Министерство образования Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.В. Павлинский

Физика рентгеновского излучения

Сборник задач

Иркутск 2003 г

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

УДК 537.5 (076.2)
ББК В346я73

Рецензент: д. ф.-м. н, профессор Афанасьев А.Д.

Павлинский Г.В. Физика рентгеновского излучения: Сборник задач. – Иркутск: ИГУ, 2003.-с. 47

Сборник содержит 47 задач по различным разделам лекционного курса «Физика рентгеновского излучения». Для всех задач приведены их решения. Задачи ориентированы на студентов физических специальностей.

Оглавление

Раздел 1. Систематика рентгеновских спектров

Задача №1

Расписать по энергетическим состояниям электроны в атоме аргона (Z=18).

Решение

Согласно принципу Паули в атоме нет электронов, находящихся в одинаковом энергетическом состоянии. Энергия каждого из них определяется главным, азимутальным, магнитным и спиновым квантовыми числами.

Для атома аргона(Z=18): Электроны распределены по состояниям следующим образом: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6 3s^2 3p^6$, где 1, 2, 3 -главные квантовые числа; s и p соответствуют азимутальному квантовому числу l=0 и l=1; верхние индексы указывают число электронов для указанных главного и азимутального квантовых чисел (их сумма равна атомному номеру Z=18). В предложенной записи не отражена ориентация в пространстве азимутальных моментов. Детализация дает следующее распределение:

$n=1; l=0$

l	m_l	M_s	j	$g=2j+1$	состояние	оболочка
0	0	- 1/2	1/2	2	$1s^2$	K
0	0	+1/2				

$n=2; l=0, 1$

l	m_l	m_s	j	$g=2j+1$	состояние	оболочка
0	0	- 1/2	1/2	2	$2s^2$	L_1
0	0	+1/2				
1	0	- 1/2	1/2	2	$2p^2$	L_2
1	0	+1/2				
1	- 1	- 1/2	3/2	4	$2p^4$	L_3
1	-1	+1/2				
1	+1	- 1/2				
1	+1	+1/2				

$n=3; l=0, 1, 2.$

l	m_l	m_s	j	$g=2j+1$	состояние	оболочка
0	0	- 1/2	1/2	2	$3s^2$	M_1
0	0	+1/2				

1	*0*	*- 1/2*	*1/2*	*2*	*3p²*	M_2
1	*0*	*+1/2*				
1	*- 1*	*-1/2*	*3/2*	*4*	*3p⁴*	M_3
1	*- 1*	*+1/2*				
1	*+1*	*- 1/2*				
1	*+1*	*+1/2*				

Задача №2

Рассчитать относительную интенсивность L*h*- и L*l*-линий рентгеновского характеристического излучения. Сравнить полученный результат с экспериментальными данными, приведенными для циркония, ниобия, молибдена, вольфрама, золота и урана в Справочнике М.А.Блохина и И.Г. Швейцера. Объяснить расхождения для высоких Z.

Решение

Указанные линии являются мультиплетом (у них общий конечный уровень перехода М1, что можно установить, например, из Справочника М.А.Блохина и И.Г. Швейцера). Поэтому относительная интенсивность этих линий согласно правилу Бургера-Доргелло должна определяться “заселенностью” (или статистическим весом) уровней перехода, которые обусловливают различие названных линий.

Вычисления

Рассматриваемые линии обусловлены переходами:

$$Lh\colon L_2 \text{ ® } M_1;$$

$$Ll\colon \ L_3 \text{®} M_1;$$

Для уровня L_2 квантовое число $j=1/2$ и поэтому число электронов на этом уровне равно 2.

Для уровня L_3 квантовое число $j=3/2$ и поэтому число электронов на этом уровне равно 4.

Следовательно, относительная интенсивность рассматриваемых линий

$$\frac{I_{L\eta}}{I_{Ll}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

В Справочнике М.А. Блохина и И.Г. Швейцера находим, что для Zr, Nb и Mo относительная интенсивность рассматриваемых линий действительно близка к 1/2. Для более высоких атомных номеров имеем следующие соотношения этих линий: *W: »1/3; Th:»1/6; Au:»1/7; U:»1/5.* Такое несоответствие вызвано переходами Костера-Кронига внутри *L*-оболочки, которые увеличивают число вакансий на L_3-подуровне, что приводит к изменению относительной интенсивности в пользу L_l-линии. Переходы Костера-Кронига внутри *L*-оболочки как раз наиболее вероятны для элементов с высокими атомными номерами (*Z*>73).

Задача №3

Используя закон Мозли, найти длину волны CrK_α-линии (Z=24), если известно, что $\lambda_{NiK\alpha}$=1.658A^O и $\lambda_{SiK\alpha}$=7.125A^O. Полученный результат сравнить с табличным.

Решение

Закон Мозли для длины волны характеристического излучения:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \chi(Z - \sigma)$$

Зная атомные номера и длины волн характеристических линий двух элементов, можно определить величины постоянных *c* и *s*. Используя эти постоянные можно найти длину волны некоторого третьего элемента по формуле:

$$\lambda = \frac{1}{\chi^2 (Z - \sigma)^2}.$$

Вычисления

Для никеля и кремния запишем:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1.658}} = \chi(28 - \sigma) \\ \frac{1}{\sqrt{7.125}} = \chi(14 - \sigma) \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяют значения *c=0.0287* и *s=0.95*. Подставляя эти значения в конечную формулу, получаем:

$$\lambda = \frac{1}{0.0287^2 (24 - 0.95)^2} = 2.285A^0$$

Из Справочника М.А. Блохина и И.Г. Швейцера находим, что длина волны $CrKa_1$-линии равна 2.2897A^0. С учетом приближенного характера закона Мозли согласие полученного результата с истинным является вполне удовлетворительным.

Задача №4

Оценить постоянную внутреннего экранирования s_2 для $L_{2,3}$ - подуровней, используя данные о длинах волн характеристического рентгеновского излучения (на примере рубидия, $Z=37$, энергия Ридберга $Rhc=13,606$ eV; постоянная тонкой структуры $a^2 = 5,3262´10^{-5}$).

Решение

Постоянная внутреннего экранирования s_2 может быть найдена с использованием выражения для разности DE энергии спин-дублетных уровней $L_{2,3}$. Это выражение получается из формулы для энергии уровней и имеет вид

$$DE = Rhc\frac{\alpha^2(Z-\sigma_2)^4}{n^3 l(l+1)}$$

Откуда

$$\sigma_2 = Z - \sqrt[4]{\frac{\Delta E n^3 l(l+1)}{Rhc\alpha^2}}. \qquad (1)$$

В выражении (1) все величины известны, кроме разности энергий подуровней спин-дублета. Эта разность равна разности энергий характеристических линий, обусловленных переходом электронов с рассматриваемых подуровней на некоторый общий уровень. Такими характеристическими линиями для $L_{2,3}$ - подуровней является рентгеновский спин-дублет $Ka_{1,2}$. Энергия излучения E связана с его длиной волны l соотношением:

$$E[keV] = \frac{12,3952}{\lambda[A^0]}.$$

Поэтому для разности энергий DE линий Ka_1 и Ka_2 получаем:

$$DE[eV]=12395,2\left(\frac{1}{\lambda_{K.\alpha 1}} - \frac{1}{\lambda_{K.\alpha 2}}\right) \qquad (2)$$

