx\frac{1}{\sqrt2}(\psi_\Lambda\pm\psi_\Pi)$, $\psi_{\Lambda,\Pi}=\sqrt{\varkappa}\,e^{-\varkappa|x\pm\ell|}$.

10. $\psi(x,t)\approx(\psi_\Lambda\cos\omega t-i\psi_\Pi\sin\omega t)\,e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}$

$\hbar\omega=E_--E_+$, $E_0=\frac{E_-+E_+}{2}$.

11. $\frac{dw}{dp}=\frac{2\varkappa^3\hbar^3}{\pi(\varkappa^2\hbar^2+p^2)^2}\left(1\pm\cos\frac{2p\ell}{\hbar}\right)$.

12. $E = \frac{\hbar^2 z^2}{2ma^2}$, где $z = \varkappa a \, tg\, z$ и $z = \pi(n+\frac{1}{2})$, $n = 1, 2, \dots$

13. $a = \frac{1}{\varkappa}$.

a ⇄ b

14. $E_n^{(\pm)} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi n \hbar}{a}\right)^2\left(1 - \frac{2}{a\varkappa_n} \mp \frac{4}{a\varkappa_n} e^{-\varkappa_n b}\right)$,

$\varkappa_n^2 = \frac{2mV}{\hbar^2} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$ (при $\varkappa_n a, \varkappa_n b >> 1$).

15. $U_{pp'} = -\frac{G}{2\pi\hbar}$

16. См.задачу 9.

17. $E_\pm = -\frac{\hbar^2 \varkappa_\pm^2}{2m}$, $\varkappa_\pm = \frac{1}{2}\left[\varkappa_1 + \varkappa_2 \pm \sqrt{(\varkappa_1 - \varkappa_2)^2 + 4\varkappa_1\varkappa_2 e^{-2\varkappa_\pm \ell}}\right]$,

$\frac{\psi(\ell)}{\psi(0)} = e^{\varkappa_\pm \ell}\left(1 - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_\pm}\right) + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_\pm} e^{-\varkappa_\pm \ell}$, $\varkappa_{1,2} = \frac{m G_{1,2}}{\hbar^2}$.

18. $E = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}\left(1 + 2e^{-4\varkappa \ell}\right)$, $\varkappa = \frac{m}{\hbar^2}\int\limits_{-\ell-a}^{-\ell+a} U(x)\,dx$.

19. $a = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{\varkappa+\alpha}{\varkappa-\alpha}$, $\hbar\alpha = \sqrt{2mV}$.

21. $R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$, $\hbar k_1 = \sqrt{2mE}$, $\hbar k_2 = \sqrt{2m(E-V)}$.

20. $E_n = -\frac{1}{2n^2}\frac{m\alpha^2}{\hbar^2}$, $n = 1, 2, \dots$.

√

22. $\mathcal{D}$ $\cancel{R} = \frac{|E_0|}{|E_0| + E}$, $E_0 = -\frac{mG^2}{2\hbar^2}$.

23. $R = \frac{\sin^2 ka}{\sin^2 ka + 4\frac{E}{V}\left(\frac{E}{V}+1\right)}$.

24. $R = \sin^2(\delta_+ - \delta_-)$.

25. $D^{-1} = 1 + 2\eta^2(1+\eta^2)\left[1 + \cos(2k\ell + \delta)\right]$, $\eta = \frac{\varkappa}{k} = tg\frac{\delta}{2}$.

26. При $k_1^2 = kk_2$, $k_1 a = \pi(n+\frac{1}{2})$, где $\hbar^2k^2 = 2mE$, $\hbar^2 k_{1,2}^2 = 2m(E-V)$.

27. При $t < \ell/v$

$$\psi(x,t) = \begin{cases} e^{i(k_0 x - \omega t)} \int a(k_0+k_1)\, e^{ik_1(x+vt)} dk_1, & \text{при } x<\ell, \\ 0 & \text{при } x>\ell. \end{cases}$$

При $t > \ell/v$

$$\psi(x,t) = \begin{cases} A e^{-i(k_0 x + \omega t)} \int a(k_0+k_1)\, e^{ik_1(x+vt-v\tau)} dk_1 & \text{при } x<\ell, \\ B e^{i(k_0 x - \omega t)} \int a(k_0+k_1)\, e^{ik_1(x-vt+v\tau)} dk_1 & \text{при } x>\ell, \end{cases}$$

$v = \frac{\hbar k}{m}$, $A = \frac{i\varkappa}{k - i\varkappa}$, $B = \frac{k}{k - i\varkappa}$, $\tau = \frac{\varkappa}{v(\varkappa^2+k^2)}$.

28. $\tau = \frac{a}{v} + \hbar\frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{2E+V}{\sqrt{E(V+E)}} \,\mathrm{arctg}\sqrt{2m(E+V)a^2}\right]$.

29. $\frac{\Delta x}{\Delta x_1} = \frac{v}{v_1}$; v, v_1 – скорость пакета до и над барьером.

30. $R = \left|\frac{J_{-1-2ika}(2\alpha a)}{J_{1-2ika}(2\alpha a)}\right|^2$, $\hbar\alpha = \sqrt{2mV}$.

32. $E_n \approx \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi n\hbar}{a}\right)^2\left(1 + \frac{2}{\varkappa a}\right)$, $\Gamma_n \approx \frac{2}{m}\left(\frac{\pi n\hbar}{\varkappa a^2}\right)^2$,

$\Gamma_n \ll E_n$ при $\varkappa a >> 1$.

33. $E_n = \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi n\hbar}{a}\right)^2\left(1 - \frac{2}{a\varkappa_0} + \frac{4}{a\varkappa_0} e^{-\varkappa_0 b}\right)$,

$\Gamma_n = \frac{2\hbar^4}{m^3 V^3}\left(\frac{\pi n\hbar}{a}\right)^3 \frac{\varkappa_0^3}{1+\varkappa_0 a} e^{-2\varkappa_0 b}$,

$\hbar\varkappa_0 = \sqrt{2mV - \left(\frac{\pi n\hbar}{a}\right)^2}$.

34. $E_n \approx \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi n\hbar}{\ell}\right)^2$.

35. $\tau = \frac{2\Gamma\hbar}{\Gamma^2 + 4(E-E_0)^2}$.

36. $E_n = \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi n \hbar}{l}\right)^2$, $\frac{j_+}{j_-} = \frac{G_1^2}{G_2^2}$.

37. $\frac{dW}{dE} = \frac{4\pi m a}{\hbar^2 k} \frac{\sin^2 ka}{\sin^2 ka + (\cos ka + \varepsilon \sin ka)^2} \approx \frac{\Gamma}{\pi[\Gamma^2 + 4(E-E_0)^2]}$,

$E_0 = \frac{\pi \hbar^2}{2ma^2}\left(\pi + \frac{2}{\varepsilon}\right)$, $\Gamma = \frac{2\pi \hbar^2}{m a^3 \varepsilon^2}$, $\varepsilon = \frac{2mG}{\hbar^2 k}$.

38. $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{u^3}{3} - u\xi\right) du$, $\xi = \left(x + \frac{E}{F}\right)\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

39. $W = \frac{4 G_1 G_2}{(G_1 + G_2)^2}$.

40. $\frac{dW}{dE} = \frac{\sqrt{E|E_0|}\,\left(\sqrt{|E_0|} + \sqrt{E}\right)^2}{2\pi\,(|E_0| + E)^3}$, $E_0 = -\frac{\hbar^2 \varkappa^2}{2m}$.

41. $W = \varkappa s \sqrt{\pi}\, e^{-2\varkappa l - \frac{1}{4} s^2 \left(\varkappa^2 - \frac{p^2}{\hbar^2}\right)}$.

42. Указание: перейти в систему координат, движущуюся со скоростью V.

43. $W = \frac{1}{1 + \left(\frac{mV}{2\hbar\varkappa}\right)^2}$.

44. Вправо,

влево.

45. $|\cos k_1 a \cos k_2 l - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2 k_1 k_2} \sin k_1 a \sin k_2 l| \le 1$,

$\hbar k_1 = \sqrt{2mE}$, $\hbar k_2 = \sqrt{2m(E-V)}$.

46. $E(q) = -\frac{\hbar^2 \varkappa^2}{2m}\left(1 + 4e^{-\varkappa a} \cos \frac{qa}{\hbar}\right)$.

47. $j = \rho u$, $\rho = \frac{1}{a}\int_0^a |\psi|^2 dx$, $u = \frac{\partial E}{\partial q}$.

48. $R \overset{\varkappa_1 l \gg 1}{\approx} \frac{(G_1 - G_2)^2}{(G_1 - G_2)^2 + 4 G_1^2 e^{-2\varkappa_0 a} \sin^2 \frac{qa}{\hbar}}$.

49. $E = -\frac{G_1^2}{2}$. $\operatorname{th} \varkappa a = \frac{2\varkappa_0 \varkappa}{\varkappa_0^2 - (\varkappa_1 - \varkappa_0)^2}$

50. $E = -\frac{\hbar^2 \varkappa^2}{2m}\left(1 - 4e^{-2\varkappa l}\right)$.

§ 4. Угловой момент и спин

2. Функция Y_{ll} описывает движение, сосредоточенное вблизи экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$; средний угол между плоскостью орбиты и плоскостью экватора есть $1/\sqrt{2l}$, т.е. при $l \gg 1$ $|Y_{ll}(\theta,\varphi)|^2 \approx \sqrt{\frac{l}{\pi}}\, e^{-l(\theta - \pi/2)^2}$. Функции Y_{l0} отвечают круговые орбиты с осью z в плоскости орбиты и в среднем равновероятным распределением осей в плоскости (x, y); поэтому усредненная по l узлам вероятность $\overline{dw} = \frac{d\theta}{\pi} = \overline{|Y_{l0}|^2}\, do$, т.е. $\overline{|Y_{l0}|^2} = \frac{1}{\pi}\frac{d\theta}{do} = \frac{1}{2\pi^2 \sin\theta}$

Сравните эти результаты с квазиклассическим решением углового уравнения (Квантовая механика, § 49).

3. Вместо трех p – функций $\psi_m^{(p)} \sim Y_{1m}$ возьмем их вещественные комбинации $\psi_{x,y,z}^{(p)}$, ориентированные максимумами вероятности по осям x, y, z соответственно:

$$\psi_z^{(p)} = \psi_0^{(p)}, \quad \psi_x^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1^{(p)} + \psi_{-1}^{(p)}\right), \quad \psi_y^{(p)} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\psi_1^{(p)} - \psi_{-1}^{(p)}\right).$$

Эти три функции преобразуются при вращениях друг через друга как компоненты вектора $\vec{\psi}^{(p)}$. Если $\vec{n}_{1,2,3,4}$ – единичные векторы из начала координат к вершинам тетраэдра, то искомые нормированные линейные комбинации s - и p - орбит с дипольным моментом по направлениям $\vec{n}$ имеют вид ("гибридизация")

$$\psi_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}\left[\psi^{(s)} + \sqrt{3}\, \vec{n}_{1,2,3,4} \cdot \vec{\psi}^{(p)}\right].$$

Найдите угловую зависимость $|\psi|^2$ в гибридных состояниях.

4. Потенциал должен обладать симметрией кристалла, поэтому $U(\vec{r}) = U(r) Y_{00}$ - сферически симметричен. Волновая функция при преобразованиях симметрии должна переходить в себя с точностью до фазы. В данном случае $\psi(\vec{r}) \sim Y_{00}$.

5. Волновые функции могут быть найдены разделением переменных как в декартовых, так и в сферических координатах и имеют соответственно вид $(\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar},\ \xi = \alpha x,\ \eta = \alpha y,\ \zeta = \alpha z,\ \rho = \alpha r)$,

$$\psi_{n_x, n_y, n_z} \sim e^{-\frac{1}{2}\rho^2} H_{n_x}(\xi)\, H_{n_y}(\eta)\, H_{n_z}(\zeta),$$

$$\psi_{n\ell m} \sim e^{-\frac{1}{2}\rho^2} u_{n\ell}(\rho)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi);$$

где H_k - полиномы Эрмита, $u_{n\ell}(\rho)$ выражаются через гипергеометрические функции. Состояния с данным $n = n_x + n_y + n_z$ вырождены, их энергия

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right),$$

а кратность вырождения

$$N_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Для нахождения вероятностей возможных при данных n_x, n_y, n_z значений ℓ, m нужно функции ψ_{n_x, n_y, n_z} разложить по $\psi_{n\ell m}$. При $n_x = 1$, $n_y = 0$, $n_z = 2$ имеем:

$$H_1(\xi) = 2\xi, \qquad H_2(\zeta) = 4\zeta^2 - 2,$$

$$\psi_{n_x, n_y, n_z} = \psi_{1,0,2} = A\left(\varphi_{33-1} - \varphi_{331}\right) + B\left(\varphi_{31-1} - \varphi_{311}\right),$$

где $2|A|^2 + 2|B|^2 = 1$. Воспользовавшись явным видом

$$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{\pm i\varphi},$$

$$Y_{3,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \left(4\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta\right) e^{\pm i\varphi},$$

$$u_{33}(\rho) = \sqrt{\frac{32}{105\pi^{1/2}}}\, \rho^3, \qquad u_{31}(\rho) = \sqrt{\frac{16}{15\pi^{1/2}}} \left(\rho^3 - \frac{5}{2}\rho\right),$$

найдем искомые вероятности $w_{\ell m}$ значений $\ell = 3 (m = \pm 1)$ и $\ell = 1 (m = \pm 1)$

$$|A|^2 = w_{31} = w_{3-1} = \frac{2}{5}, \qquad |B|^2 = w_{11} = w_{1-1} = \frac{1}{10}.$$

В общем случае при фиксированном n возможны значения $\ell = n,\ n-2,\ n-4, \dots, 0$ (или 1 в зависимости от четности n).

6. $[P_i, P_k] = 0; \quad [J_i, P_k] = i\varepsilon_{ik\ell} P_\ell, \quad [J_i, J_k] = i\varepsilon_{ik\ell} J_\ell$

($\varepsilon_{ik\ell}$ - полностью антисимметричный тензор). Здесь и ниже все операторы моментов и их собственные значения выражены в единицах $\hbar$.

7. $e^{-i\alpha J_z} J_y\, e^{i\alpha J_z} = J_y \cos\alpha - J_x \sin\alpha.$

8. Пользуясь результатом задачи 7, представим R в виде $R = e^{-i\theta(\vec{n}\cdot\vec{J})}$, т.е. это поворот на угол θ вокруг оси $\vec{n}$, причем $\vec{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = [\vec{p}\times\vec{p}\,']/p^2\sin\theta$, где $\vec{p}\,'$ - вектор с модулем, равным $|\vec{p}|$, и имеющий полярные координаты θ, φ . Следовательно, R переводит $\vec{p}$ в $\vec{p}\,'$, а спиральность, будучи скаляром по отношению к вращениям, не меняется.

9. $\langle \vec{J}\vec{n} \rangle = \langle JM | J_x \sin\theta\cos\varphi + J_y \sin\theta \sin\varphi + J_z \cos\theta | JM \rangle = M\cos\theta.$

10. Задача сводится к нахождению матрицы унитарного преобразования, связывающего состояния $|JM\rangle$ с определенной проекцией M момента на ось z и состояния $|JM'\rangle'$ с определенной проекцией M' на ось z' , имеющую полярные координаты θ, φ , т.е. к отысканию коэффициентов разложения

$$|JM\rangle = \sum_{M'} D^J_{MM'}(\theta,\varphi)\, |JM'\rangle'.$$

Проще всего найти $D^J_{MM'}$, действуя на обе части оператором $(\vec{J}\cdot\vec{n}_{z'})$ (см. задачу 9), выражая результат в одном и том же базисе и сравнивая коэффициенты. Искомые интенсивности

$w^J_{MM'} = |D^J_{MM'}|^2$ не зависят от угла φ и равны:

$J = 1/2$

$M \backslash M'$	$+1/2$	$-1/2$
$+1/2$	$\cos^2\frac{\theta}{2}$	$\sin^2\frac{\theta}{2}$
$-1/2$	$\sin^2\frac{\theta}{2}$	$\cos^2\frac{\theta}{2}$

$J = 1$

$M \backslash M'$	$+1$	0	-1
$+1$	$\cos^4\frac{\theta}{2}$	$\frac{1}{2}\sin^2\theta$	$\sin^4\frac{\theta}{2}$
0	$\frac{1}{2}\sin^2\theta$	$\cos^2\theta$	$\frac{1}{2}\sin^2\theta$
-1	$\sin^4\frac{\theta}{2}$	$\frac{1}{2}\sin^2\theta$	$\cos^4\frac{\theta}{2}$

II. Искомая вероятность $w(M') = \frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{J+M'}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{J-M'}$

(воспользоваться представлением системы с моментом J как состоящей из $2J$ частиц спина I/2 и применить результаты задачи I0 для спина I/2).