Или, подставляя (2) в выражение (1) окончательно получаем:

$$\sigma_2 = Z - \sqrt[4]{12395,2\left(\frac{1}{\lambda_{K.\alpha 1}} - \frac{1}{\lambda_{K.\alpha 2}}\right)\frac{n^3 l(l+1)}{Rhc.\alpha^2}}. \qquad (3)$$

Вычисления

Рассматривается *L*- оболочка (главное квантовое число $n=2$). Для подуровней $L_{2,3}$ азимутальное квантовое число $l=1$. Величины энергии Ридберга *Rhc* и постоянной тонкой структуры a^2 известны. Для рассматриваемого случая рентгеновского излучения рубидия (Z=37) длина волны $RbKa_1= 0{,}92555A^0$ и длина волны $RbKa_2=0{,}92969A^0$. Подставим эти величины в (3):

$$\sigma_2 = 37 - \sqrt[4]{12395{,}2\left(\frac{1}{0{,}92555} - \frac{1}{0{,}92969}\right)\frac{2^3 \times 1 \times 2}{13{,}606 \times 5{,}3262 \times 10^{-5}}};$$

$$\sigma_2 = 37 - \sqrt[4]{12395{,}2 \times 4{,}80764 \times 10^{-3} \times 0{,}22079 \times 10^5} = 37 - 10\sqrt[4]{129{,}5} = 3{,}3.$$

В монографии М.А. Блохина приведена постоянная внутреннего экранирования для подуровней $L_{2,3}$, равная 3,5.

Задача № 5

Показать, что в группе редких земель (лантаноидов) должны быть элементы от Z = 57 до Z = 71.

Решение

Начиная с Z = 57 (лантана) начинается заполнение $4f$ оболочки. Число электронов в оболочке определяется величиной $2(2l+1)$. Оболочке f соответствует величина $l = 3$. Поэтому число электронов в f - оболочке равно 2*(2*3+1) =14. То есть f - оболочка заполнится у элемента с $Z = 57+14 =71$ (лютеций).

Задача № 6

Определить число электронов в заполненной n - оболочке атома (n = 3 и 4), у которых одинаковы следующие квантовые числа: *а)* m_s; *б)* $m_l = +1$; *в)* $m_s = - 1/2$ и $m_l = - 1$;

Решение

а) Число электронов в заполненной n -оболочке равно $2n^2$. Половина из них имеет одинаковое направление спина. То есть число электронов с одинаковым m_s есть n^2. Для $n = 3$ - это 9 электронов; для $n = 4$ - это 16 электронов.

б) Главному квантовому числу n соответствует n возможных значений азимутальных квантовых чисел l (0, 1, ..., n-1). При $l = 0$ величина магнитного квантового числа m_l не может быть равна +1 (m_l не может быть больше l). Каждому из остальных (n-1) значений l соответствует только одно магнитное квантовое число m_l , равное +1 т.е всего $(n-1)$ таких значений. Каждому значению m_l соответствует 2 значения спина. Поэтому число электронов, для которых будет одинаковой величина m_l = +1, оказывается равным $2(n-1)$. Следовательно, для $n = 3$ число электронов с $m_l = +1$ равно $2*(3-1) = 4$; для $n = 4$ число электронов с $m_l = +1$ равно $2*(4-1) = 6$;

в) Поскольку кроме величины m_l = -1 задана ориентация спина, то каждому m_l соответствует только один электрон такой ориентации, и в предыдущем рассмотрении следует убрать умножение на 2. Тогда для $n = 3$ число электронов с $m_l = -1$ и $m_s = -1/2$ будет равно $n-1$, то есть 3 -1 =2. Аналогично для $n = 4$ число таких электронов будет 4 - 1 = 3.

Задача № 7

Начиная с какого элемента периодической таблицы можно наблюдать K - и L - серии рентгеновского излучения?

Решение

K - серия рентгеновского излучения связана с переходами электронов с L- оболочки на вакансию в K -оболочке. Электрон в L - оболочке появляется у лития (Li, $Z=3$). В свободном атоме, он оказывается в 2s состоянии, переход из которого в 1s состояние (на K-оболочку) запрещен правилами отбора ($\Delta l=0$). Однако в конденсированных средах межатомные связи могут перевести этот электрон в 2p - состояние, из которого такой переход возможен. Поэтому линии K-серии для конденсированных сред появляются, начиная с лития.

L - серия связана с переходами электрона с M- оболочки на L - оболочку. L - оболочка заполняется у неона (Z=10) и первый электрон в M - оболочке появляется у натрия (Z = 11). Следовательно, с теми же оговорками у этого элемента появляется L - серия рентгеновского излучения.

Задача № 8

Используя выражение для энергии рентгеновских уровней, оценить энергию *Кα* - линии вольфрама ($Z=74$). Энергия Ридберга Rhc = 0.0136 кэв; постоянные полного экранирования: $s_K = 0{,}3$; $s_L = 15$. Релятивистскую поправку не учитывать.

Решение

Энергия уровня без релятивистской поправки определяется выражением

$$E = Rhc \times (Z-\sigma)^2 / n^2$$

Энергия K_α - линии определяется разностью энергий уровней, производящих данную линию:

$$E_{K\alpha} = E_K - E_L = Rhc[(Z-\sigma_K)^2 / 1^2 - (Z-\sigma_L)^2 / 2^2].$$

Подставляя приведенные в условиях задачи величины, получаем для вольфрама: $E_{WK\alpha} = 0{,}0136 \times [(74-0{,}3)^2 - (74-15)^2 / 4] = 0{,}0136 \times [5432 - 870] = 62$ кэв

Справочные данные для $E_{WK\alpha 1}$- линии дают величину 59,3 кэв.

Раздел 2 Интенсивность характеристического и тормозного рентгеновского излучения. Источники излучения

Задача № 9

Используя формулу Крамерса, определить положение максимума в волновом спектральном распределении интенсивности тормозного рентгеновского излучения и в распределении числа квантов этого излучения относительно коротковолновой границы спектра.

Решение

Закон Крамерса для спектральной интенсивности тормозного рентгеновского излучения:

$$I_\lambda = \mathrm{Const}\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \lambda^3}$$

Если интенсивность выражена числом квантов на единицу длины волны, то в этом случае получаем:

$$N_\lambda = \mathrm{Const}\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \lambda^2}$$

Максимум этих спектральных распределений находится при нулевом значении производной от функций.

Нахождение максимумов:

Для интенсивности:

$$\frac{dI_\lambda}{d\lambda} = \frac{\lambda_0\lambda^3 - 3\lambda_0\lambda^2(\lambda - \lambda_0)}{(\lambda_0\lambda^3)^2} = 0$$

откуда $l_{max}=3/2\ l_0$.

Для числа квантов:

$$\frac{dN_\lambda}{d\lambda} = \frac{\lambda_0\lambda^2 - 2\lambda_0\lambda(\lambda - \lambda_0)}{(\lambda_0\lambda^2)^2}$$

откуда $l_{max}=2\ l_0$.

Задача № 10

Во сколько раз изменится интенсивность характеристической *CuKa* - линии медного анода при увеличении напряжения на рентгеновской трубке от 20 кв до 40 кв? Угол выхода излучения из анода принять равным 45^0. Обратное рассеяние электронов не учитывать.

Решение

Интенсивность рентгеновского излучения, возбужденного пучком электронов, определяется зависимостью:

$$I = Const \times \frac{1}{Z}(U_0 \ln U_0 - U_0 + 1) \times f(\chi) \times R\,, \qquad (1)$$

где $U_o=E_o\ /\ E_q$ - превышение начальной энергии налетающих электронов над энергией связи электронов в *q* - оболочке атомов; *R* - поправка на обратное рассеяние электронов (по условию принимаем *R=1*); *f(c)* - поправка на поглощение испускаемого анодом рентгеновского излучения. Поправка на поглощение задается функцией Филибера:

$$f(\chi) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\chi}{\sigma}\right)\left(1 + \frac{h}{1+h} \times \frac{\chi}{\sigma}\right)}, \qquad (2)$$

где $c=m\ /\ Sin y$ (*m* -массовый коэффициент ослабления рентгеновского излучения);

y - угол выхода этого излучения из анода;

h=1,2´A / Z^2 (*A* и *Z-* атомный вес и атомный номер материала анода, соответственно);

s - коэффициент Ленарда, характеризующий глубину проникновения электронов в материал анода:

$$\sigma = \frac{4{,}5\times10^5}{E_0^{1,67} - E_q^{1,67}}$$

Соотношение интенсивностей *CuKa* - линии при напряжениях 40 кв и 20 кв определится, как:

$$\frac{I_{40}}{I_{20}} = \frac{(U_{40}\ln U_{40} - U_{40} + 1)\times f_{40}(\chi)}{(U_{20}\ln U_{20} - U_{20} + 1)\times f_{20}(\chi)}. \qquad (3)$$

<u>*Вычисления*</u>

Массовый коэффициент *m* ослабления *CuKa* - излучения в медном аноде равен: *m=53,7см*^{2}*г*$^{-1}$. Поэтому *c=m /Siny=53,7 / 0,707=75,95.* Поправки на поглощение для 20 кв и 40 кв, определяемые по формуле (2), отличаются только входящими в эту формулу величинами *s* коэффициентов Ленарда. Найдем эти величины, учитывая, что энергия связи электронов *К* - оболочки меди равна E_q*=8,98кэв.*

$$\sigma_{20} = \frac{4{,}5\times10^5}{20^{1,67} - 8{,}98^{1,67}} = \frac{4{,}5\times10^5}{109{,}7} = 4{,}10\times10^3;$$

$$\sigma_{40} = \frac{4{,}5\times10^5}{40^{1,67} - 8{,}98^{1,67}} = \frac{4{,}5\times10^5}{434{,}53} = 1{,}04\times10^3.$$

Подставим полученные величины в (2). При этом примем во внимание, что *h=1,2´A / Z*^{2} =1,2×63,55 / 29^2=0,0907.

$$f_{20}(\chi) = \frac{1}{\left(1+\frac{75{,}95}{4{,}1\times10^3}\right)\left(1+\frac{0{,}0907}{1+0{,}0907}\frac{75{,}95}{4{,}1\times10^3}\right)} = \frac{1}{1{,}0185\times1{,}00154} = 0{,}980;$$

$$f_{40}(\chi) = \frac{1}{\left(1+\frac{75{,}95}{1{,}04\times10^3}\right)\left(1+\frac{0{,}0907}{1+0{,}0907}\frac{75{,}95}{1{,}04\times10^3}\right)} = \frac{1}{1{,}073\times1{,}00607} = 0{,}926.$$

Найденные поправки Филибера свидетельствуют, что ослабление рентгеновского излучения в материале анода составляет в рассматриваемом случае примерно 2% для E_0*=20 кэв* и примерно 7,5% для E_0*=40 кэв.*

Принимая во внимание, что $U_{20}=20\ /\ 8{,}98=2{,}227$ и $U_{40}=40\ /8{,}98=4{,}45$, и подставляя найденные величины в выражение (3), окончательно получаем:

$$\frac{I_{40}}{I_{20}}=\frac{(4{,}45\ln 4{,}45-4{,}45+1)\times 0{,}926}{(2{,}227\ln 2{,}227-2{,}227+1)\times 0{,}980}=\frac{3{,}193\times 0{,}926}{0{,}556\times 0{,}980}=5{,}4\,.$$

Таким образом, при увеличении напряжения на рентгеновской трубке от 20 до 40 кв интенсивность характеристической *CuKa* - линии выраcтет в 5,4 раза.

Задача № 11

Найти направление, соответствующее максимальной интенсивности тормозного рентгеновского излучения тонкого анода, учитывая, что напряженность электрического поля в некоторой точке, удаленной от анода на расстояние *R* определяется выражением $E=\frac{ae}{c^2R}\frac{Sin\varphi}{(1-\beta Cos\varphi)^3}$.

Угол *j* представляет собой угол между начальной скоростью электронов и направлением *R*.

Решение

Интенсивность рентгеновского излучения в направлении *R* определяется вектором Умова-Пойнтинга $I=\frac{c}{4\pi}E^2=Const\frac{Sin^2\varphi}{(1-\beta Cos\varphi)^6}$

Для нахождения угла *j* , соответствующего максимальной интенсивности тормозного излучения, определим максимум полученной функции путем приравнивания нулю ее производной.

Нахождение максимума:

$$\frac{dI}{d(Cos\varphi)}=\frac{d}{d(Cos\varphi)}\left(\frac{1-Cos^2\varphi}{(1-\beta Cos\varphi)^6}\right)=0\,;$$

$$\frac{-2Cos\varphi\times(1-\beta Cos\varphi)^6-6\times(1-\beta Cos\varphi)^5\times(-\beta)\times(1-Cos^2\varphi)}{(1-\beta Cos\varphi)^{12}}=0\,;$$

$$-2Cos\varphi+2\beta Cos^2\varphi+6\beta-6\beta Cos^2\varphi=0\,;$$

$$2\beta Cos^2\varphi+Cos\varphi-3\beta=0\,;$$

$$\mathrm{Cos}\varphi_{max} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24\beta^2}}{4\beta} = \frac{1}{4\beta}(\sqrt{1+24\beta^2} - 1)$$

(Второй корень отброшен, так как при нем значение косинуса превышает единицу.)

Задача № 12

Определить начальную скорость электронов (в единицах скорости света), если максимум пространственного распределения их тормозного излучения при прохождении тонкой мишени составляет с направлением первичного пучка угол 45^0.

Решение

Зависимость направления максимальной величины тормозного излучения электронов при прохождении ими тонкой мишени определяется выражением:

$$\cos\varphi_{max} = \frac{1}{4\beta}\left(\sqrt{1+24\beta^2} - 1\right)$$

где β - отношение скорости электронов к скорости света (то есть искомая величина).