I3. Оператор спинового обмена

$$\mathcal{P}_\sigma = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2\right),$$

где $\vec{\sigma}_{1,2}$ – матрицы Паули, относящиеся соответственно к первой и второй частицам; проекционные операторы

$$\Lambda_s = \frac{1 - \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2}{4}, \qquad \Lambda_t = \frac{3 + \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2}{4}.$$

Собственные значения операторов в синглетном (полный спин $S = 0$) и триплетном ($S = 1$) состояниях равны

	$\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$	$\mathcal{P}_\sigma$	Λ_s	Λ_t
$S = 0$	-3	-1	1	0
$S = 1$	$+1$	$+1$	0	1

I4. Удобно ввести оператор

$$S_{12} = 3(\vec{\sigma}_1\vec{n})(\vec{\sigma}_2\vec{n}) - \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2, \qquad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r},$$

который выражается через $\vec{S}$ посредством

$$S_{12} = 6(\vec{S}\vec{n})^2 - 2\vec{S}^2.$$

Утверждение задачи следует из тождеств

$$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)^2 = 3 - 2\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2,$$

$$S_{12}^2 = 6 - 2S_{12} + 2\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2,$$

$$S_{12}\,\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 = \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2\,S_{12} = S_{12},$$

откуда вытекает, что достаточно ограничиться выражениями, линейными по $\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$ и S_{12} .

I5. Оператор поворота есть

$$U_{\vec{n}}(\alpha) = e^{-i\alpha\left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{n}\right)} = \cos\frac{\alpha}{2} - i(\vec{\sigma}\vec{n})\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Два указанных поворота некоммутативны, если оси $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не совпадают,

$$\left[U_{\vec{n}_1}(\alpha_1),\ U_{\vec{n}_2}(\alpha_2)\right] = 2i\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\left[\vec{n}_1\times\vec{n}_2\right]\cdot\vec{\sigma}.$$

I6. Наиболее общий вид нормированной спиновой функции частицы со спином I/2 есть

$$\psi = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\frac{\gamma}{2} \\ e^{i\beta}\sin\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}.$$

Среднее значение спина в этом состоянии

$$\langle\vec{s}\rangle = \frac{1}{2}\vec{n},$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, имеющий полярные координаты $\theta = \gamma$, $\varphi = \beta - \alpha$. Следовательно, $\langle\vec{s}\cdot\vec{n}\rangle = \frac{1}{2}$, т.е. частица поляризована в направлении $\vec{n}$.

I7. Волновые функции ψ_{nljm} с $j = l \pm 1/2$ имеют вид

$$\psi_{n,l,l\pm\frac{1}{2},m} = R_{nl}(r)\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l \pm m + 1/2}{2l+1}}\,Y_{l\,m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \\ \pm\sqrt{\frac{l \mp m + 1/2}{2l+1}}\,Y_{l\,m+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix},$$

коэффициенты (совпадающие с коэффициентами Клебша-Гордана $C^{l\pm 1/2\ m}_{l\ m\mp 1/2\ \ 1/2\ \pm 1/2}$) находятся с помощью повышающих и понижающих операторов момента. Отсюда искомые вероятности

$$w_{j=l\pm 1/2}\left(l_z=m-\tfrac{1}{2},\ s_z=\tfrac{1}{2}\right)=\frac{l\pm m+1/2}{2l+1},$$

$$w_{j=l\pm 1/2}\left(l_z=m+\tfrac{1}{2},\ s_z=-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{l\mp m+1/2}{2l+1},$$

средние значения равны

	$\langle l_z\rangle$	$\langle s_z\rangle$	$\langle j_z\rangle$
$j=l+1/2$	$m\dfrac{2l}{2l+1}$	$\dfrac{m}{2l+1}$	m
$j=l-1/2$	$m\dfrac{2l+2}{2l+1}$	$-\dfrac{m}{2l+1}$	m

18. Если (θ,φ) – сферические координаты частицы, то

$$\varphi_0=\varphi,\quad \operatorname{ctg}\frac{\theta_0}{2}=\pm\sqrt{\frac{l\pm m+1/2}{l\mp m+1/2}}\ \frac{P_l^{m-1/2}(\cos\theta)}{P_l^{m+1/2}(\cos\theta)},$$

где $P_l^m(\cos\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра (сферические функции $Y_{lm}(\theta,\varphi)\sim P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$) , а знаки $\pm$ относятся к значениям $j=l\pm 1/2$ соответственно.(Использовать результаты задач 16 и 17).

19.

$$Y_{l_1m_1}(\vec n)Y_{l_2m_2}(\vec n)=\sum_{lm}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}{4\pi}}\,(-1)^m\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l\\ m_1 & m_2 & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Y_{lm}(\vec n),$$

где $3j$-символы связаны с коэффициентами Клебша-Гордана посредством $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2j_3+1}}(-1)^{j_1-j_2-m_3}C^{j_3m_3}_{j_1m_1\,j_2m_2}$.

(Первый символ находится из геометрических соображений, второй – из сравнения значений обеих частей при $\vec n$, направленных по оси z , с учетом равенства $Y_{lm}(\vec z^{\,0})=\delta_{m0}\sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi}}$ и ортогональности коэффициентов Клебша-Гордана).

20. Связать со свойствами векторного произведения $\vec a=[\vec b\times\vec c]$, которое в сферических компонентах векторов

$$a_1=\frac{1}{\sqrt2}(a_x-ia_y),\quad a_{-1}=-\frac{1}{\sqrt2}(a_x+ia_y),\quad a_0=a_z$$

записывается как $(\mu,\lambda,\lambda'=0,\pm1)$

$$a_\mu=i\sqrt6\sum_{\lambda\lambda'}(-1)^\mu\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ -\mu & \lambda & \lambda'\end{pmatrix}b_\lambda c_{\lambda'}.$$

21. Если ввести оператор $A=\vec J_1\vec J_2$ скалярного произведения моментов подсистем, то его собственные функции суть состояния с определенным значением j полного момента $\vec J=\vec J_1+\vec J_2$, а собственные значения

$$A_j=\frac12\left[j(j+1)-j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)\right].$$

Тогда искомый проекционный оператор есть

$$\Lambda_j=\prod_{k\neq j}\frac{A-A_k}{A_j-A_k},$$

его матричные элементы

$$\left\langle \Phi^{(1)}_{j_1m_1'}\Phi^{(2)}_{j_2m_2'}\right|\Lambda_j\left|\Phi^{(1)}_{j_1m_1}\Phi^{(2)}_{j_2m_2}\right\rangle=C^{j\,m_1'+m_2'}_{j_1m_1'\,j_2m_2'}\,C^{j\,m_1+m_2}_{j_1m_1\,j_2m_2}\,\delta_{m_1'+m_2',\,m_1+m_2}.$$

22. Гамильтониан имеет вид $(\mathcal H=\mathcal H_z,\ \vec S=\vec s_1+\vec s_2)$,

$$H=K\vec s_1\vec s_2-(g_1\vec s_1+g_2\vec s_2)\cdot\vec{\mathcal H}=$$

$$=\frac{K}{4}(2\vec S^2-3)-\frac{g_1+g_2}{2}\mathcal H S_z-\frac{g_1-g_2}{2}\mathcal H(s_{1z}-s_{2z}),$$

S_z является интегралом движения. Состояния $S=1,\ S_z=\pm1$ имеют энергии

$$E(S_z=\pm1)=\frac{K}{4}\mp\frac{g_1+g_2}{2}\mathcal H,$$

состояния с $S_z=0$ суть суперпозиции $S=0$ и $S=1$, их энергии

$$E_\pm(S_z=0)=-\frac{K}{4}\pm\frac12\sqrt{K^2+(g_1-g_2)^2\mathcal H^2}.$$

При $\mathcal H=0$ $E_+(S_z=0)=\frac{K}{4}$, это состояние вместе с $S_z=\pm1$ образует вырожденный триплет $S=1$, а $E_-(S_z=0)=-\frac34K$ отвечает синглету $S=0$.

23. Удобно ввести оператор P_{12} обмена спинов 1 и 2 (см.задачу 13), который обладает свойствами $P_{12}(\uparrow_1\uparrow_2)=\uparrow_1\uparrow_2$, $P_{12}(\uparrow_1\downarrow_2)=\downarrow_1\uparrow_2$.

Тогда гамильтониан системы $H = -\frac{K}{2}\sum_{n=1}^{N} \mathcal{P}_{n,n+1} + const$, где спины I и (N + I) отождествлены. В основном состоянии Φ_0 все спины параллельны, $\mathcal{P}_{n,n+1}\Phi_0 = \Phi_0$, $H\Phi_0 = E_0\Phi_0$. Ищем возбужденные состояния Φ_1, где перевернут один спин, в виде суперпозиции

$$\Phi_1 = \sum_n c_n |n\rangle ,$$

$|n\rangle$ – состояние ($\uparrow_1 \uparrow_2 \dots \uparrow_{n-1} \downarrow_n \uparrow_{n+1} \dots \uparrow_N$). Коэффициенты c_n удовлетворяют уравнению

$$(E - E_0 - K)c_n = -\frac{K}{2}(c_{n+1} + c_{n-1}).$$

Решение имеет вид $c_n = e^{iqn}$, где в силу граничных условий $q = \frac{2\pi}{N} m$ $(m = 0, 1, \dots, N-1)$. Энергии этих N возбужденных состояний (спиновые волны, или магноны) равны

$$E(q) = E_0 + K(1 - \cos q),$$

энергия возбуждения обращается в нуль $\sim q^2$ в пределе длинных волн (следствие короткодействующих сил). Заметьте, что в присутствии внешнего магнитного поля $\mathcal{H} = \mathcal{H}_z$ энергия спиновой волны в длинноволновом пределе имела бы конечное значение $2\mu\mathcal{H}$ (μ – магнитный момент спина).

25. Воспользоваться тождеством, справедливым для любого векторного оператора $\vec{V}$,

$$[\vec{J}^2, [\vec{J}^2, \vec{V}]] = 2(\vec{J}^2\vec{V} + \vec{V}\vec{J}^2) - 4(\vec{V}\vec{J})\vec{J}.$$

26. Использовать решения задач 24 и 25.

27. Вектор Рунге-Ленца

$$\vec{A} = \alpha\sqrt{m}\,\frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{2\sqrt{m}}\left([\vec{\ell}\times\vec{p}] - [\vec{p}\times\vec{\ell}]\right), \quad \alpha = \frac{Ze^2}{\hbar}$$

удовлетворяет соотношениям коммутации

$$[\vec{A}, H] = 0,$$

$$[A_i, A_j] = -2i\varepsilon_{ijk} H\ell_k, \qquad [\ell_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk} A_k$$

и имеет правило отбора $\Delta\ell = \pm 1$.

В подпространстве вырожденных состояний с отрицательной энергией E введем оператор $\vec{q} = \vec{A}/\sqrt{-2E}$, тогда $\vec{\ell}$ и $\vec{q}$ не выводят за пределы этого подпространства; кроме того, $\vec{\ell}\vec{q} = \vec{q}\,\vec{\ell} = 0$, а из определения $\vec{A}$

$$\vec{\ell}^2 + \vec{q}^2 = \frac{\alpha^2 m}{-2E} - 1.$$

Два новых вектора $\vec{T}^{(1)} = \frac{1}{2}(\vec{\ell} + \vec{q})$ и $\vec{T}^{(2)} = \frac{1}{2}(\vec{\ell} - \vec{q})$ коммутируют между собой и обладают свойствами моментов

$$[T_i^{(1)}, T_j^{(2)}] = 0, \quad [T_i^{(1)}, T_j^{(1)}] = i\varepsilon_{ijk} T_k^{(1)}, \quad [T_i^{(2)}, T_j^{(2)}] = i\varepsilon_{ijk} T_k^{(2)}.$$

Их собственные значения равны $t_{1,2}(t_{1,2}+1)$, $t_{1,2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$, а в силу $\vec{\ell}\vec{q} = 0$ они равны между собой: $t_1 = t_2 = t$,

$$\vec{T}^{(1)2} = \vec{T}^{(2)2} = \frac{\vec{\ell}^2 + \vec{q}^2}{4} = t(t+1),$$

т.е. энергия

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(\vec{\ell}^2 + \vec{q}^2 + 1)} = -\frac{m\alpha^2}{2(2t+1)^2}.$$

Это – водородный спектр с главным квантовым числом $n = 2t + 1$; кратность вырождения равна

$$(2t_1 + 1)(2t_2 + 1) = (2t+1)^2 = n^2.$$

28. $\mu_d = \mu_p + \mu_n - \frac{3}{2} w_D(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2})$, откуда вес D – волны $w_D \approx 4\%$. (В пренебрежении разностью масс нейтрона и протона оператор $\vec{\mu}_1 = \frac{1}{2}\vec{L} + 2\mu_p\vec{s}_p + 2\mu_n\vec{s}_n$, наблюдаемый магнитный момент μ_d есть среднее значение z – проекции оператора $\vec{\mu}_d$ в состоянии с максимальной проекцией полного момента $J_z = J = $ I. Перекрестные матричные элементы $\langle {}^3S_1 | \vec{\mu}_d | {}^3D_1 \rangle$ равны нулю).

29. Оператор $\vec{\mu}$ магнитного момента составной системы есть

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = g_1\vec{J}_1 + g_2\vec{J}_2,$$

где g_1 и g_2 – гиромагнитные отношения для подсистем.
Внутри мультиплета с фиксированными значениями $\vec{J}_1^{\,2}$, $\vec{J}_2^{\,2}$ и $\vec{J}^{\,2}$ ($\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$) этот оператор, в соответствии с векторной моделью (задача 26), сводится к $\vec{\mu} = g\vec{J}$, где

$$g = \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{g_1 - g_2}{2}\,\frac{J_1(J_1+1) - J_2(J_2+1)}{J(J+1)}.$$

В ядре с одним валентным нуклоном $\vec{J}_1 = \vec{l}$, $\vec{J}_2 = \vec{s}$, а гиромагнитные отношения для протона и нейтрона равны (в ядерных магнетонах)

$$g_l^{(p)} = 1, \quad g_l^{(n)} = 0, \quad g_s^{(p)} = 5{,}58, \quad g_s^{(n)} = -3{,}82.$$

Отсюда для ${}^{17}_{8}O_9$ магнитный момент равен – I,9I я.м. (экспериментальное значение – I,89).

30. Магнитное поле создается как орбитальным движением электрона, так и его спином:

$$\vec{\mathcal{H}}(0) = \frac{e\hbar}{mc}\left[\frac{\vec{l}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{s}\vec{r}) - \vec{s}r^2}{r^5}\right],$$

а усреднение в смысле векторной модели (задача 26) дает

$$\langle \vec{l} - \vec{s} + 3\vec{n}(\vec{s}\vec{n})\rangle = \frac{l(l+1)}{j(j+1)}\langle \vec{j}\rangle, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

32. Правила отбора по моменту J и по проекции M имеют вид:

$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} \longrightarrow \Delta J = 0, \Delta M = 0$ (скаляр, след тензора);

$$\left.\begin{aligned} 2Q_{zz} - Q_{xx} - Q_{yy} &\longrightarrow \Delta M = 0, \\ Q_{xz} \pm iQ_{yz} &\longrightarrow \Delta M = \pm 1, \\ Q_{xx} - Q_{yy} \pm 2iQ_{xy} &\longrightarrow \Delta M = \pm 2 \end{aligned}\right\} \Delta J = 0, \pm 1, \pm 2 \text{ (квадруполь).}$$

Для координатного квадруполя $\left(Q_{ik} = x_i x_k - \frac{1}{3}r^2\delta_{ik}\right)$ есть дополнительное правило отбора по четности: Δl – четно.

33. $(Q_{ik})_J = \frac{3}{2}\frac{Q_J}{J(2J-1)}\left(J_iJ_k + J_kJ_i - \frac{2}{3}\vec{J}^{\,2}\delta_{ik}\right)$, где Q_J – наблюдаемый средний квадрупольный момент,

$$Q_J = \langle J, J_z = J | Q_{zz} | J, J_z = J\rangle.$$

34. а) $\delta E_F(J, I) = \frac{A}{2}\left[F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)\right] \equiv \frac{AC}{2}$, где

$A = -g_I\beta_J$, g_I – гиромагнитное отношение ядра, β_J – коэффициент пропорциональности между магнитным полем $\vec{\mathcal{H}}(0)$ электронов в центре ядра и моментом $\vec{J}$, $\vec{\mathcal{H}}(0) = -\beta_J\vec{J}$ (для одного валентного электрона эта величина вычислена в задаче 30).

б) $$\delta E_F(J, I) = \frac{1}{4}\varphi_J''\,Q_I\,\frac{\frac{3}{2}C(C+1) - 2I(I+1)J(J+1)}{J(2J-1)\,I(2I-1)},$$

где величина C определена в пункте а), φ_J'' дает среднее значение градиента электрического поля электронов на ядре в состоянии $J, J_z = J$: $\varphi_J'' = \langle JJ | (\partial^2\varphi/\partial z^2)_0 | JJ\rangle$, Q_I – средний квадрупольный момент ядра (см. задачу 33); для одного валентного электрона $\varphi_j'' = -e\,\frac{2j-1}{2j+2}\left\langle \frac{1}{r^3}\right\rangle_{nl}$.