При $\varphi_{max} = 45^0$ имеем:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4\beta}\left(\sqrt{1+24\beta^2} - 1\right);$$

$$\left(4\beta\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 = \left(\sqrt{1+24\beta^2}\right)^2;$$

$$8\beta^2 + 4\sqrt{2}\beta + 1 = 1 + 24\beta^2;$$

$$8\beta + 4\sqrt{2} = 24\beta;$$

$$4\beta = \sqrt{2};$$

$$\beta = \frac{1.4}{4} \approx 0.35$$

Т.е скорость электронов составляет величину 0.35 в единицах скорости света.

Задача № 13

Какова наиболее короткая длина волны рентгеновского излучения, испускаемая экраном телевизионной трубки под действием пучка электронов, обеспечивающего изображение? Напряжение на телевизионной трубке 10 кв.

Решение

Возникающее на экране тормозное рентгеновское излучение имеет коротковолновую границу, которая определяется энергией падающих электронов: $h\nu = hc/\lambda = eV$, где λ - длина волны возникшего излучения, а V - потенциал, ускоряющий электроны. Следовательно, l = ***hc/eV***. Если потенциал брать в киловольтах, а длины волн получать в ангстремах, то

$$\lambda = 12{,}4/V.$$

Для нашего случая $\lambda = 12{,}4 / 10 = 1{,}24$ A^0.

Задача № 14

Как ослабится тормозное излучение с длиной волны 5 A^0 при выходе из медной мишени под углом 30^0, если падающие на нее электроны имеют энергию 40 кэВ? Массовый коэффициент поглощения рассматриваемого излучения в меди принять равным 1300 $см^2г^{-1}$.

Решение

Ослабление излучения, возникшего в мишени при падении на нее пучка электронов, может быть рассчитано по формуле Филибера

$$f(\chi) = \left(1 + \frac{\chi}{\sigma}\right)\left(1 + \frac{h}{1+h}\frac{\chi}{\sigma}\right)$$

где $\sigma = \dfrac{4.5\times 10^5}{E^{1.67} - E_\lambda^{1.67}}$ - коэффициент ослабления электронного пучка (коэффициент Ленарда);

$$h = 1.2\frac{A}{Z^2};$$

$$\chi = \frac{\mu(\lambda)}{\sin\varphi};$$

A и Z – атомный вес и атомный номер элемента мишени, соответственно;

$\mu(\lambda)$ - массовый коэффициент поглощения мишенью излучения с длиной волны λ;

φ - угол выхода излучения из мишени.

Вычисления

χ = 1300 / 0.5 = 2600 см^{2}г$^{-1}$;
h = 1.2×63,5 / (29)^2 = 0.0906; h / (1+h) = 0.0906 / (1+0.0906) =0.0831;

$$\sigma = \frac{4.5\times10^5}{40^{1.67} - \left(\frac{12.4}{5}\right)^{1.67}} = \frac{4.5\times10^5}{473.6 - 4.6} = 9.59\times10^2;$$

χ / σ = 2600 / 959 = 2.71;
f(χ) = (1+2.71)(1+0.083×2.71) = 4.01 раза.

Интенсивность тормозного излучения с длиной волны 5 A^0 ослабится при выходе из медной мишени в 4.01 раза.

Задача №16

Оценить, как изменится контрастность AuLα_1 - линии первичного излучения рентгеновской трубки при увеличении потенциала с 20 кВ до 40 кВ.

Решение

Контрастность K линии первичного рентгеновского спектра (отношение интенсивности характеристической линии к интенсивности тормозного рентгеновского излучения под этой линией) определяется зависимостью

$$K = \frac{I_{ch}}{I_{con}} \approx \mathrm{Const}\frac{1}{Z^2}\left(\frac{U\ln U}{U-1} - 1\right)$$

где U – превышение энергии электронов катодного пучка над энергией связи электронов q – оболочки в атоме.
С учетом того, что возрастает только потенциал на трубке, изменение контрастности линии определяется выражением:

$$n = \frac{K_{40}}{K_{20}} = \frac{U_{40}\ln U_{40} - U_{40} + 1}{U_{20}\ln U_{20} - U_{20} + 1} \times \frac{U_{20} - 1}{U_{40} - 1}$$

Вычисления

Для выполнения расчетов по полученной формуле нужно предварительно найти величины «перенапряжений» U_{20} и U_{40} для линии AuLα_1. Эта линия возникает при ионизации L_3 – подуровня. Из справочника М.А. Блохина и И.Г. Швейцера находим для энергии связи электронов AuL$_3$ –уровня величину 11.92 кэВ.

Поэтому $U_{20} = \dfrac{20}{11.92} = 1.68$ и $U_{40} = \dfrac{40}{11.92} = 3.36$

Подставляя полученные величины в основную формулу, получаем:

$$n = \frac{3.36\ln 3.36 - 3.36 + 1}{1.68\ln 1.68 - 1.68 + 1} \times \frac{1.68 - 1}{3.36 - 1} = \frac{1.72}{0.19} \times \frac{0.68}{2.36} = 2.6$$

Таким образом, при увеличении потенциала на рентгеновской трубки с 20 до 40 кВ контрастность AuL_{α} - линии вырастет в 2.6 раза.

__Задача №17__

Какова энергия электронов в синхротроне, если максимум интенсивности энергетического спектрального распределения рентгеновских фотонов наблюдается при энергии 15 кэВ. Радиус орбиты в накопительном кольце синхротрона равен 20 м.

Решение

Максимум в энергетическом распределении тормозного рентгеновского излучения электронов E_{max} (в кэВ), движущихся в накопительном кольце синхротрона, определяется выражением:

$$E_{max}[\text{кэВ}] = \frac{2{,}218 \times \varepsilon[\text{ГэВ}]^3}{R[\text{м}]}$$

где *e* - энергия электронов (в ГэВ), R – радиус орбиты электронов (в метрах).

Откуда $$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{E_{max} \times R}{2.218}}[\text{ГэВ}]$$

__Вычисления__

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{15 \times 20}{2.218}} = 5.13 \text{ ГэВ}$$

Электроны в накопительном кольце синхротрона должны иметь энергию 5.13 ГэВ.

__Задача №18__

Возможно ли возникновение в равновесной высокотемпературной плазме с температурой $5 \times 10^{8}\ {}^{0}$К характеристического рентгеновского К - излучения атомов молибдена (если таковые в ней окажутся)?

Решение

Средняя энергия электронов в равновесной плазме определяется распределением Максвелла и может быть задана выражение

$$E\ [эВ] = K \times T[^0K];$$

где постоянная Больцмана К определена как 8.62×10^{-5} [эВ / ^{0}К].

Вычисления

Средняя энергия электронов в плазме при температуре $5 \times 10^8\ ^0K$ оказывается

$$E = 8.62 \times 10^{-5} \times 5 \times 10^{8} = 43 \times 10^3\ эВ = 43\ кэВ.$$

Согласно Справочнику М.А. Блохина и И.Г. Швейцера потенциал ионизации К – оболочки атомов молибдена составляет 20 кэВ. Следовательно, возникновение К – излучения атомов молибдена при рассматриваемых условиях должно происходить.

Задача № 19

Какова наиболее короткая длина волны рентгеновского излучения, испускаемая экраном телевизионной трубки под действием пучка электронов, обеспечивающих изображение? Напряжение на телевизионной трубке 10 кв.