35. Первое слагаемое в фигурных скобках отвечает ${}^3S_1$ – вкладу ($L = 0$, $S = J = 1$), а второе – ${}^3D_1$, так как сводится к $S_{12}'\chi_{1m}$, где оператор S_{12}' определен в решении задачи I4; в силу скалярности S_{12}' полный момент произведения $S_{12}'\chi_{1m}$ равен моменту χ, т.е. $J = 1$, а так как $\nabla^2(r^2 S_{12}'\chi_{1m}) = 0$, то $S_{12}'\chi_{1m}$ как функция координат есть суперпозиция сферических гармоник $Y_{2\mu}$, т.е. отвечает $L = 2$, как и должно быть. (Проверьте нормировку).

Функции u_0 и u_2 удовлетворяют связанной (в силу нецентральности сил L не сохраняется) системе уравнений

$$\frac{d^2u_0}{dr^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\left\{\left[A(r) + \frac{B(r)}{4} + \frac{C(r)}{12} - E\right]u_0 + \frac{C(r)}{3\sqrt{2}}u_2\right\} = 0,$$

$$\frac{d^2u_2}{dr^2} - \frac{6}{r^2}u_2 - \frac{2m}{\hbar^2}\left\{\left[A(r) + \frac{B(r)}{4} - \frac{C(r)}{12} - E\right]u_2 - \frac{C(r)}{3\sqrt{2}}u_0\right\} = 0,$$

где m – приведенная масса протона и нейтрона $\left(\approx \frac{M_p}{2}\right)$.

36. Рассмотреть а) уравнения движения для спина

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{g}{\hbar}\left[\vec{s}\times\vec{\mathcal{H}}\right],$$

g – гиромагнитное отношение; б) уравнение Шредингера, которое дает энергии стационарных состояний $\left(s_z = \pm\frac{1}{2}\right)$, равные $E_\pm = \mp\frac{1}{2}g\mathcal{H} = \pm\frac{1}{2}\hbar\Omega$, где $\vec{\Omega} = -\frac{g}{\hbar}\vec{\mathcal{H}}$ – вектор угловой частоты прецессии. Зависящая от времени спиновая волновая функция имеет вид

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_+ t} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_- t + i\varphi} \end{pmatrix},$$

где θ,φ – полярные координаты вектора $\vec{n}$ (начальная поляризация) – см. задачу I6. Зависимость от времени средних значений:

$$\langle s_x(t)\rangle = \tfrac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos(\varphi+\Omega t),$$

$$\langle s_y(t)\rangle = \tfrac{1}{2}\sin\theta\cdot\sin(\varphi+\Omega t),$$

$$\langle s_z(t)\rangle = \tfrac{1}{2}\cos\theta.$$

37. $$\langle s_x(t)\rangle = \tfrac{1}{2}\sin\theta_0\cos\left(\varphi_0 + \int_0^t\Omega(t)dt\right),$$

$$\langle s_y(t)\rangle = \tfrac{1}{2}\sin\theta_0\sin\left(\varphi_0 + \int_0^t\Omega(t)dt\right),$$

$$\langle s_z(t)\rangle = \tfrac{1}{2}\cos\theta_0 = \mathrm{const},$$

где (θ_0, φ_0) – углы вектора поляризации при $t=0$, $\Omega(t) = -\frac{g}{\hbar}\mathcal{H}_z(t)$. Направление поляризации описывает коническую поверхность

$$\theta(t) = \theta_0,\quad \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t\Omega(t)dt.$$

38. Вероятность найти перевернутый спин равна

$$w(t) = (\nu\tau)^2\sin^2 t/\tau,$$

где $\nu = \frac{1}{2}\frac{g}{\hbar}\mathcal{H}'$, $\frac{2}{\tau} = \sqrt{(\Omega-\omega)^2+4\nu^2}$, $\Omega = -\frac{g}{\hbar}\mathcal{H}$.

Эта вероятность осциллирует с частотой $2/\tau$, максимум вероятности в резонансе $(\omega=\Omega)$ равен единице; частота осцилляций уменьшается, а острота резонанса растет с уменьшением амплитуды переменного поля $\mathcal{H}'$.

§ 5. Уравнение Шредингера (трехмерный случай)

I. $$R_{n\ell} = C e^{-\rho/2}\rho^{\alpha-1/2}F(-n,1,2\alpha;\rho),$$

$$\rho = \frac{\sqrt{2mB}}{\hbar}r,\quad \alpha = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{(2\ell+1)^2+\frac{8mA}{\hbar^2}},$$

$$E_{n\ell} = \hbar\sqrt{\frac{B}{2m}}\left[4n+2+\sqrt{(2\ell+1)^2+\frac{8mA}{\hbar^2}}\right].$$

2. $$\psi = j_\ell(kr)Y_{\ell m}(\theta,\varphi),\quad E_n = \frac{\beta_n\hbar^2}{2ma^2}$$

n	1	2	3	4	5	6
β_n	3,1	4,5	5,3	6,3	6,4	7,2
n_r	1	1	1	2	1	2
ℓ	0	1	2	0	3	1

3. $$\psi = C\,J_q\left(\frac{\sqrt{8mV}a}{\hbar}e^{-r/a}\right),$$

$$q = \frac{a\sqrt{8m|E|}}{\hbar},$$

$$V = 36\ \text{Мэв}.$$

4. $$E_{n\ell} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\left[n - \cancel{\frac{m\beta}{\hbar^2(\ell+1/2)}}\,\Delta_\ell\right]^{-2}.$$

$$\Delta_\ell = \ell - \tilde{\ell} = \ell+\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2m\beta}{\hbar^2}}$$

5. $$\varphi = e\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

7. $$w_\rho = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{(1+\rho^2)^4}.$$

8. $$H = -\frac{2\frac{e\hbar}{mc}\left(\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^3}{n^3(\ell+\frac{1}{2})j(j+1)}.$$

10. $$\psi_{nmp_z}(\rho,\varphi,z) = \exp\left(im\varphi + ip_z z/\hbar - \rho^2/4a^2\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|}\Phi\left(-n-\frac{e}{2|e|}m-\frac{1}{2}|m|,\ |m|+1;\ \frac{\rho^2}{2a^2}\right),$$
$$a = \hbar c/e\mathcal{H}, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

11. $$\hat{y}_0 = y - c/e\mathcal{H}\,(p_x - e/c\,A_x),$$
$$\hat{x}_0 = x + c/e\mathcal{H}\,(p_y - e/c\,A_y),$$
$$\hat{\rho}_0^2 = \hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2, \quad \hat{\rho}^2 = (x-\hat{x}_0)^2 + (y-\hat{y}_0)^2.$$

12. $$E_{np_yp_z} = \hbar\omega_c(n+1/2) + p_z^2/2m - cp_y\mathcal{E}/\mathcal{H} - mc^2\mathcal{E}^2/2\mathcal{H}^2,$$
$$\psi_{np_yp_z}(x,y,z) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z) - \frac{m\omega_c}{2\hbar}\left(x - \frac{p_y}{m\omega_c} - \frac{e\mathcal{E}}{m\omega_c^2}\right)^2\right]\times$$
$$\times H_n\left[\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}\left(x - \frac{p_y}{m\omega_c} - \frac{e\mathcal{E}}{m\omega_c^2}\right)\right], \quad \omega_c = \frac{e\mathcal{H}}{mc}.$$

13. $$\psi_{nm}(\rho,\varphi) = \exp\left(im\varphi - \rho^2/2b^2\right)\times(\rho/b)^{|m|}\,\Phi(-n, |m|+1; \rho^2/b^2),$$
$$E_{nm} = (2n+|m|+1)\hbar(\omega_0^2+\omega_L^2)^{1/2} - \frac{e}{|e|}m\hbar\omega_L,$$
$$b = \frac{\hbar}{\mu(\omega_0^2+\omega_L^2)^{1/2}}, \quad \omega_L = \frac{e\mathcal{H}}{2\mu c}.$$

14. $$E_{nmk} = (2n+|m|+1)\hbar\sqrt{\omega_L^2+\omega_0^2} + m\hbar\omega_L + (k+1/2)\hbar\omega_0,$$
$$\omega_L = \frac{e\mathcal{H}}{2\mu c}.$$

15. $$E_{n\ell} = 2(n+\ell+1)^2 - \frac{1}{2}.$$

§ 6. Приближенные методы

1. $$E_n = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2}) - \frac{15}{4}\frac{\alpha^2\hbar^2}{m^3\omega^4}\left(n^2+n+\frac{11}{30}\right) + \frac{3}{2}\beta\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right).$$

Частота классического осциллятора $\Omega = \frac{\partial E_n}{\partial(n\hbar)} = \omega + a^2\left[-\frac{15}{4}\frac{\alpha^2}{m^2\omega^3} + \frac{3}{2}\frac{\beta}{m\omega}\right]$, где $\frac{1}{2}m\omega^2a^2 = n\hbar\omega$.

2. а) $\Delta E = \frac{2}{3}\frac{Z^4e^2}{a_Б}\left(\frac{R}{a_Б}\right)^2$; б) $\Delta E = \frac{2}{5}\frac{Z^4e^2}{a_Б}\left(\frac{R}{a_Б}\right)^2$.

Для атома водорода $\Delta E/E \sim 10^{-10}$.

Для $2p$ состояния ΔE уменьшится в $(ZR/a_Б)^2$ раз.

3. $E^{(0)}_{n_xn_y} = \hbar\omega(2n_x+n_y+\tfrac{3}{2})$. Два нижних уровня не вырождены и для них $E^{(1)} = 0$. Третий уровень дважды вырожден $E^{(0)}_{1,0} = E^{(0)}_{0,2}$, и для него $E^{(1)} = \mp\frac{\sqrt{2}}{4}\alpha(\hbar/m\omega)^{3/2}$.

4. $E^{(0)}_{n_x,n_y,n_z} = \hbar\omega(2n_x+n_y+n_z+2)$. Для двух нижних уровней $E^{(1)} = 0$, для 3 и 4 уровня $E^{(1)} = 0; \mp\sqrt{2}P$ и $E^{(1)} = 0; \mp 2P$ соответственно, где $P = \frac{1}{4}\beta(\hbar/m\omega)^{3/2}$. Отсюда $\beta \sim 0{,}6\cdot 10^{-2}$ от. ед. Подробнее см. задачу 32, § 7 и Э.Ферми, Избранные научные труды, т.I, стр. 440.

5. $$E_m = \frac{\hbar^2m^2}{2I} + \frac{\mathcal{E}^2Id^2}{(4m^2-1)\hbar^2}; \quad \alpha = \frac{2\mathcal{E}Id^2}{(4m^2-1)\hbar^2}.$$

6. $$E = E_{IM} + \Delta E; \quad E_{IM} = [I(I+1) - 3M^2]\cdot\frac{Q}{4I(2I-1)}\cdot\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial z};$$

$\Delta E = -g\hbar M \mathcal{H}\cos\alpha$ при $M \neq \pm\frac{1}{2}$ и $\Delta E = \pm\frac{1}{2}g\hbar\mathcal{H}\sqrt{1+4I(I+1)\sin^2\alpha}$ при $|M| = \frac{1}{2}$ и полуцелом I.

7. $$W_{0\to1} = \frac{\pi e^2 \mathcal{E}_0^2 \tau^2}{2m\hbar\omega} e^{-\frac{1}{2}(\omega\tau)^2}.$$

8. $$\frac{d^3W}{d^3p} = \frac{2^9}{\pi^2}\frac{(e\tau\,\vec{\mathcal{E}}_0\vec{p})^2}{\hbar^2(1+\omega^2\tau^2)^2}\frac{a_Б^3}{\left[1+\left(\frac{p a_Б}{\hbar}\right)^2\right]^6}.$$

9. $W = \frac{256}{3}\frac{a_Б^3\mathcal{E}_0^2}{\hbar}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^6\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0}-1\right)^{3/2}$, где $\hbar\omega_0 = \frac{e^2}{2a_Б}$.

10. а) $E_n = \varepsilon_0\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2/3}$, где $\varepsilon_0 = \left(\frac{3\alpha\pi\hbar}{4\sqrt{2m}}\right)^{2/3}$;

б) нечетные уровни пункта а), т.е. $E_n = 2^{3/2}\varepsilon_0\cdot\left(n+\frac{3}{4}\right)^{2/3}$.

11. $E_{n+1} - E_n = \hbar\omega_{клас.}$, где $\frac{2\pi}{\omega_{клас.}} = \oint\frac{\sqrt{m}\,dx}{\sqrt{2[E-U(x)]}}$.

12. $E_{n_r,l+1} - E_{n_r,l} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\hbar\omega_{клас.}$, где

$\frac{2\pi}{\omega_{клас.}} = \oint\frac{m\,dr}{p_r}$, $\Delta\varphi = \int\frac{\hbar(l+\frac{1}{2})\,dr}{r^2 p_r}$, $p_r = \sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{\hbar^2(l+\frac{1}{2})^2}{2mr^2}}$

($\Delta\varphi$ в классической механике имеет смысл угла поворота радиуса-вектора частицы за одно радиальное колебание).

13. $$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,|a^2-x^2|^{1/4}}\cdot\begin{cases}\sin\varphi & \text{при } 0<x<a,\\ \frac{1}{2}e^{-\alpha} & \text{при } x>a,\end{cases}$$

где $\varphi = \frac{\pi}{2}(n+1) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \arcsin\frac{x}{a}\right)$,

$\alpha = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} - \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)\right]$,

$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}m\omega^2a^2$, $\psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x)$;

$$\left(\frac{dW}{dx}\right)_{кван.} = |\psi_n(x)|^2;\quad \left(\frac{dW}{dx}\right)_{клас.} = \begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} & \text{при } |x|<a,\\ 0 & \text{при } |x|>a.\end{cases}$$

14. $\psi_{n,l,0} = \frac{1}{r}\chi_{nl}(r)Y_{l0}(\theta,\varphi)$; $Y_{l0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sin\theta)^{1/2}}\sin\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]$;

$$\chi_{nl}(r) = \sqrt{\frac{2m\omega_{клас}}{\pi p_r}}\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{r_1}^{r}p_r\,dr + \frac{\pi}{4}\right),$$

где $p_r = \sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{\hbar^2(l+\frac{1}{2})^2}{2mr^2}}$, а r_1 – меньший корень уравнения $p_r(r) = 0$;

область применимости $\theta l \gg 1$; $(\pi-\theta)l \gg 1$ и $\left|\frac{d(\hbar/p_r)}{dr}\right| \ll 1$.

15. $\delta E = \langle\psi_n|\delta U|\psi_n\rangle$, в квазиклассическом пределе $\delta E = \langle\delta U\rangle_t \equiv \frac{1}{T_{клас.}}\oint\delta U(x(t))\,dt$ – среднее за период движения значение δU, а $x(t)$ – классическая траектория.

16. $t_{зад.} = \int_{-\infty}^{t}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}\right)dx$, где $v = \sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}$, $v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

17. $\tau \sim \frac{a}{v}\exp\left\{\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_{max}-E)}\cdot(b-a)\right\} \sim 10^{11}$ лет.

18. Время жизни $\tau \approx \frac{2a}{v}\exp\left[\frac{\pi\alpha\sqrt{2m}}{\hbar\sqrt{E}}\right]$, отсюда

$A = \lg\frac{2a\ln 2}{v}$; $B = \frac{\pi}{\hbar}(\lg e)\alpha\sqrt{2m}$; $E = \frac{1}{2}mv^2$.

19. $D = \exp\left[-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{e\mathcal{E}\hbar}|E|^{3/2}\right] \sim 10^{-84}$; $j = envD \sim 10^{-64}$ а/см^2

при $n \sim 10^{22}$ см$^{-3}$ и $v \sim 10^8$ см/сек.

20. $$\langle T\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\int\left(\frac{d\psi_n}{dx}\right)^2dx = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{dE_n}{dn}.$$

21. Энергетический спектр $E_n = E_n^{(0)} + \Delta E_n$, где $E_n^{(0)}$ – уровни энергии одной ямы, а) $\Delta E_n = \pm\frac{\hbar\omega_{клас}}{2\pi}\sqrt{D}$ и

$\frac{2\pi}{\omega_{клас.}} = 2m\int_a^b\frac{dx}{p(x)}$;

б) для оценки величины $U-E$ примем $\hbar\omega_{клас} \sim \sqrt{m_e/M_p}$, $a \sim 1$, тогда $U-E \sim 1$ (в атомных единицах);

в) $\tau = \dfrac{\pi^2}{\omega_{клас}\sqrt{D}} = \dfrac{\pi\hbar}{2|\Delta E_n|}$.