Решение

Возникающее на экране тормозное рентгеновское излучение имеет коротковолновую границу, которая определяется энергией падающих электронов: $hn = hc/l = eV$, где l - длина волны возникшего излучения, а V - потенциал, ускоряющий электроны. Следовательно, $l = hc/eV$. Если потенциал брать в киловольтах, а длины волн получать в ангстремах, то

$l = 12{,}4/V$.

Вычисления

Для рассматриваемого случая

$$\lambda = 12{,}4 / 10 = 1{,}24\ A^0.$$

Минимальная длина волны тормозного излучения, возникающего на телевизионном экране, равна 1.24 A^0.

Задача №20

Определить максимум в энергетическом спектре рентгеновского излучения синхротрона, если электроны с энергией 4.16 ГэВ движутся в его магнитном поле по траектории с радиусом 20 м.

Решение

Тормозное излучение электронов, движущихся в магнитном поле синхрофазотрона, имеет максимум, приходящийся на энергию рентгеновских квантов, определяемую выражением:

$$E_{max} = \frac{2{,}218 \times \varepsilon^3}{R}$$

где энергия электронов *е* выражена в Гэв, радиус R орбиты электронов в магнитном поле синхротрона выражен в метрах, а энергия рентгеновских квантов выражена в Кэв.

Вычисления

$$E_{max} = \frac{2{,}218 \times 4{,}16^3}{20} = 7{,}98 \text{ кэв.}$$

Раздел 3. Поглощение рентгеновского излучения

Задача №21

Рассчитать коэффициенты ослабления рентгеновского излучения в стали (C_{Cr}=20% ; C_{Fe}=70% ; C_{Ni}=10%) для длин волн λ=1.7A^O и λ=1.9A^O. Объяснить изменение $\mu(\lambda)$.

Решение

Для материалов сложного состава коэффициент ослабления $\mu(\lambda)$ рассчитывается по простой формуле:

$$\mu(\lambda) = \sum_i C_i \mu_i(\lambda),$$

где C_i- содержание i-того элемента в образце, $m_i(l)$- коэффициент ослабления излучения с длиной волны l в i-том элементе. Величины $m_i(l)$ для любого элемента может быть рассчитана по таблицам. Коэффициенты ослабления для характеристического излучения всех элементов приведены в Справочнике М.А. Блохина и И.Г. Швейцера.

Коэффициенты ослабления рентгеновского излучения растут с ростом длины волны в первом приближении пропорционально λ^3, резко меняясь при длинах волн краев поглощения поглощающего элемента.

Вычисления

1) При λ=1,7А^0: Массовые коэффициенты ослабления, вычисленные по таблице Thinh and Leroux:

$$m_{Cr}(l)=336{,}2см^2г^{-1};$$
$$m_{Fe}(l)=412{,}5см^2г^{-1};$$
$$m_{Ni}(l)=60{,}4см^2г^{-1}.$$

Тогда

$$m(l)=0{,}2´336{,}2+0{,}7´412{,}5+0{,}1´60{,}4=362{,}0см^2г^{-1}.$$

2) При =1.9А^0: Массовые коэффициенты ослабления, вычисленные по той же таблице:

$$m_{Cr}(l)=455{,}8см^2г^{-1};$$
$$m_{Fe}(l)=66{,}6см^2г^{-1};$$
$$m_{Ni}(l)=81{,}8см^2г^{-1}.$$

Тогда

$$m(l)=0{,}2´455{,}8+0{,}7´66{,}6+0{,}1´81{,}8=145{,}9см^2г^{-1}.$$

Аномальное изменение коэффициента ослабления с ростом длины волны обусловлено исключением из процесса поглощения К- оболочки атомов железа (наличие между рассматриваемыми длинами волн К-скачка поглощения для атомов железа).

Задача №22

Определить толщину слоя железа (Z=26) и свинца (Z=82), ослабляющего в 100 раз интенсивность рентгеновского излучения молибдена ($\lambda_{MoK\alpha}$=0,710А^O; ρ_{Fe}=7.86г/см^3; ρ_{Pb}=11.34г/см^3).

Решение

Ослабление рентгеновского излучения определяется формулой

$$I_x = I_0 \exp(-\mu_x x) \qquad (1)$$

где m_x- линейный коэффициет ослабления рентгеновского излучения, который выражается через массовый коэффициент m_m как:

$$m_x=r´m_m,$$

где r - плотность образца.

Решая (1) относительно толщины x и заменяя m_x на m_m, получаем:

$$x = \frac{\ln {}^{I_0}\!/_{I_x}}{\rho\mu_m}$$

Вычисления

1) Для *Fe*: $x_{Fe} = \dfrac{\ln 100}{7{,}86 \times 39{,}1} = 0{,}015\,см = 0{,}15\,мм$

2)Для *Pb*: $x_{Pb} = \dfrac{\ln 100}{11{,}34 \times 130} = 0{,}0031\,см = 0{,}03\,мм$

Массовые коэффициенты ослабления, использованные в расчетах, были найдены по Справочнику М.А. Блохина и И.Г. Швейцера.

Таким образом, толщины 100-кратного ослабления излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}71A^0$ составляют десятые и сотые доли миллиметра. При этом свинец ослабляет это излучение примерно в 5 раз сильнее.

Задача №23

Пользуясь таблицей *Thinh and Leroux,* рассчитать величину К-скачка поглощения для алюминия (Z=13) и молибдена (Z=42). Сопоставить полученные результаты с данными справочника М.А. Блохина и И.Г. Швейцера.

Решение

Скачок поглощения определяется как изменение поглощающих характеристик элемента при длине волны края поглощения, т.е

$$S_q^A = \frac{\mu_A(\lambda_q - \delta\lambda)}{\mu_A(\lambda_q + \delta\lambda)}$$

Вычисления

1. Расчет для *Al*:

$$\lambda_{KAl} = 7.948A^0$$

$$S_K^{A.l} = \frac{\mu_{A.l}(7.948 - \delta\lambda)}{\mu_{A.l}(7.948 + \delta\lambda)} = \frac{4682.7}{339.2} = 13.8$$

Справочник М.А. Блохина и И.Г. Швейцера дает: S_K=13.1.

2. Расчет для *Mo*:

$$\lambda_{KMo} = 0.6199A^0\,;$$

$$S_K^{Mo} = \frac{\mu_{M.o}(0.6199 - \delta\lambda)}{\mu_{M.o}(0.6199 + \delta\lambda)} = \frac{84.50}{12.82} = 6.59$$

Справочник М.А. Блохина и И.Г. Швейцера дает: S_K=6.48.

Задача №24

Почему перед проверкой рентгеновскими лучами кишечно-желудочного тракта пациент пьет суспензию сульфата бария ($BaSO_4$)? Ответ подтвердить оценочным расчетом, предполагая, что используемая длина волны рентгеновского излучения примерно соответствует WKα - линии.

Решение

Коэффициент поглощения рентгеновского излучения пропорционален четвертой степени атомного номера поглощающего элемента. Барий, входящий в состав сульфата, имеет высокий атомный номер ($Z = 56$) , который намного превосходит атомные номера элементов, формирующих мягкие ткани тела (кислород, углерод, азот). Поэтому при просвечивании рентгеновским излучением желудочно-кишечного тракта получается контрастная картина.