22. а) Положение квазиуровня определяется из условия

$$2\int_{-a}^{a} p\,dx = 2\pi\hbar\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

, а его ширина $\Gamma = \dfrac{\hbar\omega_{клас}}{2\pi}\exp\left[-\dfrac{2}{\hbar}\int_a^b |p|\,dx\right]$,

где $p=\sqrt{2m[E-U(x)]}$, $\dfrac{2\pi}{\omega_{клас}} = 2m\int_{-a}^{a}\dfrac{dx}{p}$. Вблизи квазиуровня $D(E_n+\Delta E) = \dfrac{\Gamma^2}{\Gamma^2+(\Delta E)^2}$;

б) уменьшится вдвое.

23. Зависимость $\Delta E \backsim \sqrt{D}$; $\Gamma = \hbar/\tau \backsim D$. Второй результат можно получить из оценки: если вероятность частицы пройти под барьером D, то частица уйдет из ямы за время $\tau \sim 1/D\omega$, где ω – частота колебаний в яме. Первый результат очевиден из теории возмущения с двукратно вырожденным уровнем $|V_{ik} - \Delta E\delta_{ik}| = 0$. Так как $V_{11} \sim V_{22} \backsim e^{-2a|k|}$, а $V_{12} \sim V_{21} \backsim e^{-a|k|}$, то $V_{11} \sim V_{22} \ll |V_{12}| \sim |V_{21}|$ и $\Delta E \sim |V_{12}| \backsim \sqrt{D}$.

24. $E_0 = \dfrac{9}{2\sqrt[3]{6}}\left(\dfrac{c^2\hbar^2}{2m}\right)^{1/3} \simeq 2{,}48\left(\dfrac{c^2\hbar^2}{2m}\right)^{1/3}$,

точность приближения $\sim 6\%$.

25. $E_0 = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\alpha_0}{2a}\right)^2 - V\left(\dfrac{\alpha_0}{1+\alpha_0}\right)^3$, где α_0 – корень уравнения $\dfrac{(1+\alpha)^4}{\alpha} = \dfrac{12Vma^2}{\hbar^2}$, соответствующий минимуму функции $E_0(\alpha)$. Численное решение $\alpha_0 = 1{,}34$; $E_0 = -2{,}14$ Мэв.

§ 7. Атом, молекула

1. а) $\Delta E \sim \mu_Б^2/a_Б^3 \sim \alpha^2 E_{am} \sim 10^{-4}\, me^4/\hbar^2$,

б) $\Delta E \sim \left(\dfrac{p}{mc}\right)^2 E_{am} \sim \alpha^2\dfrac{me^4}{\hbar^2}$,

в) $\Delta E \sim \dfrac{\mu_Б\mu_Я}{a_Б^3} \sim \alpha^2\dfrac{m_e}{M_p}E_{am} \sim 10^{-7}E_{am}$,

г) $\Delta E \sim Q_Я\dfrac{e}{a_Б^3} \sim eR_Я^2\dfrac{e}{a_Б^3} \sim \left(\dfrac{R_Я}{a_Б}\right)^2 E_{am} \sim 10^{-10}E_{am}$,

д) $\Delta E \sim \left(\dfrac{R_Я}{a_Б}\right)^2 E_{am}$.

2. в) $W_{захв.} \sim Z^{20/3}$.

3. $E_{n,\ell} = -Z_a^2\dfrac{me^4}{2\hbar^2}\cdot\dfrac{1}{(n-\Delta_\ell)^2}$; $\Delta_\ell = \ell+\frac{1}{2}-\sqrt{(\ell+\frac{1}{2})^2-2\beta}$.

4. Для $_{40}Zr$ конфигурация: заполнены оболочки $_{36}Kr+(4d)^2(5s)^2$. Для $_{72}Hf - {}_{54}Xe+(4f)^{14}(5d)^2(6s)^2$.

Таким образом, конфигурация валентных электронов отличается только главным квантовым числом. Основной терм в обеих случаях $^3F_2$.

5. $^3P_2$, $^2P_{3/2}$, $^2D_4$, $^4F_{9/2}$, $^4S_{3/2}$, $^2D_{3/2}$.

6. а) ^4S, ^2P, ^2D.

б) ^1S, ^3P, ^1D, ^3F, ^1G.

в) ^2S, ^2P, ^4P, ^2D.

7. Всегда можно считать $n \le 2\ell + 1$

а) n – четное, $L_{max} = n\cdot\ell - \frac{n}{2}\cdot\frac{n-2}{2}$.

б) n – нечетное, $L_{max} = n\cdot\ell - \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$.

8. а) $Z^{-1/3}\,(\hbar^2/me^2)$.

б) $Z^{1/3}\,(me^4/\hbar^2)$.

в) $Z^{4/3}\,(me^4/\hbar^2)$.

г) $Z^{7/3}\,(me^4/\hbar^2)$.

д) $Z^{2/3}\,(e^2/\hbar)$.

е) $Z^{1/3}\,\hbar$.

ж) $Z^{1/3}$.

9. $\Delta E = \left(\frac{m_e}{2M_p}\right)\cdot\frac{me^4}{2\hbar^2} \sim 10^{-3}\,E_{am}$.

10. $|Q| = e\,\frac{j-\frac{1}{2}}{j+1}\,\overline{r^2}$, где $\overline{r^2} = \frac{1}{2}n^2\left[5n^2+1-3\ell(\ell+1)\right]a_Б^2$.

11. $\Delta E = \mu_Б \mathcal{H} g J_z$, где

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2\,J(J+1)}.$$

12. Нормальный.

13. Нет.

14. $\Delta E = \mu_Б \mathcal{H}\left(L_z + 2S_z\right) + A L_z S_z$,

где A характеризует тонкую структуру уровней.

Для водорода

$$A = \frac{e^2\hbar^2}{2m^2c^2}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle = \alpha^2\,\frac{me^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^3\ell(\ell+\frac{1}{2})(\ell+1)},$$

$\mu_Б\mathcal{H} > A$ при $\mathcal{H} \ge 10^5$ гс.

15. $\hbar\omega_{PS} = E_P - E_S \equiv \Delta E_0 + \Delta E_{(1)} + \Delta E_{(2)}$;

$$E_P = E_P^{(0)} - \mu_Б\mathcal{H}(\ell_z + 2s_z) + \frac{e^2 a_Б^2 \mathcal{H}^2}{8mc^2}\,n^4(1+\ell_z^2);$$

$$E_S = E_S^{(0)} - 2\mu_Б\mathcal{H}s_z';$$

$$\Delta E_0 : \Delta E_{(1)} : \Delta E_{(2)} \simeq 10^5 : 3 : 1.$$

16. Собственные функции характеризуются квантовыми числами: $|\ell_1, \ell_2, J_1, J_2, J, J_z\rangle$.

$$\Delta E = g\mu_Б\mathcal{H}J_z;\quad g = \frac{g_1+g_2}{2} + \frac{g_1-g_2}{2}\cdot\frac{J_1(J_1+1)-J_2(J_2+1)}{J(J+1)};$$

$$g_i = 1 + \frac{J_i(J_i+1) - \ell_i(\ell_i+1) + s_i(s_i+1)}{2\,J_i(J_i+1)};$$

$$\ell_{1,2} = J_{1,2} \pm \frac{1}{2};\quad s = \frac{1}{2}.$$

17. $E = \frac{1}{2}(E_+ + E_-) + \mu_Б\mathcal{H}J_z \pm \sqrt{\frac{1}{4}(E_+-E_-)^2 + \mu_Б\mathcal{H}\frac{J_z(E_+-E_-)}{2\ell+1} + \frac{1}{4}\mu_Б^2\mathcal{H}^2}$,

где $E_+ = E_{кул} + \frac{1}{2}A\ell$, $E_- = E_{кул} - \frac{1}{2}A(\ell+1)$ и

$$A = \alpha^2\,\frac{me^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^3\ell(\ell+\frac{1}{2})(\ell+1)}.$$

18. $\Delta E = \frac{2^3\mu_e\mu_{ядра}}{a_Б^3}\cdot\frac{1}{n^3(\ell+\frac{1}{2})j(j+1)\,i}\left[F(F+1) - j(j+1) - i(i+1)\right]$, где

$\mu_{ядра}$ – магнитный момент ядра, i – спин ядра, F – полный момент атома, $\vec{F} = \vec{j} + \vec{i}$.

$$\frac{\Delta E_H}{\Delta E_D} = \frac{\mu_p}{\mu_d}\cdot\frac{i_d}{i_p}\cdot\frac{2}{3} \approx 4{,}4.$$

19. $I = \frac{3}{2}$; $\Delta E_1 : \Delta E_2 : \Delta E_3 = 2 : 3 : 4$.

20. $E = \frac{1}{2}(E_+ + E_-) \pm \frac{\Delta E}{2}\sqrt{1 + \frac{2\xi}{i+\frac{1}{2}}F_z + \xi^2}$, где

E_+ и E_- – энергии уровней сверхтонкой структуры с $F=1$ и $F=0$ в отсутствие магнитного поля, $\Delta E = E_+ - E_-$, i – спин ядра,

$\xi = 2\mu_Б \mathcal{H}/\Delta E$;

$$E_+ = \frac{me^4}{2\hbar^2} + \frac{8}{3}\,\frac{\mu_Б\mu_p}{a_Б^3}\,, \quad E_- = \frac{me^4}{2\hbar^2} - 8\,\frac{\mu_Б\mu_p}{a_Б^3}\,;$$

$$\mu_p = 2{,}79\,\frac{e\hbar}{2M_pc}\,.$$

21. $\mathcal{H} \sim 10^{-5}$ эрстед. Наблюдение проводится на фоне допплеровского уширения порядка 10^4 гц.

22. Используя результаты предыдущей задачи, получим из $\partial E/\partial\mathcal{H} = 0$, что $\mu_d = \frac{3}{16}a_Б^3\mathcal{H}$; $\mu_d \approx 0{,}85\,\frac{e\hbar}{2M_pc}$.

23. $\Delta E = \pm\,\frac{3n}{4J(J+1)}\sqrt{n^2-(J+\frac{1}{2})^2}\; e\mathcal{E}_0 J_z$, где $\mathcal{E}_0$ – напряженность поля.

При $n \gg J$ имеем $\Delta E \backsim n^2$. $\Delta E_{электр} \sim \Delta E_{ls}$ при $\mathcal{E}_0 \sim 10^5$ в/см.

24. $\mu = \mu_Б\,\frac{(j+\frac{1}{2})^2}{j(j+1)}\cdot j_z$ для $l \neq n-1$,

$\mu = \mu_Б\,\frac{j+\frac{1}{2}}{j}\cdot j_z$ для $l = n-1$.

При напряженностях $\mathcal{E} \lesssim 10^2$ в/см уже, вообще говоря, нельзя пренебречь отсутствием вырождения по l при данном j (Лэмбовское расщепление). В этом случае величина магнитного момента зависит от $\mathcal{E}$.

25. Уширение, постепенное ослабление интенсивности и исчезновение спектральных линий по мере увеличения напряженности электрического поля.

26. $U(R) = -\,\frac{9}{4}\left(\frac{a_Б}{R}\right)^3 \frac{Ze^2}{R}$.

27. $$U(R) = \frac{6e^2}{R^6}\sum_{m,n}\frac{|z_{om}z_{on}|^2}{2E_0-E_n-E_m} \approx \frac{3e^2}{R^6}\sum_m |z_{om}|^2\sum_n \frac{|z_{on}|^2}{E_0-E_n} \approx$$
$$\approx -\,\frac{27}{4}\left(\frac{a_Б}{R}\right)^5\frac{e^2}{R}.$$

Средний (по времени) дипольный момент атома водорода равен нулю

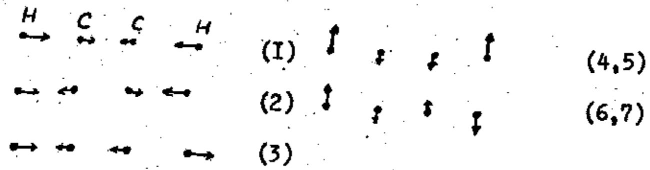
за счет прецессии классической орбиты в пространстве.

Классическое объяснение сил Ван-дер-Ваальса состоит в возникновении корреляции между положением орбит двух атомов в пространстве во время их прецессии (см. также задачник Гольдмана, Кривченкова, [5], § 8, № 34).

28. $W_{o\to o} = (8/9)^3 \approx 0{,}70$; $W_\beta \sim \left(\frac{e^2}{\hbar v}\right)^2$, где v – скорость β – электрона ($v \sim c$).

29. $W = \frac{2^{15}}{3^{10}}Z^2\left(\frac{\hbar}{mv\rho}\right)^2\left(|\varphi_1(\lambda)|^2+|\varphi_2(\lambda)|^2\right)$, где Z – заряд иона, v – его скорость, ρ –прицельное расстояние, $\lambda = \omega\rho/v$, ω – –частота перехода.

$$\varphi_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}\,e^{-i\lambda x}, \qquad \varphi_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\,e^{-i\lambda x}.$$

31. 

Возможны 3 продольных колебания и по два изгибных (в каждой из взаимно перпендикулярных плоскостей). Запрещены состояния, в которых сумма $n_3+n_6+n_7+l$ принимает четное (нечетное) значение при суммарном спине протонов $S = 1\ (0)$.

§ 8. Излучение

1. а) $E1$ – электрический дипольный,
 б) $M1$ – магнитный дипольный,
 в) $E2$ – электрический квадрупольный.
2. а) $M1$ магнитный дипольный,
 б) $M1$,
 в) смесь $M1$ и $E2$,
 г) смесь $E2$ и $M3$.
3. $\frac{1}{\tau} = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}|\vec{d}_{21}|^2$, $\quad |\vec{d}_{21}|^2 = \frac{1}{3}\,\frac{2^{15}}{3^9}\,e^2\left(\frac{\hbar^2}{mc^2}\right)^2$,
 $\omega = \frac{3me^4}{9\hbar^2}$, $\quad \tau = 0{,}15\cdot 10^{-8}$ сек.

4. Переходы магнитного – дипольного типа. $W \sim \alpha^5 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^5 \omega_0$,

где ω –частота перехода,

ω_0 – атомная частота.

а) $\frac{\omega}{\omega_0} \sim \alpha^2$, $W \sim \alpha^{11}\omega_0 \sim 10^{-7}$ сек$^{-1}$;

б) $\frac{\omega}{\omega_0} \sim \frac{m}{M}\alpha^2$, $W \sim \left(\frac{m}{M}\right)^3 \alpha^{11}\omega_0 \sim 10^{-16}$ сек$^{-1}$.

5. Основной канал распада $2S_{1/2}$ – уровня двухфотонный.

Вероятность перехода

$$W = \frac{2}{9\pi}|M|^2 \frac{\omega^3\omega'^3}{\hbar^2 c^6}\, d\omega, \quad \omega + \omega' = \frac{E_{2s} - E_{1s}}{\hbar},$$

$$M = \sum_n \left\{ \frac{\langle 2s|d_i|np\rangle\langle np|d_k|1s\rangle}{\omega_{np,2s} - \omega} + \frac{\langle 2s|d_i|np\rangle\langle np|d_k|1s\rangle}{\omega_{np,2s} - \omega'} \right\}.$$

Для грубой оценки можно положить:

$\omega' = \omega$, $M \sim \frac{(er_0)^2}{\omega}$. Тогда

$W \sim \alpha^6 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \omega_0$, где $\omega_0 \sim \frac{me^4}{\hbar^3}$. $\tau = \frac{1}{W} \sim 1$ сек.

6. В системе покоя распадающейся частицы:

а) при распаде из состояния $|\Sigma^0, s_z = \pm\frac{1}{2}\rangle$

$$|A|^2 \begin{cases} \sin^2\frac{\theta}{2}\,(\cos^2\frac{\theta}{2}) & \text{для фотонов со спиральностью (+I)} \\ \cos^2\frac{\theta}{2}\,(\sin^2\frac{\theta}{2}) & \text{–"– (–I),} \end{cases}$$

б) при распаде из состояния $|\omega^0, s_z = \pm 1\rangle$

$$|B|^2 \begin{cases} (1 \mp \cos\theta)^2 & \text{для фотонов со спиральностью (+I)} \\ (1 \pm \cos\theta)^2 & \text{–"– (–I),} \end{cases}$$

в) изотропное,

г) при распаде из состояния $|A_1, s_z = \pm 1\rangle$

$$|C|^2 \begin{cases} (1 \pm \cos\theta)^2 & \text{для фотонов со спиральностью (+I)} \\ (1 \mp \cos\theta)^2 & \text{–"– –"– (–I).} \end{cases}$$

7. а) $\sin^2\theta$, б) $(1 + \cos^2\theta)$.

8. Слабое поле (эффект Зеемана).

Спектральная линия расщепления на четыре компоненты, соответствующие переходам (рис. I)

$|2P_{1/2}, J_z = \pm\frac{1}{2}\rangle \to |1S_{1/2}, J_z = \pm\frac{1}{2}\rangle$ ($\pi_\pm$– компоненты) $E^{\pi}_{\pm} = E_0 \mp \frac{2}{3}\mu_0\mathcal{H}_0$

$|2P_{1/2}, J_z = \pm\frac{1}{2}\rangle \to |1S_{1/2}, J_z = \mp\frac{1}{2}\rangle$ ($\sigma_\pm$– компоненты) $E^{\sigma}_{\pm} = E_0 \pm \frac{4}{3}\mu_0\mathcal{H}_0$

вдоль поля (ось z) летят лишь $\sigma_\pm$ компоненты, имеющие правую для σ_+ и левую для σ_- круговые поляризации. Отношение интенсивностей $\sigma_+ : \sigma_- = 1:1$.

Перпендикулярно полю (вдоль оси x) наблюдают все четыре компоненты, причем $\pi_\pm$ поляризованы вдоль оси z, $\sigma_\pm$ вдоль оси y. Отношение интенсивностей: $\pi_+ : \pi_- : \sigma_+ : \sigma_- = 2:2:1:1$.

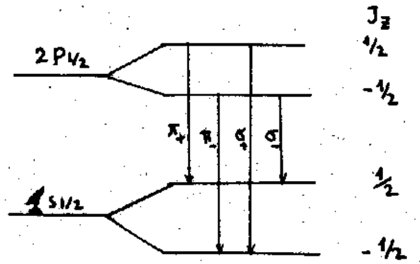


Рис. I.

2) Сильное поле (эффект Пашена-Бака).

Спектральная линия (в пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием) расщепится на три компоненты (рис.2) с энергиями E_0 и $E_0 \pm \mu_0\mathcal{H}_0$. В остальном – то же, что и в любом поле.

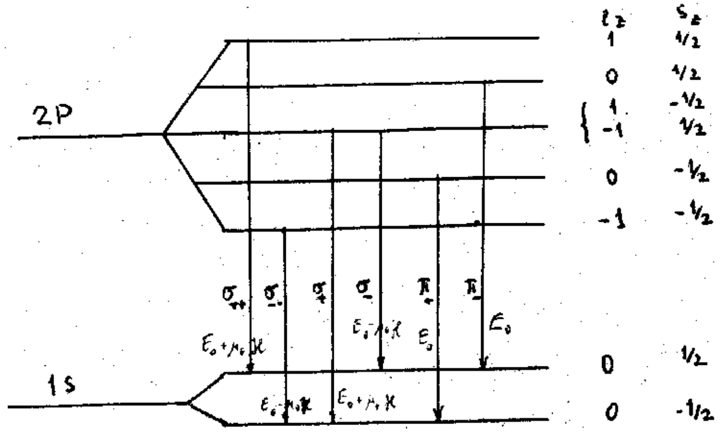


Рис. 2.

9. а) $1+\cos^2\theta$, θ – угол между импульсом фотона и осью z ,

б) не поляризованы.

10. 1:2.

11. Вероятность перехода

$$w = \frac{1}{6}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{\mu_0\mathcal{H}}{mc^2}\right)^2 \frac{\mu_0\mathcal{H}}{\hbar}(J-M+1)(J+M), \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

Переходы магнитно-дипольные. Однако после суммирования по поляризациям фотонов угловое распределение не отличается от случая электрически-дипольного перехода.

12. Переход магнитно-дипольный.

$$w = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}\mu_0^2 \approx 3\cdot 10^{-15}\,сек^{-1}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

13. а) $w_{рад} \sim \alpha^3 Z^4$, $w_{захв} \sim \alpha^4 Z^{22/3}$,

$$\frac{w_{захв}}{w_{рад}} \sim \alpha Z^{10/3} \gtrsim 1 \quad при \quad Z \gtrsim 4\text{-}5.$$

б) Если π^- - мезон захвачен на уровень n, $\ell = n-1$, то испустив электрически-дипольный фотон, он может перейти лишь на соседний такой же уровень с $n' = n-1$, $\ell' = \ell - 1 = n'-1$.

$$w_{рад} \sim \alpha^3 Z^4 n^{-5}, \quad w_{захв} \sim \frac{c^2(n)}{n}\left(\alpha Z^{4/3}\right)^{2n} Z^2,$$

$c(n) = \left(\frac{2}{n}\right)^n \frac{1}{n\sqrt{(2n-1)!}}$. Таким образом,

$$\frac{w_{захв}}{w_{рад}} \sim n^4 c^2(n)(\alpha Z)^{2n-3} \gtrsim 1 \qquad при \quad n \lesssim 5.$$

14. $0-0$ переход является строго запрещенным только в пренебрежении взаимодействием электронов с магнитным моментом ядра. При учете этого взаимодействия сохраняющимся квантовым числом является лишь полный момент всего атома $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$.

В первом приближении $|P_0'\rangle = |P_0\rangle + \sum_n \frac{\langle P_0|V|P_n\rangle}{E_{P_0} - E_{P_n}}|P_n\rangle$, где $V = \vec{\mu}_я \vec{\mathcal{H}}_e$ – взаимодействие с ядром.

Таким образом,

$$w(P_0 \to S_0) \approx \left|\frac{\langle P_0|V|P_1\rangle}{E_{P_0} - E_{P_1}}\right|^2 w(P_1 \to S_0), \quad |E_{P_0} - E_{P_1}| \approx 10^{-3}\frac{me^4}{\hbar^2},$$

$$\mu_я \sim \frac{e\hbar}{Mc}, \quad \mathcal{H}_e \sim \frac{1}{r_e^3}\frac{e\hbar}{mc}, \qquad \frac{w(P_0 \to S_0)}{w(P_1 \to S_0)} \approx 10^{-8} \approx \frac{\Gamma(P_0, S_0)}{\Gamma(P_1 \to S_0)}.$$

15. $$\frac{\Gamma(D_{5/2} \to P_{1/2})}{\Gamma_0} = \frac{1}{9}\left(\frac{\mu_0\mathcal{H}_0}{\Delta E_P}\right)^2\left[1+\sqrt{\frac{6}{5}}\frac{\Delta E_P}{\Delta E_D}\right]^2 = 0{,}9\cdot 10^{-2},$$

$$\Gamma_0 = \Gamma(D_{5/2} \to P_{3/2}) = \Gamma(D_{3/2} \to P_{1/2}), \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc},$$

$$\Delta E_P = E(P_{3/2}) - E(P_{1/2}), \quad \Delta E_D = E(D_{5/2}) - E(D_{3/2}).$$

16. Время жизни состояния $2S_{1/2}$ с проекцией $J_z = \pm\frac{1}{2}$ равно $\tau_\pm = (\lambda_\pm)^{-2}\tau_{2P}$, где $\tau_{2P} = 1{,}6\cdot 10^{-9}$ сек – время жизни $2P_{1/2}$ состояния,

$$\lambda_\pm = \frac{e\frac{v}{c}\mathcal{H}_0 r_0}{\Delta E_\Lambda \pm \frac{4}{3}\mu_0\mathcal{H}_0} C_\pm, \quad C_+ = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad C_- = \sqrt{3}, \quad r_0 = \frac{\hbar^2}{mc^2}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

ΔE_Λ – лэмбовское расщепление $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ уровней.

$\tau_+ = 1{,}6\cdot 10^{-5}$ сек, $\tau_- = 0{,}2\cdot 10^{-6}$ сек.

17. $\dfrac{I}{\hbar\omega} = 2\,\dfrac{e^2}{\hbar c}\,\dfrac{\hbar\omega}{mc^2}\,\omega\, e^{-\beta} f^3(\beta),$

$\beta = \dfrac{\hbar\omega}{kT}, \quad f(\beta) = (1 - e^{-\beta})^{-1}$

18. $\left(\dfrac{p_{\parallel}^2}{2m} + \hbar\omega n_0\right)^{-1} I = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{e^2}{\hbar c}\,\dfrac{\hbar\omega}{mc^2}\,\omega$, где

$p_{\parallel}$ – составляющая импульса вдоль оси колебаний,

n_0 – начальное состояние.

19. Пусть система A_1 имеет момент J_1, а A_2 – момент J_2. Тогда

$$\frac{\sigma_{\text{фотораспада}}}{\sigma_{\text{рекомбинации}}} = \frac{2J_2+1}{2J_1+1}\,\frac{q^2}{k^2}, \text{ где}$$

$\vec q$ – импульс электрона, $\vec k$ – импульс фотона,

$k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{1}{c}\left(I + \dfrac{q^2}{2m}\right)$, где I – потенциал ионизации.

При $\omega \sim \dfrac{me^4}{\hbar^3}$ $\sigma_{\text{рекомб.}} \sim \alpha^2\,\sigma_{\text{фоторасп.}}$

20. Указание: рассматривать перекрывание электронных оболочек разных атомов и возникающую экранировку поля ядра на больших расстояниях (больших n), уширение линий за счет столкновений и полей соседних атомов.

21. Вероятность того, что ортопозитроний распадается за время t равна:

$$w(t) = 1 - \frac{1+x}{2}\,e^{-t[\Gamma_0(1+x)+\Gamma_n(1-x)]} - \frac{1-x}{2}\,e^{-t[\Gamma_0(1-x)+\Gamma_n(1+x)]},$$

где $\tau_0 = \dfrac{1}{2\Gamma_0} = 1{,}4\cdot 10^{-7}$ сек. – время жизни ортопозитрония,

$\tau_n = \dfrac{1}{2\Gamma_n} = 1{,}2\cdot 10^{-10}$ сек. – время жизни парапозитрония,

$x = \dfrac{\Delta E}{\sqrt{(\Delta E)^2 + 16\mu_0^2\mathcal{H}_0^2}}$, ΔE – разность уровней орто- и парапозитрония, $\Delta E = 8{,}2\cdot 10^{-4}$ эв.

В слабом поле ($x = 1-\rho$, $\rho = 8\mu_0\mathcal{H}_0/\Delta E \ll 1$),
$w(t) = 1 - e^{-2t\Gamma_0(1+\rho\Gamma_n/2\Gamma_0)}$.

В сильном поле ($x \to 0$) $w(t) = 1 - e^{-t\Gamma_n}$, т.е. время жизни в два раза больше времени жизни парапозитрония.

В случае распада парапозитрония ответ получается заменой $x \to -x$, $\Gamma_0 \leftrightarrow \Gamma_n$.

22. а) $\sigma_{\text{иониз.}} \approx const,$

б) $\sigma_{\text{иониз.}} \approx const,$

в) $\sigma_{\text{иониз.}} \sim \begin{cases} \sqrt{\hbar\omega - I} & \text{для } l = 1, \\ (\hbar\omega - I)^{3/2} & \text{для } l = 0, \end{cases}$

где I – потенциал ионизации.

23. Угловое распределение электронов имеет вид $\sim |\vec p\,\vec e_\lambda|^2$, где $\vec e_\lambda$ – вектор поляризации фотона $\vec p$ – орт импульса электрона. Полное сечение.

$$\sigma = \frac{2^8\pi}{3}\alpha Z^5\left(\frac{I_0}{\hbar\omega}\right)^{7/2} a_0^2, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad I_0 = \frac{me^4}{2\hbar^2}.$$

24. $\sigma_{\text{разд.}} = \dfrac{8\pi}{3}\alpha\left(\dfrac{I}{\hbar\omega}\right)^{3/2} r_0^2$, $r_0 = \dfrac{\hbar}{\sqrt{MI}}$, M – масса нуклона.

$$\frac{\sigma_{\text{разд.}}}{\sigma_{\text{захв.}}} = \frac{2}{3}\,\frac{Mc^2}{\hbar\omega}\left(1 - \frac{I}{\hbar\omega}\right), \quad \sigma_{\text{разд.}}(\hbar\omega \to I) \sim (\hbar\omega - I)^{1/2}.$$

25. $d\sigma = \dfrac{4}{3\pi}\alpha(2-\varkappa)\sqrt{1-\varkappa}\,\dfrac{\mathcal{E}}{mc^2}\,\sigma_0\,\dfrac{d\omega}{\omega}$, где ω – частота фотона, $\mathcal{E}$ – начальная энергия электрона, $\varkappa = \dfrac{\hbar\omega}{\mathcal{E}}$, $\sigma_0 = 4\pi|a|^2$ – сечение упругого рассеяния медленного электрона на атоме.

26. $\dfrac{d\sigma}{d\omega} = \dfrac{32\pi^4}{3}\alpha^3|\vec p|\int d\Omega_p\,|\vec p_0 - \vec p|^2\,\bar V^2(\vec p_0 - \vec p)$, где ω – частота фотона, $\hbar\omega = \dfrac{p_0^2}{2m} - \dfrac{p^2}{2m}$, $V(\vec q)$ – Фурье-образ потенциала атома, $\bar V(\vec q) = -\dfrac{Z - F(\vec q)}{2\pi^2 q^2}$, $F(\vec q) = \int d\vec r\,\rho\, e^{i\vec q\vec r}$ – атомный формфактор. При $|\vec p_0 - \vec p|a \gg 1$ $F(\vec p_0 - \vec p) \ll 1$ и, таким образом, экранированием можно пренебречь. Тогда

$$d\sigma = \sigma_0 \ln\frac{p_0 + p}{p_0 - p}\,\frac{d\omega}{\omega}, \quad \sigma_0 = \frac{16}{3}Z^2\alpha^3\frac{\hbar^2}{p_0^2}.$$

Для дальнейшего сравнения можно положить $\sigma \sim \sigma_0$. Резерфордовское сечение на большие углы $\sigma_R \sim \left(\dfrac{Ze^2m}{p_0^2}\right)^2$. Таким образом,

$$\sigma \sim \sigma_0 \sim \alpha\left(\frac{p_0}{mc}\right)^2\sigma_R \ll \sigma_R.$$

Сечение радиационного захвата быстрого электрона

$\sigma_{захв.} \sim \alpha\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\left(\frac{E_{иои.}}{E_0}\right)^2$, где E_0 – потенциал ионизации.
Таким образом, $\sigma \sim \sigma_0 \sim \left(\frac{P_c}{Z}\right)^2\left(\frac{\hbar}{me^2}\right)^2 \sigma_{захв.}$.

27.
$$\frac{dE_\omega}{d(\hbar\omega)} = \frac{8}{3\pi}\alpha\,\frac{vv'}{c^2},$$
где v – начальная скорость, v' – конечная скорость электрона.
$$E = \frac{16}{9\pi}\alpha\,\frac{v^2}{c^2}\,\frac{mv^2}{2}.$$

28. Если в отсутствие доплеровского уширения форма спектральной линии есть $N_0(\omega) = \delta(\omega-\omega_0)$, то
$$N(\omega) = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{Mc^2}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{Mc^2}{2kT}\,\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}\right],$$
где M – масса атома, T – температура газа.
Характерное уширение $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sim \left(\frac{kT}{Mc^2}\right)^{1/2}$.

30. $N(\omega) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma/2}{(\omega-\omega_0)^2+(\Gamma/2)^2}$, где $\frac{\Gamma}{2} = \frac{\omega_0^2}{c^2}D$ – характерная ширина.

31. $\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{max} = 2\pi\left(\frac{c}{\omega_0}\right)^2\frac{g_{кон}}{g_{нач}} = 2\pi\lambda_0^2\,\frac{g_{кон.}}{g_{нач.}}$,
$g_{кон.}(g_{нач.})$ – статистический вес конечного (начального) состояния, ω_0 – резонансная частота.

32.
$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\alpha^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2.$$

33. а) Длина волны фотона намного больше характерного размера дейтона. Таким образом, в нулевом приближении сечение равно классическому сечению рассеяния на частице с зарядом с и массой 2M.
$$\sigma_0 = \sigma_{кл.} = \frac{8\pi}{3}\alpha^2\left(\frac{\hbar}{2Mc}\right)^2.$$
С учетом первой поправки сечение есть
$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\alpha^2\left(\frac{\hbar}{2Mc}\right)^2\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\hbar\omega}{I}\right)^2\right].$$

б) В этом случае в нулевом приближении сечение равно классическому сечению рассеяния на протоне:
$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3}\alpha\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2.$$
С учетом первой поправки

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\alpha^2\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2\cdot\left|1 - \frac{2}{3}\left(\frac{I}{\hbar\omega}\right)^{1/2} - i\left(I/\hbar\omega\right)^{1/2}\right|^2 \approx$$
$$\approx \frac{8\pi}{3}\alpha^2\left(\hbar/Mc\right)^2\left[1 - \frac{4}{3}\left(I/\hbar\omega\right)^2\right].$$

§ 9. Системы многих тел

1. При целом s (бозоны): $(s+1)(2s+1)$ симметричных, $s(2s+1)$ антисимметричных;
при полуцелом s (фермионы): $s(2s+1)$ симметричных, $(s+1)(2s+1)$ антисимметричных.