Вычисления

Подтвердим сказанное оценочным расчетом. Содержание бария в $BaSO_4$: $137.3 / (137.3+32.1+16\times4) \approx 0.59$, т.е примерно 60%.

Пренебрегая поглощением излучения в сере и кислороде этого соединения, оценочная величина массового коэффициента поглощения для WKα -линии оказывается $\mu_{BaSO4} = 0.6\times8.68=5.2$ см^{2}г$^{-1}$. Массовый коэффициент поглощения в углероде μ_C = 0.18 см^{2}г$^{-1}$ (для кислорода и азота величины массового коэффициента сильно не отличаются от приведенной величины). Таким образом, массовые коэффициенты для $BaSO_4$ и для мягких органических тканей различаются почти в 30 раз.

Задача №25

Считая критической величину 10^4 для ослабления интенсивности в бериллиевом окне рентгеновской трубки, определить, выйдет ли из трубки WMα - излучение, возникшее при торможении электронов в вольфрамовом аноде рентгеновской трубки, если толщина такого окна равна 500 мкм (или 50 мкм)?

Решение

Ослабление интенсивности рентгеновского излучения в слое вещества толщиной x определяется уравнением:

$$\frac{I_x}{I_0} = \exp(-\mu_m \rho x)$$

где I_0 и I_x – интенсивность флуоресценции до и после прохождения слоя x, соответственно; μ_m и ρ - массовый коэффициент ослабления и плотность вещества, формирующего ослабляющий слой.

Вычисления

Плотность бериллия ρ_{Be} = 1.85 г/см^3. Массовый коэффициент ослабления WM_α -излучения в бериллии найденный по Справочнику М.А. Блохина и И.Г. Швейцера, равен 111см^2/г.

Подставляя эти величины в приведенную выше формулу, получаем:

при x_{Be} = 500 мкм: $$\frac{I_x}{I_0} = \exp(-111 \times 1.85 \times 500 \times 10^{-4}) \approx 30000$$

при x_{Be} = 50 мкм $$\frac{I_x}{I_0} = \exp(-111 \times 1.85 \times 50 \times 10^{-4}) \approx 2.8$$

Таким образом, при толщине бериллиевого окна 500 мкм $WL\alpha$ -излучение не выйдет из рентгеновской трубки (ослабление в 30000 раз). Если толщину такого окна уменьшить в 10 раз, то рассматриваемое излучение ослабится всего в 2.8 раза.

Задача №26

Подобрать такую длину волны характеристического рентгеновского излучения, чтобы при его использовании для просвечивания вкрапления железных частиц в медной матрице были максимально контрастны.

Решение

Атомные номера железа и меди: Z_{Fe}=26; Z_{Cu} = 29 Выбираемое излучение должно хорошо поглощаться К – оболочкой атомов железа и не поглощаться К- оболочкой атомов меди. Такому условию отвечает длины волн в интервале от 1.743 A^0 до 1.381 A^0 (т.е между краями поглощения этих элементов). Если говорить о характеристическом излучении, то это $K\alpha$ - линии никеля (λ = 1660 A^0) , меди (λ = 1.542 A^0) и цинка (λ = 1437 A^0). Из $L\alpha$ - излучения пригодны линии вольфрама (λ = 1.487 A^0) и рения

(λ=1.432 A). Другие элементы, $L\alpha$ - излучение которых удовлетворяет указанному выше условию, являются достаточно редкими.

Задача №27

Показать, что атмосфера полностью экранирует поверхность Земли от космического рентгеновского излучения с длинами волн
λ> 0.11 A^0. При оценочных расчетах принять, что воздух состоит из азота и его плотность соответствует нормальным условиям. Полным экранированием считать ослабление в 10^6 раз.

Решение

Ослабление излучения определяется зависимостью

$$I_x = I_0 \exp(-\mu_m \rho x)$$

где I_0 и I_x - начальная интенсивность рентгеновского излучения и его интенсивность после прохождения слоя толщиной x, соответственно; μ_m и ρ - массовый коэффициент ослабления излучения веществом и плотность этого вещества соответственно. Из приведенного выше уравнения следует, что

$$x = \frac{\ln {}^{I_0}/_{I_x}}{\mu_m \rho}.$$

То есть для решения задачи достаточно рассчитать по полученной формуле толщину слоя воздуха, ослабляющего в 10^6 раз интенсивность рентгеновского излучения, и сопоставить результат с толщиной атмосферного слоя.

Вычисления

Сначала определим массовый коэффициент ослабления рентгеновского излучения с длиной волны λ = 0.11 A^0. Таблицы и формулы работы *Thinh and Leroux* не позволяют учесть влияние рассеяния, которое в рассматриваемом случае является определяющим. Поэтому обратимся к Справочнику М.А. Блохина и И.Г. Швейцера. Указанная длина волны примерно соответствует $L\beta$ - линии урана. Массовый коэффициент ослабления для этой линии в азоте равен

$$\mu_m = 0.135 \text{ см}^2/\text{г}.$$

Плотность азота при нормальных условиях ρ = 0.00125 г/$см^3$. Подставляя полученные значения в конечную формулу, получаем:

$$x = \frac{\ln(10^6)}{0.135 \times 0.00125} = \frac{13.8}{1.69 \times 10^{-4}} \approx 8.2 \times 10^4\, см = 820 м$$

Таким образом, слой азота толщиной 820 м ослабляет рентгеновское излучение с длиной волны 0.11 A^0 в миллион раз. (Атомный номер кислорода, входящего в состав воздуха, на единицу больше атомного номера азота, и поэтому для воздуха толщина слоя будет еще меньше).

Следовательно, рентгеновское излучение полностью экранировано от поверхности Земли ее атмосферой, толщина которой, по крайней мере, в 10 раз больше величины, используемой в расчетах.

Раздел 4. Рассеяние рентгеновского излучения

Задача №28

Пользуясь формулой Томсона и приближенным выражением для атомного фактора, рассчитать массовый коэффициент когерентного рассеяния рентгеновского излучения с длиной волны λ=0.56A^O в серебре (Z=47) под углом $\upsilon=90^o$. Результат сопоставить с приведенным в Справочнике М.А. Блохина и И.Г. Швейцера.

Решение

Теория: Коэффициент когерентного рассеяния рентгеновского излучения для свободных электронов, определяемый формулой Томсона:

$$\frac{d_e\sigma^T}{d\Omega} = r_0^2 \frac{1 + Cos^2\vartheta}{2},$$

где $r_0 = e^2/m_oc^2$ - классический радиус электрона ($r_0^2 = 7{,}94 \times 10^{-26}$ см^2);

Ω - угол рассеяния излучения.