3. Основное состояние отвечает квантовым числам $n_x = n_y = n_z = 1$ и в случае в) осуществляется для спинового синглета, энергия $E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{2^7}{8}\frac{U_0}{abc}$ во всех трех случаях. Первое возбужденное состояние есть $n_x = 2$, $n_y = n_z = 1$ (считаем $a > b, c$), его энергия
$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{5}{a^2}+\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)+\Delta E,$$
где
$$\Delta E = \begin{cases} \frac{9}{4}\frac{U_0}{abc} & \text{в случае а),} \\ \frac{9}{2}\frac{U_0}{abc} & \text{в случае б) и в случае в) для синглета,} \\ 0 & \text{в случае в) для триплета.} \end{cases}$$
Каковы условия применимости здесь теории возмущений?

4. $J = \frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$.

5. $N = 2 \to J = 0, 2, 4$; $N = 3 \to J = 0, 2, 3, 4, 6$. Полное число состояний $\Omega(N) = \sum_J(2J+1) = C^4_{N+4} = \frac{(N+4)!}{N!\,4!}$; если момент одного кванта равен l, то $\Omega_l(N) = \frac{(N+2l)!}{N!(2l)!}$.

6. $J_{max}(N) = \frac{2j+1}{2}N\left(1 - \frac{N}{2j+1}\right)$ обращается в нуль на краях оболочки; эта величина является наибольшей для наполовину заполненной оболочки $N = \frac{2j+1}{2}$ и равна при этом $\frac{1}{8}(2j+1)^2$.

7. 
$$N_\gamma(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta^2 > \theta_0^2, \\ const\cdot(\theta_0^2-\theta^2) & \text{при } \theta^2 < \theta_0^2, \end{cases}$$
где максимальный угол $\theta_0 = \frac{P_0}{mc} = \frac{v_0}{c} \sim 10^{-2}$ радиан, P_0 – импульс Ферми металла (в силу термализации позитрона его импульс мал по сравнению с характерными импульсами электронов, $p_+/p_- \sim v_+/v_- \sim (\sqrt{kT/m})/(\sqrt{\varepsilon_0/m}) \sim \sqrt{kT/\varepsilon_0} \ll 1$).

8. $k_0 = \frac{p_0}{\hbar} = \frac{3{,}64}{r_s}\,\mathring{A}^{-1}$, $\varepsilon_0 = \frac{p_0^2}{2m} = 3{,}68/r_s^2$ ридберг, $\bar\varepsilon = \frac{3}{5}\varepsilon_0 = 2{,}21/r_s^2$ ридберг, $\frac{e^2/a}{\bar\varepsilon} = 0{,}90\, r_s \sim n^{-1/3}$, т.е. с ростом плотности эффективная роль кулоновского взаимодействия падает, газ становится более идеальным (в реальных металлах параметр r_s меняется от 2 до 5,5).

9. $w(q) = \frac{24}{p_0^3} q^2\left(1 - \frac{3}{2}\frac{q}{p_0} + \frac{1}{2}\frac{q^3}{p_0^3}\right)$; эта функция распределения нормирована согласно $\int^{p_0} dq\; w(q) = 1$ (p_0 – импульс Ферми). /Вычислить интеграл $\int d\vec p_1 d\vec p_2\, n_{\vec p_1} n_{\vec p_2}\, \delta\left(\vec q - \frac{\vec p_1 + \vec p_2}{2}\right)$, полагая $\vec p_1 = \vec q + \frac{\vec P}{2}$, $\vec p_2 = -\vec q + \frac{\vec P}{2}$/.

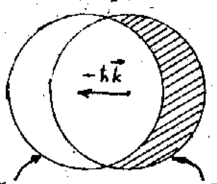
I0. Оценить фазовый объем для столкновения

,

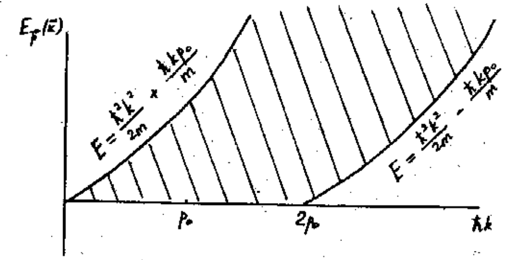
считая матричный элемент константой (вероятность $w(p) \sim \frac{1}{\tau}$,
$$w(p) = \frac{2\pi}{\hbar}\int d\vec q\, d\vec q\,' d\vec p\,' n_{\vec p\,'} (1-n_{\vec q})(1-n_{\vec q\,'})|M|^2 \delta(\vec p + \vec p\,' - \vec q - \vec q\,')\,\delta(\varepsilon_p + \varepsilon_{p'} - \varepsilon_{\vec q} - \varepsilon_{\vec q\,'})\Big).$$

II. Оператор плотности $\rho(\vec r) = \sum_a \delta(\vec r - \vec r_a)$ (сумма – по всем частицам), оператор плотности тока $\vec j(\vec r) = \frac{1}{2m}\sum_a \{\vec p_a \delta(\vec r - \vec r_a) + \delta(\vec r - \vec r_a)\vec p_a\}$, где $\vec p_a = -i\hbar\nabla_a$. Гамильтониан системы $H = \sum_a \frac{\vec p_a^{\,2}}{2m} + \sum_{a \neq b} U(\vec r_{ab})$, тогда гейзенберговское уравнение движения для оператора $\rho(\vec r)$ дает
$$\dot\rho(\vec r) = -\frac{i}{\hbar}[\rho(\vec r), H] = -\operatorname{div}\vec j(\vec r).$$

I2. Каждое из искомых состояний характеризуется импульсом $\vec p$, $|\vec p| < p_0$, отвечающим дырке, оставленной внутри сферы Ферми, и импульсом $\vec p + \hbar\vec k$, $|\vec p + \hbar\vec k| > p_0$, частицы над сферой Ферми (импульс Ферми $p_0 = (n \cdot 3\pi^2\hbar^3)^{1/3}$). Приведенные неравенства определяют область допустимых при данном $\hbar\vec k$ (суммарный импульс пары частицы-дырки) значений $\vec p$, связанных с относительным движением частицы и дырки. Эта область заштрихована на рисунке.



Энергии полученных состояний равны
$$E_{\vec p}(\vec k) = \frac{(\vec p + \hbar\vec k)^2}{2m} - \frac{\vec p^{\,2}}{2m}$$
и заполняют "континуум парных возбуждений":



I3. Фурье-компонента плотности $\rho_{\vec k} = \sum_a e^{-i\vec k\vec r_a} = \rho^+_{-\vec k}$. Для доказательства искомого правила сумм следует вычислить двойной коммутатор $[[\rho_{\vec k}, H], \rho^+_{\vec k}] = \frac{N\hbar^2 k^2}{2m}$, где гамильтониан H выписан в решении задачи II, взять от этого коммутатора среднее $\langle 0|\ldots|0\rangle$ по основному состоянию и воспользоваться тем, что в силу инвариантности относительно обращения времени состояния $\rho_{\vec k}|0\rangle$ и $\rho^+_{\vec k}|0\rangle$, имеющие импульсы $\mp\hbar\vec k$ (докажите!), вырождены по энергии. В длинноволновом пределе $e^{-i\vec k\vec r_a} \approx 1 - i\vec k\vec r_a$, и мы получаем правило сумм для дипольных переходов.

I4. Введя полную систему промежуточных состояний $|n\rangle$, представить корреляционную функцию в виде
$$S_{\vec k}(t) = \sum_n e^{-i\omega_{n0}t}\,|(\rho^+_{\vec k})_{n0}|^2,$$
тогда ее фурье-образ
$$S_{\vec k\omega} = 2\pi\sum_n \delta(\omega - \omega_{n0})\,|(\rho^+_{\vec k})_{n0}|^2,$$
и требуемое правило сумм вытекает из результата задачи I3.

I5. Согласно решениям задач I2,I4,
$$S'_{\vec k\omega} = 2\pi \sum_{\substack{|\vec p| < p_0,\\ |\vec p + \hbar\vec k| > p_0}} \delta\left(\omega - \frac{E_{\vec p}(\vec k)}{\hbar}\right)\cdot 2,$$
где суммирование – по разрешенной области, найденной в задаче I2, множитель 2 – от спинов частиц. Переходя к интегрированию, получим
$$S'_{\vec k\omega} = \begin{cases} V\pi\hbar\nu_0 \frac{\omega}{k v_0}, & 0 \le \omega \le k v_0 - \frac{\hbar k^2}{2m}; \\ V\pi\hbar\nu_0 \frac{p_0}{2\hbar k}\left(1 - \frac{\omega}{k v_0} - \frac{\hbar k}{2p_0}\right)^2, & k v_0 - \frac{\hbar k^2}{2m} \le \omega \le k v_0 + \frac{\hbar k^2}{2m}, \end{cases}$$

$v_0 = \frac{p_0}{m}$, $\nu_0 = \frac{3n}{2\varepsilon_0} = \frac{3mn}{p_0^2} = \frac{mp_0}{\pi^2\hbar^3}$ – плотность состояний $\left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_0}$

на границе Ферми, V – объем системы $\left(\sum_{\vec p} \to V\int\frac{d\vec p}{(2\pi\hbar)^3}\right)$.

I6. Сравнивая определения динамического и статического формфакторов (задачи I4, I5), найдем

$$S_{\vec k} = \sum_n |(\rho^+_{\vec k})_{n0}|^2 = \int\frac{d\omega}{2\pi} S_{\vec k\omega} = \sum_{\vec p\sigma} n_{\vec p}(1 - n_{\vec p+\hbar\vec k}) = 2\Omega,$$

где Ω – объем допустимой для возбуждений частица-дырка области (задача I2), множитель 2 – от спинов. Подставляя $S_{\vec k\omega}$ из задачи I5, получим

$$S_{\vec k} = \begin{cases} N^2, & k=0 \quad (\text{так как } \rho_0 = N); \\ N\frac{\hbar k}{4p_0}\left[3 - \left(\frac{\hbar k}{2p_0}\right)^2\right], & 0 < k < \frac{2p_0}{\hbar}, \\ N, & k > \frac{2p_0}{\hbar}. \end{cases}$$

Почему при $k > \frac{2p_0}{\hbar}$ статический формфактор перестает расти с ростом k?

I7. Искомая вероятность есть

$$g(\vec r) = \frac{1}{N(N-1)}\left\langle 0\left|\sum_{a\neq b}\delta(\vec r + \vec r_a - \vec r_b)\right|0\right\rangle.$$

Добавляя и вычитая члены с $a = b$, вводя операторы $\rho_{\vec k}$ флуктуаций плотности (задача I3) и статический формфактор $S_{\vec k}$ (задача I6), найдем (V – объем системы)

$$g(\vec r) = \frac{1}{N-1}\left\{\frac{1}{NV}\sum_{\vec k} S_{\vec k}\, e^{i\vec k\vec r} - \delta(\vec r)\right\} = \frac{1}{V(N-1)}\sum_{\vec k}\left(\frac{S_{\vec k}}{N} - 1\right)e^{i\vec k\vec r}.$$

Подставляя $S_{\vec k}$ из решения задачи I6, получим

$$g(r) = \frac{1}{V}\left\{1 - \frac{9}{2}\left[\frac{\sin(p_0 r) - p_0 r\cos(p_0 r)}{(p_0 r)^3}\right]^2\right\}.$$

Обсудите поведение полученной функции.

I8. В пространственно-однородной системе решения уравнения Хартри-Фока с учетом взаимодействия по-прежнему даются плоскими волнами

$$\psi_{\vec p\sigma} = \frac{1}{\sqrt V} e^{(i/\hbar)\vec p\vec r}\chi_\sigma \quad (\chi_\sigma - \text{спинор}).$$ Энергии этих состояний

$$\varepsilon_{\vec p\sigma} = \frac{\vec p^{\,2}}{2m} + nU_0 - \frac{1}{V}\sum_{\vec p'\sigma} n_{\vec p'\sigma} U_{\vec p'\vec p},$$

где $U_{\vec q}$ – фурье-компоненты потенциала $U(\vec r)$, n – полная плотность числа частиц N/V, $n_{\vec p\sigma}$ – числа заполнения состояний $(\vec p', \sigma)$, равные 0 или I, $n = \sum_{\vec p\sigma} n_{\vec p\sigma}$, V – объем системы. Энергия всей системы

равна

$$E_0 = N\left\{\frac{3}{5}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}nU_0 - \frac{1}{2NV}\sum_{\vec p\vec p'\sigma} U_{\vec p-\vec p'}\, n_{\vec p\sigma} n_{\vec p'\sigma}\right\}.$$

Заметьте, что $\varepsilon_{\vec p\sigma}$ дается вариационной производной от полной энергии по соответствующим числам заполнения:

$$\varepsilon_{\vec p\sigma} = \frac{\delta(E_0/V)}{\delta n_{\vec p\sigma}}.$$

I9. Нейтрализующий фон компенсирует фурье-компоненту U_0 (см. задачу I8). Учитывая, что фурье-компонента кулоновского потенциала есть $U_{q\neq0} = \frac{4\pi e^2\hbar^2}{q^2}$, получим

$$\varepsilon_{\vec p\sigma} = \frac{\vec p^{\,2}}{2m} - \frac{1}{V}\sum_{\vec p'\neq\vec p}\frac{4\pi e^2\hbar^2}{|\vec p - \vec p'|^2} n_{\vec p'\sigma} = \frac{\vec p^{\,2}}{2m} - \frac{e^2 p_0}{\pi\hbar}\left[1 - \frac{p_0^2 - p^2}{2pp_0}\ln\left|\frac{p+p_0}{p-p_0}\right|\right],$$

$$E_0 = N\left\{\frac{3}{5}\varepsilon_0 - \frac{1}{2NV}\sum_{\vec p,\vec p'\neq\vec p,\sigma}\frac{4\pi e^2\hbar^2}{|\vec p - \vec p'|^2} n_{\vec p\sigma} n_{\vec p'\sigma}\right\} = \frac{3}{5}\varepsilon_0 N + E_{обм}.$$

Вычисление E_0 удобно проводить аналогично тому, как это делалось в задаче 9, тогда

$$E_{обм} = -\frac{3N}{4\pi}\frac{e^2 p_0}{\hbar},$$

или, вводя параметр r_s (задача 8),

$$\frac{E_{обм}}{N} = -\frac{0{,}916}{r_s} \text{ ридберг}.$$

Заметьте, что в этом приближении скорость частиц на границе Ферми $v_0 = \left(\frac{d\varepsilon_p}{dp}\right)_{p=p_0} \to \infty$, а плотность состояний $\nu_0 = \left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_0} \to 0$.

20. Если в нормальном состоянии импульс Ферми равен p_0, то в ферромагнитном он увеличивается до $p_0^{(\text{ферр})} = 2^{1/3}p_0$. При этом проигрыш в кинетической энергии $\bar\varepsilon$ на одну частицу равен (задача 8)

$$\bar\varepsilon(2^{1/3}p_0) - \bar\varepsilon(p_0) = \frac{1{,}30}{r_s^2} \text{ ридберг},$$

а выигрыш в обменной энергии (задача I9)

$$\frac{1}{N}\left\{E_{обм}(2^{1/3}p_0) - E_{обм}(p_0)\right\} = -\frac{0{,}238}{r_s} \text{ ридберг}.$$

Ферромагнитное состояние с уменьшением плотности станет в этом приближении выгодным, начиная с $r_s = \frac{1{,}30}{0{,}238} = 5{,}46$.

21. В приближении Томаса-Ферми потенциал заряда e_c экранируется, $\varphi(r)=\frac{e_c}{r}e^{-r/r_D}$, дебаевский радиус

$$r_D=\sqrt{\frac{p_0^2}{12\pi n m e^2}}=\frac{v_0}{\sqrt{3}\,\omega_0},$$

$\omega_0=\sqrt{4\pi n e^2/m}$ – плазменная частота.

22. Волновая функция пары частиц с импульсами $\vec p_1$ и $\vec p_2$

$$\psi(\vec r_1,\vec r_2)=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec K\vec R}\psi_{\vec k}(\vec r),$$

где $\hbar\vec K=\vec p_1+\vec p_2$ – полный импульс пары, $\vec R$ – координата ее центра масс, $\hbar\vec k=\frac{\vec p_1-\vec p_2}{2}$ – относительный импульс, $\vec r$ – относительная координата. Пространственная функция относительного движения может быть симметричной или антисимметричной

$$\psi_{\vec k}^{(\pm)}(\vec r)=\frac{1}{\sqrt{2V}}\left(e^{i\vec k\vec r}\pm e^{-i\vec k\vec r}\right),$$

причем каждой из этих возможностей отвечает противоположная симметрия спиново-зарядовой функции. Учитывая число соответствующих состояний, найдем усредненную по зарядам и спинам энергию взаимодействия пары

$$\langle U_{12}\rangle_{\vec k}=\frac{1}{V}\int d\vec r\,U_0(\vec r)\left[1-\tfrac{1}{4}\cos 2\vec k\vec r+\alpha\left(-\tfrac{1}{4}+\cos 2\vec k\vec r\right)\right].$$

В опасном для коллапса пределе высокой плотности $n=\frac{A}{V}$ для большинства пар $k\sim k_0=\frac{p_0}{\hbar}\sim n^{-1/3}$, $k_0 r_0\gg 1$ и быстро осциллирующим $\cos 2\vec k\vec r$ можно пренебречь. Учитывая, что число пар $\frac{A(A-1)}{2}\simeq\frac{A^2}{2}$, получим среднюю потенциальную энергию на частицу

$$\frac{E_{взаим}}{A}\simeq\frac{n}{2}\int d\vec r\,U_0(r)\left(1-\frac{\alpha}{4}\right),$$

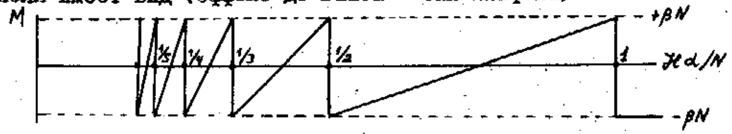
т.е. $\alpha>4$ – условие насыщения.