Атомный коэффициент когерентного рассеяния получается умножением электронного коэффициента на квадрат атомного фактора F_a, который может быть вычислен по приближенной формуле:

$$F_a = Z(e^{-g} + 0{,}12)$$

если $\lambda>\lambda_K$, то $F_a = Z(e^{-g} + 0{,}12) - 2$,

где $g = \frac{5{,}91}{\sqrt[3]{Z}} \frac{Sin\frac{\vartheta}{2}}{\lambda}$

Массовый коэффициент рассеяния получается умножением атомного коэффициента на *N/A*, где N=6,023×10^23 - число Авогадро; A-атомный вес рассеивающего элемента. Таким образом:

$$\frac{d_{m.}\sigma^T}{d\Omega}=r_0^2\,\frac{1+\mathrm{Cos}^2\vartheta}{2}\left(F_a\right)^2\frac{N}{A}$$

Вычисления

$$g=\frac{5{,}91}{\sqrt[3]{47}}\,\frac{\mathrm{Sin}(45^o)}{0{,}56}=2{,}06\,;$$

$$F_a=47(e^{-2{,}06}+12)-2=9{,}62\,;$$

$$\frac{d_{m.}\sigma^T}{d\Omega}=7{,}9\times10^{-26}\,\frac{1+\mathrm{Cos}^2 90^0}{2}\times(9{,}62)^2\,\frac{6{,}023\times10^{23}}{107{,}9}=20{,}4\times10^{-3}\,\text{см}^2\text{г}^{-1}$$

Справочник М.А. Блохина и И.Г. Швейцера дает для предложенных в рассматриваемой задаче условий величину массового коэффициента когерентного рассеяния $21{,}0\times10^{-3}$.

Задача №29

Используя формулу Комптона для уменьшения длины волны, найти приближенное выражение для потери энергии ΔE рентгеновских фотонов при некогерентном их рассеянии. Сопоставить результаты приближенного и точного расчета величины ΔE для МоKα - излучения при угле рассеяния 90^0.

Решение

Формула Комптона для уменьшения длины волны не когерентно рассеянного под углом q рентгеновского излучения имеет вид:

$$\Delta\lambda=0.024(1-\mathrm{Cos}\theta); \qquad (1)$$

длина волны рентгеновского излучения связана с энергией его квантов соотношением:

$$\lambda=\frac{hc}{E}.$$

Если l измерять в A^0, а энергию E - в кэВ, то

$$\lambda[A^0]=\frac{12.398}{E[\text{кэВ}]}$$

Приближенная зависимость для соотношения ΔE и Dl может быть получена дифференцированием последнее выражение по l, если Dl много меньше l. Поскольку последнее условие соблюдается не всегда, то полученный результат следует считать приближенным:

$$Dl » -\frac{12.398}{E^2} DE, \qquad (2)$$

где знак минус свидетельствует о том, что длина волны убывает с ростом энергии квантов. Нас интересуют абсолютные значения потери энергии, поэтому знак можно опустить.

Из (2) получаем:

$$DE » \frac{E^2}{12.398} Dl.$$

Или, подставляя значение Dl из уравнения (1), имеем:

$$DE»1.9355´10^{-3}´E^2´(1\text{-}Cosq). \qquad (3)$$

Т.е уменьшение энергии квантов при их некогерентном рассеянии пропорционально квадрату этой энергии. При этом коэффициент пропорциональности есть величина, обратная энергии покоя для электрона (mc^2=512 кэВ). Поэтому уравнение (3) можно переписать как:

$$\Delta E \approx \frac{E^2(1-\cos\vartheta)}{mc^2}$$

Точное значение потери энергии ΔE фотона при комптоновском рассеянии определяется выражением:

$$\Delta E = \frac{E^2(1-\cos\vartheta)}{mc^2 + E(1+\cos\vartheta)} \qquad (4)$$

Выражение (3) получается из (4) при E <<mc^2, т.е при большой длине волны рассеянного излучения.

Вычисления

Выполним расчет для MoKα - линии (E = 17.5 кэВ).

1) Приближенный вариант:

ΔE = 1.9355×10^{-3}× 17.5^2×(1-cos90^0) = 0.593 кэВ

2) Точный расчет:

$$\Delta E = \frac{17.5^2(1-\cos 90^0)}{512+17.5(1-\cos 90^0)} = 0.578 \text{ кэВ}$$

Относительное расхождение: $\frac{0.593-0.578}{0.578}$ = 0.026 = 2.6%

Задача №30

Найти массовый коэффициент некогерентного рассеяния железом (Z=26) рентгеновского излучения с длиной волны λ=0.56A^O под углом

$\upsilon=\pi/2$, используя приближенное выражение для атомного фактора. Полученный результат сопоставить с данными Справочника М.А. Блохина и И.Г. Швейцера.

Решение

Дифференциальный коэффициент некогерентного рассеяния рентгеновского излучения на свободных электронах определяется формулой Клейна – Нешины - Тамма:

$$\frac{d\sigma_{KNT}}{d\Omega}=\frac{r^2}{2}\left(\frac{E'}{E}\right)\left[\frac{E}{E'}+\frac{E'}{E}-\mathrm{Sin}^2\theta\right]$$

где $r=\frac{e^2}{m_0c^2}$ - классический радиус электрона:

$r^2=7.94´10^{-26}$ *см*^{2}.

E и $E¢$ - энергия рентгеновских квантов соответственно до и после рассеяния.

Массовый дифференциальный коэффициент некогерентного рассеяния получается из формулы Клейна – Нешины - Тамма умножением ее на атомный фактор F некогерентного рассеяния и на отношение N/A, где $N=6.023´10^{23}$ - число Авогадро (число атомов в грамм-атоме вещества), а A - атомный вес рассеивающего элемента:

$$\frac{d\sigma_{нкг}}{d\Omega}=\frac{d\sigma_{KNT}}{d\Omega}\times\frac{N}{A}\times F\ ,$$

$$\text{где } F=Z(1-e^{-5v}) \text{ и } v=\frac{2.21}{\sqrt[3]{Z^2}}\frac{\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}}{\lambda}$$

Вычисления

$$E=\frac{12.398}{0.56}=22{,}14\text{kev};\quad E'=\frac{12.398}{0.56+0.024}=21{,}23\text{kev}.$$

$$\frac{d\sigma_{KNT}}{d\Omega}=\frac{7.94\times10^{-26}}{2}\times\left(\frac{21.23}{22.14}\right)^2\left[\frac{22.14}{21.23}+\frac{21.23}{22.14}-\mathrm{Sin}^2\frac{\pi}{2}\right]=3{,}658´10^{-26};$$

$$v=\frac{2.21}{\sqrt[3]{26^2}}\frac{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{4}}{0.56}=0{,}318;\ F_a=26\left(1-e^{-5\times0.318}\right)=20{,}698$$

$$\frac{d\sigma_{нкг}}{d\Omega}=3{,}658\times10^{-26}\times20{,}698\times\frac{6{,}023\times10^{23}}{55{,}85}=0{,}0082$$

Справочник М.А. Блохина и И.Г. Швейцера для дифференциального массового коэффициента некогерентного рассеяния железом излучения с длиной волны *0,56A*^{0} под углом 90^0 дает величину 0,0077.

<u>*Задача № 31*</u>

Определить, какая часть характеристического рентгеновского излучения GeK$_{a1}$, упавшего под углом 30^0 на поверхность массивного алюминиевого образца, рассеивается не когерентно под углом 60^0 к этой поверхности в единичный телесный угол **Ω**. Рассеивающую площадь принять равной единице. При расчетах использовать Справочник М.А. Блохина и И.Г. Швейцера.