23. Если $n_\pm(\vec r)$ – плотность электронов с проекцией спина $\pm\frac{1}{2}$ (на направление $\vec S$), то поляризация

$$P(\vec r)=n_+(\vec r)-n_-(\vec r)=\frac{2S_z m g k_0^2}{\pi^3\hbar^2}\,\frac{j_1(2k_0|\vec r-\vec R|)}{|\vec r-\vec R|^2},$$

j_1 – сферическая функция Бесселя, $\hbar k_0=p_0$ – импульс Ферми электронов. (Найти в борновском приближении искажение электронной плоской волны $e^{i\vec k\vec r}\chi_\sigma$ примесью, вычислить в линейном приближении по g изменение электронной плотности от этого искажения и проинтегрировать по всем занятым состояниям $k\le k_0$).

24. Энергия поперечного движения квантована (уровни Ландау), $\varepsilon_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_c$, где циклотронная частота $\omega_c=e\mathcal{H}/mc$. Кратность вырождения каждого уровня Ландау равна $\frac{L_xL_ye\mathcal{H}}{\pi\hbar c}\equiv\alpha\mathcal{H}$, где L_x, L_y – размеры области поперечного движения. В больших полях все N частиц – на нижнем уровне ($\mathcal{H}>N/\alpha$), энергия системы $E=\varepsilon_{n=0}N=\frac{1}{2}\hbar\omega_c N\equiv\beta\mathcal{H}N$, $\beta=\frac{e\hbar}{2mc}$, т.е. магнитный момент $M=-\partial E/\partial\mathcal{H}=-\beta N$. При уменьшении $\mathcal{H}$ в каждой точке $\mathcal{H}_\kappa=\frac{N}{\kappa\alpha}$, где κ – целое число, начинает заполняться следующий уровень. Результирующая зависимость намагниченности от поля имеет вид (эффект де Гааза – ван Альфена).



25. Волновая функция частицы при граничном условии $\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_S=0$ есть

$$\psi_{n\ell m}(r,\varphi,z)=C_{n\ell m}\,J_\ell\left(\frac{k_{n\ell}r}{R}\right)e^{i\ell\varphi}\cos\frac{\pi m z}{d},$$

$C_{n\ell m}$ – нормировочный множитель, J_ℓ – функция Бесселя, n,ℓ,m – целые числа, энергия состояния

$$\varepsilon_{n\ell m}=\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{k_{n\ell}^2}{R^2}+\frac{\pi^2m^2}{d^2}\right),$$

M – масса частицы, а числа $k_{n\ell}$ определяются из равенства $J_\ell'(k_{n\ell})=0$. Основное состояние газа есть конденсат (все частицы сконденсированы в $\psi_{000}=const$). Вращению вокруг оси z отвечает стационарное состояние во вращающейся системе, где гамильтониан каждой частицы приобретает кориолисов член $-\hbar\ell\Omega$, т.е. $\psi_{n\ell m}$ по-прежнему являются решениями, но их энергия теперь равна

$$\tilde\varepsilon_{n\ell m}=\varepsilon_{n\ell m}-\hbar\ell\Omega.$$

Уровни с $\ell\neq0$ последовательно становятся выгоднее основного состояния, т.е. конденсат перестраивается. Первая перестройка $\psi_{000}\to\psi_{110}$ происходит при $\Omega=\Omega_1=\frac{\hbar}{2MR^2}k_{11}^2$ ($k_{11}\simeq1{,}84$). В состоянии ψ_{110} возник ток $j_\varphi=v_\varphi|\psi_{110}|^2$, где $v_\varphi=\frac{\hbar}{Mr}$ – вихревое поле скоростей, циркуляция $\oint\vec v d\vec\ell=2\pi\hbar/M$; при конденсации в состояние с моментом ℓ циркуляция равна $2\pi\hbar\ell/M$ (квантованные вихри).

§ 10. Рассеяние

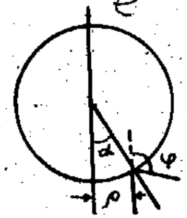
I. $$\psi(\vec r)\to e^{i\vec K\vec r}+f(\varphi)\frac{\exp\{i(\kappa\rho+K_z z)\}}{\sqrt{\rho}},$$

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = e^{ik_z z}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i^{\nu} J_\nu(k\rho)\, e^{i\nu\varphi},$$

$$\psi(\vec{r}) \to \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\sum_\nu i^\nu e^{i\delta_\nu} \cos\left(k\rho - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_\nu\right) e^{i\nu\varphi + ik_z z},$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\sum_\nu \left(e^{2i\delta_\nu} - 1\right) e^{i\nu\varphi - i\pi/4}, \quad d\sigma = |f|^2 d\varphi\, dz.$$

2. $$e^{2i\delta_\nu} = \left[N_\nu(kR) + iJ_\nu(kR)\right]\cdot\left[N_\nu(kR) - iJ_\nu(kR)\right]^{-1}$$



при $kR \gg 1$ $\delta_\nu = \nu(\beta - \operatorname{tg}\beta)$, где $\cos\beta = \frac{\nu}{kR}$.

Угол рассеяния

$$\varphi_{k\nu} = -2\frac{\partial}{\partial\nu}(\delta_\nu)\Big|_{\nu} = -2\beta,$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi - \varphi_{k\nu}}{2}\right) = \rho/R.$$

3. $$e^{2i\delta_\nu} = e^{i\pi(\nu-a)}\,\frac{N_a(kR) + iJ_a(kR)}{N_a(kR) - iJ_a(kR)},$$

$$a = |\nu - \Phi/\Phi_0|; \quad \Phi_0 = 2\pi\hbar c/e; \quad \Phi = \mathcal{H}\cdot\pi R^2.$$

4. $$\delta_\ell = -\frac{\pi}{2}\left\{\sqrt{(\ell+1/2)^2 + 2m\alpha/\hbar^2} - (\ell+1/2)\right\} \approx \frac{\pi m\alpha}{\hbar^2(2\ell+1)},$$

$$d\sigma = \left(\pi^3 m\alpha^2/2E\hbar^2\right)\operatorname{ctg}\theta/2\cdot d0.$$

5. Изотропно во всех случаях

7. Борн неприменим, если $\int\frac{d0}{4\pi}|f(\theta)|^2 > \frac{1}{k}f(0)$, где $f(\theta)$ – амплитуда I-го борновского приближения.

8. $$\frac{d\sigma}{d0} = \left(\frac{e^2}{2mv^2}\right)^2 |F(q)|^2 \sin^{-4}(\theta/2); \quad q = \frac{2mv}{\hbar}\sin\theta/2.$$

а) $F(q) = \exp(-q^2/4\alpha^2), \quad \alpha = \sqrt{m\omega/\hbar};$

б) $F(q) = e^{-q^2/4\alpha^2}\exp\left[-\frac{q^2/2\alpha^2}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}\right],$

при $\hbar\omega \ll kT$ $F(q)$ не зависит от $\hbar$, $F(q) = \exp\left[-\frac{q^2 kT}{2m\omega^2}\right]$.

9. $$\frac{d\sigma}{d0} = \left(\frac{e^2}{2mv^2}\right)^2\left[Z - F(q)\right]^2\sin^{-4}(\theta/2);$$

$$q = 2k\sin\theta/2; \quad F(q) = \left[1 + (qa_0/2)^2\right]^{-2}.$$

Точность 1%.

10. $d\sigma/d0 = 4\chi^2/\hbar^4; \quad \mu = \chi\mathcal{H}; \quad \hbar = \hbar/mc.$

11. $d\sigma \sim |Y_{em}(\vec{p}-\vec{k})|^2\cdot|f(\frac{\vec{p}}{2}-\vec{k})|^2\cdot j_\ell^2(|\vec{k}-\vec{p}|R),$

$\vec{p}$ – импульс дейтона; $\vec{k}$ – импульс протона, величина которого определяется законом сохранения $E_D - \varepsilon_D = E_p - \varepsilon_A$. Функция $f(\vec{q})$ учитывает внутреннее движение протона в дейтоне

$$f(\vec{q}) = \frac{2}{a}\left(a/2\pi\right)^{5/2}(1+q^2a^2)^{-1}; \quad a^2 = \hbar^2/2m\varepsilon_D,$$

$$\varepsilon_D = 2{,}2\ \text{Mev}; \quad j_\ell(x) = \sqrt{\pi/2x}\, J_{\ell+1/2}(x).$$

12. $\sin\theta/2 = \frac{\hbar\omega}{cp}$; p – импульс электрона; $\dot{w} = \left(\frac{e^2}{2m\hbar\omega^2}\right)^2\int U_\omega^2 d\omega$

см. [3], стр.261.

Указание: стоячую волну можно рассматривать как совокупность фотонов с импульсами $\vec{k}$ и $-\vec{k}$; рассеяние будет когерентным, если поглощается квант с импульсом $\pm\vec{k}$, а излучается с импульсом $\mp\vec{k}$. Поэтому

$$\dot{w} = \int\frac{d\sigma}{d0_{k'}}\cdot j_k\cdot dN_{\mp k}\, d0_{k'},$$

где $\frac{d\sigma}{d0_k'} = r_0^2$ – сечение томсоновского рассеяния, $j_k = \frac{1}{2}\frac{cU_\omega}{\hbar\omega}$ – поток падающих квантов; $dN_{k'} = \frac{1}{2}\frac{c^3 U_\omega d\omega}{\hbar\omega^3}\delta(\vec{n}-\vec{n}')$ – число квантов в конечном состоянии.

13. Фазы ВКБ определены с точностью до членов, порядка $(ka)^{-1}$; a – радиус действия сил. Борн применим, если $\delta_\ell \ll 1$.

Отсюда:

$$(ka)^{-1} \ll \delta_\ell \ll 1.$$

14. Фазы должны быть велики $\delta_\ell \gg (kr_0)^{-1}$ (см. 13 задачу). Отсюда

$$\ell \ll (kr_0)\ln\left(\frac{mU_0 r_0^2}{\hbar^2}\right).$$

15. Указание: существенны прицельные параметры ρ, для которых фазы $\delta_\ell \geq 1$.

По оценке ВКБ $\delta_\ell \sim 1$ при $U(\rho) \sim \frac{\hbar v}{\rho} \sim \frac{\hbar}{\tau} \sim \Delta E$, где ΔE – неопределенность в энергии на пролетных временах. Окончательно,

$$\sigma \sim \pi\rho^2 \sim \frac{\pi}{\varkappa^2}\ln^2(g^2/\hbar v).$$

I6.

а) $d\sigma = \frac{R}{4}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi\, dz$;

б) $d\sigma = \frac{\pi\, d\varphi\, dz}{2k}\left[\left(\ln\frac{kR}{2} + C\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}\right]^{-1}$; C – постоянная Эйлера; при $\ln\frac{kR}{2} \gg 1$ ответ совпадает с классическим.

I7.

а) $f_Б(\theta) = \frac{4mV_0R^3}{15\hbar^2}$; $\theta \ll (kR)^{-1}$,

$$f_Б(\theta) = \frac{4mV_0 \sin(kR\theta)}{\hbar^2 k^3\theta^3}; \quad (kR)^{-1} \ll \theta \ll 1;$$

б) $\delta_\ell = 0$; при $\ell + 1/2 > kR$,

$$\delta_\ell = -\frac{2}{3}\,\frac{mV_0R^2}{\hbar^2(kR)}\left[1 - \left(\frac{\ell+1/2}{kR}\right)^2\right]^{3/2}, \quad \ell + 1/2 < kR,$$

амплитуда $f(\theta) = \frac{2}{k}\int_0^{kR} \ell\, d\ell\, \delta_\ell J_0(\ell\theta)$ совпадает с п.а), что естественно, так как при $V_0 \ll \hbar^2 k/mR$ фазы $\delta_\ell \ll 1$, и применим Борн.

I8. $\delta(k, \rho) = -\frac{1}{2\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, U(\rho, z)$; $\rho = \ell/k$.

I9. $\frac{1}{\tau} = \frac{v\sigma}{2a_Б^3}$; σv не зависит от скорости.

2I. Для кулона оценка $\delta_0 \sim ka$ не применима, см. зад.20.

22. $\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0$; $f = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_0} - 1\right) = \frac{\operatorname{tg}\varkappa a - \varkappa a}{\varkappa - ik\operatorname{tg}\varkappa a}$,

где $\varkappa = \sqrt{(2mU_0/\hbar^2) + k^2} \approx \sqrt{2mU_0/\hbar^2}$; $\operatorname{tg}\delta_0 = kR\left(\frac{\operatorname{tg}\varkappa R}{\varkappa R} - 1\right)$.

При $\operatorname{tg}\varkappa R \approx \varkappa R$; $\sigma \to 0$ (эффект Рамзауэра).

Уровень дискретного спектра $|E_0| = \frac{\hbar^2 K_0^2}{2m}$ при $\varkappa \gg K_0$ определяется соотношением $\operatorname{tg}\varkappa a = -\varkappa/K_0$.

Выразим $\operatorname{tg}\varkappa a$ через K_0; $f = -[K_0 + ik]^{-1}$, так что полюса амплитуды рассеяния лежат на мнимой полуоси и соответствуют уровням дискретного спектра. Резонансное сечение рассеяния $\sigma = \frac{4\pi}{k^2 + K_0^2} \approx \frac{4\pi}{K_0^2}$. Для виртуального уровня $(-K_0) = \frac{\varkappa}{\operatorname{tg}\varkappa a} > 0$, $f = -[K_0 + ik]^{-1}$. Для отталкивания $\sigma = 4\pi R^2\left(\frac{\operatorname{th}\varkappa R}{\varkappa R} - 1\right)^2$; при $\varkappa R \gg 1$ $\sigma = 4\pi R^2$ – вчетверо больше классического.

23. $\delta_0 \approx ka\left(\frac{p-1/2}{p+1/2}\right)$; $p = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2mU_0a^2}{\hbar^2}}$; $\sigma = 4\pi a^2\left(\frac{p-1/2}{p+1/2}\right)^2$.

при $U_0 \ll \hbar^2/ma^2$ $\sigma = 4\pi a^2\left(\frac{2mU_0a^2}{\hbar^2}\right)^2$ совпадает с борновским.

24. При $1 \gg kr \gg \sqrt{k\lambda}$ $\lambda = \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2}}$, $f \sim \sin(kr + \delta_0) = r - a$,

где a – длина рассеяния: $a = -\delta/k$.

При $\sqrt{k\lambda} \gg kr \gg k\lambda$ $f \sim re^{-\lambda/r} \approx r - \lambda$. Таким образом, в области $\lambda \ll r \ll (1/k)$ f не зависит от k. Отсюда $a = \lambda$; $\sigma = 4\pi\lambda^2$.

25. $\sigma = \frac{\pi\hbar^2}{m(\varepsilon + E)}\sin^2(\theta/2)$.

Сечение $\sigma \sim \frac{\pi\hbar^2}{m\varepsilon} = 2\pi a_Б^2(\varepsilon_Б/\varepsilon)$ в 36 раз больше геометрического.

26. $d\sigma_к > d\sigma_я$ при малых углах рассеяния $\theta^2 \ll \frac{\mu c^2}{E}$. При очень больших энергиях $d\sigma_к > d\sigma_я$ может быть при больших углах рассеяния за счет экспоненциального убывания ядерного сечения с углом (дифракционный конус).

27. $\delta_0 - \delta_0^к = -0{,}1$; отталкивание.

28. $\bar\xi(\Sigma^+) = \bar\xi$; $\bar\xi(\Sigma^-) = -\bar\xi + 2\bar n(\bar{n}\bar{\xi})$.

29. $$P = \frac{2\left[|B|^2 + \operatorname{Re}(AB^*)\right]}{|A|^2 + 3|B|^2}.$$

30. $|\varepsilon_Б| \approx 0{,}06$ MeV.

3I. Амплитуда рассеяния на параводороде

$$\langle f\rangle = \frac{1}{2}(f_s + 3f_t); \quad \sigma = 4\pi|\langle f\rangle|^2.$$

Для реального уровня приведенные цифры дают $\sigma \approx 43$ барн, для виртуального $\sigma \approx 5{,}7$ барн, что гораздо ближе к эксперименту. Как видно, достаточно определить сечение лишь по порядку величины.

32. $\frac{d\sigma}{do} = |f_Б(\theta)|^2\cdot\left(1 + \xi^2 + \frac{1}{4}(ka)^4\sin^2\theta\right)$,

$$P = \frac{\xi(ka)^2\sin\theta}{1 + \xi^2 + \frac{1}{4}(ka)^4\sin^2\theta}.$$

33. $f = \frac{\mu e^2}{2Mc^2}\cdot\frac{1}{q^2}\left\langle \sigma_i\sigma_{n'}\left|(\bar q\times\bar\sigma_e)(\bar q\times\bar\sigma_n)\right|\sigma_e\sigma_n\right\rangle$,

$$d\sigma/do = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu e^2}{2Mc^2}\right)^2.$$

μ, M – магнитный момент нейтрона (в единицах $e\hbar/2Mc$) и его масса.

35. $f(\theta) = -a\left[1+(ka)^2\cos\theta\right]$,

$(d\sigma/do)_s = |f(\theta)+f(\pi-\theta)|^2 = 4a^2$,

$(d\sigma/do)_t = |f(\theta)-f(\pi-\theta)|^2 = 4a^2(ka)^4\cos^2\theta$.

36. $d\sigma(1/2;1/2) : d\sigma(0;0) = 1:4$.

37. $\overline{(d\sigma/do)} = 2\left(1+\frac{\sin qa}{qa}\right)(d\sigma/do)_{at}$;

$(d\sigma/do)_{at} = \left(\frac{\alpha m z_0^2}{\hbar^2}\right)\left[1+(qz_0/2)^2\right]^{-2}$.

Если $qa \ll 1$; $\frac{d\sigma}{do} = 4\left(\frac{d\sigma}{do}\right)_{at}$ – складываются амплитуды.

Если $qa \gg 1$, $\frac{d\sigma}{do} = 2\left(\frac{d\sigma}{do}\right)_{at}$ – складываются сечения.

Интерференция наблюдается, если $ka \le 1$; $E_e \sim 10\,ev$.

38. $\frac{d\sigma}{do} = \left(\frac{d\sigma}{do}\right)_{at}\cdot|F(q)|$; $F(q) = \frac{1}{N}\prod_{\alpha=1}^{3}\frac{\sin^2(N_\alpha q a_\alpha/2)}{\sin^2(q a_\alpha/2)}$,

при $N\to\infty$ $F(\vec q) = \frac{(2\pi)^3}{V}\delta(\vec q - 2\pi\vec\tau)$; $q = 2k\sin\theta/2$; $\vec\tau$ – вектор обратной решетки. Условие Вульфа-Брэгга $\vec q = 2\pi\vec\tau$.
Ширина дифракционных максимумов $\Delta\theta \sim 1/kL$.

39. $a = a_1 + a_2 - 2\frac{a_1 a_2}{R}$ (см. Смирнов [9]).

40. $f = f_1 e^{i\vec q\vec R/2} + f_2 e^{-i\vec q\vec R/2} + \frac{1}{R}e^{ikR}\left[f_2(\vec k'\vec k_R)f_1(\vec k_R\vec k)e^{i\frac{\vec k+\vec k'}{2}\vec R} + f_1(\vec k'\vec k_R)f_2(\vec k_R\vec k)e^{-i\frac{\vec k+\vec k'}{2}\vec R}\right]$,

где $\vec R = \vec r_1 - \vec r_2$; $\vec q = \vec k - \vec k'$, $\vec k_R = \frac{k}{R}(\vec r_1 - \vec r_2)$,
$\vec r_1, \vec r_2$ – координаты рассеивающих центров,
$\vec k, \vec k'$ – волновые вектора до и после рассеяния (см. Гольдбергер, Ватсон [10], стр.684).

41. а) конечно, б) бесконечно.

42. а) $d\sigma = 4\pi\left(\frac{e^2}{\hbar v}\right)^2\frac{dq}{q}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)e^{-\frac{\hbar q^2}{2m\omega}}$,

б) $d\sigma_n = 8\pi\left(\frac{e^2}{\hbar v}\right)^2\frac{dq}{q^3}\frac{\xi^n}{n!}e^{-\xi}$, $\xi \equiv \hbar q^2/2m\omega$.

43. $\dot\varepsilon = \int \frac{4\pi e^4}{mv}\ln(E/\hbar\omega)$.

44. $d\sigma_{(n=2)} = \pi\left(\frac{e^2}{\hbar v}\right)^2\frac{dq}{q^3}\cdot\frac{2^8(qa_B)^2}{(9/4+q^2a_B^2)^5}$;

$\sum d\sigma_{(n=2;\,l=1;\,m)} = d\sigma_{(n=2)}\cdot\frac{9/4}{(9/4)+(qa_B)^2}$;

$d\sigma_{(n=2;\,l=0)} = d\sigma_{(n=2)}\cdot\frac{(qa_B)^2}{(9/4)+(qa_B)^2}$.

45. Ответ, естественно, определяется формулой Резерфорда

$$d\sigma = \frac{\pi e^4}{E}\cdot\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

46. $\sigma_{on} = \frac{8\pi e^2}{(\hbar v_0)^2}(d_x)^2_{on}\cdot\ln\frac{v_{эф}}{|v_0 - v|}$

v – скорость электрона после рассеяния, ось x – вдоль вектора передачи импульса $\vec q$.

Сечение поглощения линейно поляризованного кванта с импульсом $\vec k \parallel \vec v_0$, проинтегрированное по линии поглощения

$$\frac{1}{\omega_{no}}\int d\omega\,\sigma_{no}^{погл} = \frac{(2\pi)^2}{\hbar c}|\vec e^{\,\lambda}\vec d_{no}|^2 = \frac{4\pi^2}{\hbar c}\omega_{no}|d^x_{no}|^2,$$

так что $\sigma_{on} = \frac{2\alpha}{\pi}\left(\frac{c}{v_0}\right)^2\left(\frac{1}{\omega_{no}}\int d\omega\,\sigma_{no}^{погл}\right)\ln\frac{v_{эф}}{|v_0 - v|}$.

47. Вероятность перехода $W = \sin^2(\nu t)$, где $\nu - \frac{e^2}{\hbar R}(a_B/R)^2$ величина, если $\tau_{столк.} \ge \tau_{пер.}$, где $\tau_{пер} \sim 1/\nu$ – время перехода.
Отсюда $R^2_{эф} \le e^2 a_B^2/\hbar v = (v_{ат}/v)a_B^2$.
При таких прицельных параметрах $\overline{W} = \overline{\sin^2\left(\int\nu dt\right)} = 1/2$.

48. $d\sigma = \left(\frac{V_0}{\pi}\right)^2\frac{Nm^3}{Msv\hbar^4}(v\cos\theta - s)^2\,do$ с условием $\cos\theta > \frac{s}{v}$; θ – угол вылета фонона с импульсом $q = \frac{2m}{\hbar}(v\cos\theta - s)$.

49. а) $\sigma(\gamma p \to \pi n) = \frac{\omega-\mu}{\mu}\sigma(\pi n - \gamma p)$,

б) $\sigma(pn \to d\gamma) = \frac{3(\hbar\omega)^2}{2Mc^2(\hbar\omega - E_0)}\sigma(d\gamma \to pn)$,

M – масса нуклона.

50. $d\sigma(ep \to H\gamma) = \frac{(\varepsilon + I_1)^2}{4mc^2\,\varepsilon}\,d\sigma_\phi(\varepsilon)$; $n = 1$,

$$d\sigma(e p - H\gamma) = \frac{(\varepsilon + I_2)^2}{mc^2\,\varepsilon}\, d\sigma_\varphi(\varepsilon); \qquad n = 2,$$

$\varepsilon = \hbar\omega - I$, I – потенциал ионизации.

5I. $$d\sigma(\pi^+\pi^- \to e^+e^-) = 4\left(\frac{E^2 - m_e^2c^4}{E^2 - m_\pi^2c^4}\right) d\sigma(e^-e^+ \to \pi^+\pi^-),$$

то же отношение между полными сечениями $\sigma(e^+e^- \leftrightarrow \pi^+\pi^-)$;

$$d\sigma(\gamma\gamma \to e^+e^-) = d\sigma(e^+e^- \to 2\gamma)\ (1 - m_e^2c^4/E^2),$$

$$\int \frac{d\sigma}{d\sigma}(\gamma\gamma \to e^+e^-)\,do = \sigma(\gamma\gamma \to e^+e^-) = 2\sigma(e^+e^- \to \gamma\gamma)\cdot\left(1 - \frac{m_e^2c^4}{E^2}\right).$$

§ II. Уравнение Дирака

3. Указанная инвариантность приводит к сохранению электромагнитного тока.

5. $\bar u u = 2mc$, $\bar u \gamma_\mu u = 2p_\mu$, $\bar u \gamma_5 u = 0$. В нерелятивистском приближении $\bar u_2 u_1 \approx 2mc\,\varphi_2^+\varphi_1$, $\bar u_2\gamma_\mu u_1 \approx (2mc\,\varphi_2^+\varphi_1,\ \varphi_2^+[\vec p_2 + \vec p_1 + i\vec\sigma\times(\vec p_2 - \vec p_1)]\varphi_1)$,
$\bar u_2\gamma_5 u_1 \approx \varphi_2^+\vec\sigma(\vec p_2 - \vec p_1)\varphi_1$, где φ_1, φ_2 – нерелятивистские двухкомпонентные спиноры.

6. $\gamma_\mu\gamma_\mu = 4$, $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu = -2\gamma_\nu$, $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\varkappa\gamma_\mu = 4\delta_{\nu\varkappa}$,
$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\varkappa\gamma_\lambda\gamma_\mu = -2\gamma_\lambda\gamma_\varkappa\gamma_\nu$.

8. $Sp\,\gamma_\mu\gamma_\nu = 4\delta_{\mu\nu}$, $Sp\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\varkappa\gamma_\lambda = 4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\varkappa\lambda} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\varkappa} - \delta_{\mu\varkappa}\delta_{\nu\lambda})$,
$Sp\,\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu = 0$, $Sp\,\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\varkappa\gamma_\lambda = 4i\varepsilon_{\mu\nu\varkappa\lambda}$.

9. $v_m = c\alpha_m$. Его собственные значения $\pm c$.

10. $$\frac{d}{dt}\left(\vec p - \frac{e}{c}\vec A\right) = e\vec{\mathcal E} + e\vec\alpha\times\vec{\mathcal H}.$$

15. $$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{\frac{1}{2m}\left[\vec\sigma\left(\vec p - \frac{e}{c}\vec A\right)\right]^2 + e\varphi - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \frac{e\hbar}{8m^2c^2}\left[-\hbar\,\mathrm{div}\,\vec{\mathcal E} + 2\vec\sigma[\vec p\times\vec{\mathcal E}] + i\hbar\vec\sigma\cdot\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal E}\right]\right\}\psi.$$

16. $$E_{nj} = -\frac{\alpha^2mc^2}{2n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+\frac12} - \frac34\right)\right],$$

где j – полный момент, $\alpha^2 = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$.

17. $$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(\vec p - \frac{e}{c}\vec A\right)^2 + e\varphi - \frac{p^4}{8m^3c^2}\right]\psi,$$

$$E_{nl} = -\frac{\alpha^2mc^2}{2n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l+\frac12} - \frac34\right)\right].$$

18. В атоме водорода разрешены 7 переходов, приводящих к 5 различным линиям. В случае уравнения Клейна-Гордона было бы 3 разрешенных перехода и 3 различных линии.

19. Лэмб-сдвиг: $\delta E \sim \alpha^5mc^2\ln\frac{1}{\alpha}$.
Аномальный магнитный момент электрона: $\delta E \sim \alpha^5mc^2$.
Сверхтонкое расщепление: $\delta E \sim \alpha^4mc^2\frac{m}{m_p}$, где m_p – масса протона.
Конечность размеров ядра: $\delta E \sim \alpha^2mc^2\left(\frac{r_0}{a}\right)^2$, где r_0 – радиус ядра, a – боровский радиус.

20. Нерелятивистский предел: $\vec\sigma\vec A$, где $\vec A$ – вектор Рунге-Ленца. С существованием этого интеграла связано двукратное вырождение уровней.

21. Пусть магнитное поле $\vec{\mathcal H} = (0, 0, \mathcal H)$. Выберем вектор-потенциал $\vec A = (0, \mathcal H x, 0)$.

$$E_{nsp_z} = \sqrt{e\hbar c\mathcal H(2n - s + 1) + p_z^2c^2 + m^2c^4},$$

где p_z – импульс вдоль магнитного поля, $s = \pm 1$, $n = 0, 1, 2, 3\ldots$

$$\psi_{s=1} = \frac{1}{\sqrt{L_yL_z2E(E+mc^2)}}\begin{pmatrix}(E+mc^2)v_n(\xi)\\ 0\\ cp_zv_n(\xi)\\ -i\sqrt{2e\hbar c\mathcal H n}\,v_{n-1}(\xi)\end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(p_yy + p_zz)};$$

$$\psi_{s=-1} = \frac{1}{\sqrt{L_yL_z2E(E+mc^2)}}\begin{pmatrix}0\\ (E+mc^2)v_n(\xi)\\ i\sqrt{2e\hbar c\mathcal H(n+1)}\,v_{n+1}(\xi)\\ -cp_zv_n(\xi)\end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(p_yy + p_zz)}.$$

Здесь $\xi = \sqrt{\frac{e\mathcal H}{\hbar c}}\left(x - \frac{cp_y}{e\mathcal H}\right)$, $v_n(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi)\left(\frac{e\mathcal H}{\pi\hbar c}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^nn!}}$,

где $H_n(\xi)$ – полином Эрмита. Волновые функции удовлетворяют условию нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_0^{L_y}dy\int\limits_0^{L_z}dz\,\psi^+\psi = 1$.

22. $\frac{e\hbar}{2mc}(1+x)$.

24. $\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4p^2v^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$.

25. $\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4p^2v^2\sin^4\frac{\theta}{2}}$.

§ I2. Изотопический спин. Различные правила отбора. Простейшие оценки в квантовой электродинамике

4. 9:2:I

6. Моменты четны

7. а) нет, б) нет, в) нет.

8. а) нет, б) да, в) да.

9. а) нет, б) нет.

I3. Линейные поляризации ортогональны.

I4. Нет.

I5. Триплетные S-уровни смещаются вверх на расстояние $\sim\alpha^4mc^2$.

I6. $\sigma\sim\pi\alpha^2\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\frac{c}{v}=\pi r_0^2\frac{c}{v}$, $r_0=\frac{e^2}{mc^2}$.

I7. $\tau_{\text{пара}}\sim\frac{\hbar}{\alpha^5mc^2}\sim10^{-10}$ сек., $\tau_{\text{орто}}\sim\frac{\hbar}{\alpha^6mc^2}\sim10^{-7}$ сек.

I8. Вероятность перехода с излучением выше примерно на 4 порядка ($\sim\alpha^{-2}$).

I9. Угловое распределение $\sim\sin^2\theta$, пороговая зависимость $\sim p^3$.

20. $\frac{W(\eta\to e^+e^-)}{W(\eta\to\mu^+\mu^-)}\sim\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2$.

2I. $\exp\left(-\frac{m^2c^3}{e\hbar\mathcal{E}}\right)$.

22. Уменьшается.

23. $\sigma\sim\alpha\frac{v}{c}\pi\alpha^2\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2=\pi r_0^2\frac{v}{c}\alpha^4$, $\lambda=\frac{\hbar}{mc}$.

ЛИТЕРАТУРА

I. ЛАНДАУ Л.Д., ЛИФШИЦ Е.М., Квантовая механика, Москва (I963).

2. ЛАНДАУ Л.Д., ЛИФШИЦ Е.М., Механика, Москва (I958).

3. БЕРЕСТЕЦКИЙ В.Б., ЛИФШИЦ Е.М., ПИТАЕВСКИЙ Л.П., Релятивистская квантовая теория, Часть I (I968).

4. КОГАН В.И., ГАЛИЦКИЙ В.М., Сборник задач по квантовой механике (I956).

5. ГОЛЬДМАН И.И., КРИВЧЕНКОВ В.Д., Сборник задач по квантовой механике (I957).

6. ФЕРМИ Э., Избранные научные труды (I972).

7. ДАВЫДОВ А.С., Квантовая механика (I957).

8. ЗЕЛЕВИНСКИЙ В.Г., Конспект лекций по квантовой механике, НГУ, I970.

9. СМИРНОВ Б.М., Физика слабоионизированного газа в задачах с решениями, Наука, I972.

I0. ГОЛЬДБЕРГЕР М., ВАТСОН К., Теория столкновений, Мир, I967.

II. ФЕЙНМАН Р. и др., Фейнмановские лекции по физике, Мир, I97I.

I2. БАЗЬ А.И., ЗЕЛЬДОВИЧ Я.Б., ПЕРЕЛОМОВ А.М., Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, Наука, I97I.