Решение

Интенсивность рентгеновского излучения, не когерентно рассеянного массивным образцом, определяется зависимостью:

$$I_p = I_0 s\Omega \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_m^{\text{нкг}}}{\frac{\mu(\lambda)}{\text{Sin}\varphi} + \frac{\mu(\lambda_1)}{\text{Sin}\psi}}, \qquad (1)$$

где I_0 - интенсивность первичного излучения; l - длина волны падающего, а l_1 -длина волны не когерентно рассеянного излучения.

Следует заметить, что угол рассеяния Ω связан с углом падения первичного j и углом выхода рассеянного y излучения простым соотношением $W = j + y$.

Из (1) следует, что не когерентно рассеянная часть упавшего излучения определится, как:

$$N = \frac{I_p}{I_0} = \frac{1}{\text{Sin}\varphi} \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_m^{\text{нкг}}}{\frac{\mu(\lambda)}{\text{Sin}\varphi} + \frac{\mu(\lambda_1)}{\text{Sin}\psi}}$$

<u>*Вычисления*</u>

Длина волны рассеиваемого излучения l_{GeKa}*=1,254 A*^{0} *;*
Угол рассеяния *W =30*^{0} *+60*^{0} *= 90*^{0}. Поэтому *Dl =0,024(1- Cosq)=0,024 A*^{0} и длина волны не когерентно рассеянного излучения есть

$$l_1 = 1{,}254 + 0{,}024 = 1{,}278\ A^0$$

Массовый коэффициент поглощения для падающего излучения в алюминии $m_{Al}(l_{GeKa1})=28{,}5$ $см^2г^{-1}$; такой же коэффициент для некогерентного излучения $m_{Al}(l_1)=29{,}9$ $см^2г^{-1}$ (чтобы воспользоваться для некогерентного излучения Справочником по рентгеноспектральному анализу, в качестве длины волны не когерентно рассеянного излучения можно взять близкую ей AuL_{a1} - линию с длиной волны $l_1 = 1.276\ A^0$). Найденный по Справочнику массовый коэффициент рассеяния $GeKa_1$ - излучения в алюминии под углом 90^0 оказался $0{,}298 ´ 0{,}02232=6{,}65 ´ 10^{-3}$ $см^2г^{-1}$.

Подставляя найденные величины в выражение для N и учитывая, что по условиям задачи s =1и Ω=1 , получаем:

$$N = \frac{6{,}65 \times 10^{-3}}{\frac{28{,}5}{\mathrm{Sin}30^0} + \frac{29{,}9}{\mathrm{Sin}60^0}} = \frac{6{,}65 \times 10^{-3}}{45{,}76} = 0{,}725 \times 10^{-4}$$

Т.е в указанном направлении не когерентно рассеивается менее сотой доли процента.

Задача №32

Оценить ширину AgKα - линии при ее не когерентном рассеянии медным образцом под углом 90^0.

Решение

Согласно формуле Вентцеля, ширина δE не когерентно рассеянной линии определяется выражением

$$(\delta E)^2 = E_{св} \times \Delta E\,,$$

где $E_{св}$ – энергия связи рассеивающих электронов в атоме, ΔE – комптоновское смещение т.е

$$\delta E = \sqrt{E_{св}\Delta E}$$

Энергия связи электронов определяется из таблиц. Комптоновское смещение можно рассчитать по формуле:

$$\Delta E = \frac{E^2(1-\cos\vartheta)}{mc^2 + E(1-\cos\vartheta)}\,,$$

где mc^2 = 512 кэВ – энергия покоящегося электрона.

Вычисления

Энергия связи электронов меди на К – оболочке равна:

$$(E_{св})_{Cu} = 8.98\ кэВ$$

Комптоновское смещение для AgKα - линии (E =22 кэВ) равно:

$$\Delta E = \frac{22^2(1-\cos 90^0)}{512+22(1-\cos 90^0)} = \frac{484}{534} = 0.906\,\text{кэВ}$$

Тогда

$$\delta E = \sqrt{8.98 \times 0.906} = 2.85\,\text{кэВ}$$

Задача №33

Показать, что рассеяние WKα - излучения на атомах углерода можно с погрешностью 10% считать не когерентным.

Решение

В качестве доказательства рассчитаем для рассматриваемого случая поперечные сечения когерентного и не когерентного рассеяния. Для расчета используем полученные А.Л. Финкельштейном аппроксимационные зависимости этих поперечных сечений от атомного номера и энергии рассеиваемого излучения.

Для когерентного рассеяния:

$$\sigma_{\text{кг}} = (1+s_4 E)/(s_0 + s_1 E + s_2 E^2 + s_3 E^3)$$

Для некогерентного рассеяния:

$$\sigma_{\text{нкг}} = E^2/(a_0 + a_1 E + a_2 E^2 + a_3 E^3)$$

В задаче требуется показать, что относительная погрешность S предположения о полностью не когерентном рассеянии меньше 10%. Т.е

$$S = \frac{\sigma_{\text{кг}}}{\sigma_{\text{кг}} + \sigma_{\text{нкг}}} < 0.1$$

Вычисления

Энергия фотонов WKα - излучения: E = 59 кэВ. Подставляя коэффициенты s и a для атомов углерода, заданные в справочных таблицах Финкельштейна, получаем для поперечных сечений:

$$\sigma_{\text{кг}} = (1+1.075\times 59)/(0.876+0.646\times 59+0.393\times 59^2+0.0245\times 59^3) = \frac{64.5}{6519.5}$$

$$\sigma_{\text{кг}} = 0.0099\,\text{см}^2/\text{г}$$

$$\sigma_{\text{нкг}} = 59^2/(62.025+12.086\times 59+5.079\times 59^2+0.0158\times 59^3) = \frac{3481}{21769}$$

$$\sigma_{\text{нкг}} = 0.16\,\text{см}^2/\text{г}$$

$$S = \frac{0.0099}{0.1699} = 0.062$$

Т.е погрешность предположения о полностью не когерентном рассеянии излучения для рассматриваемого случая меньше 10% и составляет 6.2%.

Задача №34

Определить погрешность предположения, что электроны атома кальция (Z = 20), не когерентное рассеивающие излучения WKα - линии под углом 60^0 , можно считать свободными, не зависящими от электронной структуры и от связей с ядром.

Решение

Признаком отсутствия влияния электронной структуры атома на процесс не когерентного рассеяния является близость к единице функции не когерентного рассеяния H = Z×S, где S определяется приближенной зависимостью

$$S = (1 - \exp(-5\upsilon)),$$

в которой

$$\upsilon = \frac{2.21}{\lambda} \times \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \times Z^{-\frac{2}{3}}$$

где Z - атомный номер рассеивающего материала, λ - длина волны рассеиваемого излучения и ϑ - угол рассеяния.

Относительная погрешность δ предположения о рассеянии электронами атома, как свободными, определяется как:

$$\delta = \frac{1 - S}{S}$$

Вычисления

Рассчитаем υ при λ = 0.21 A^0 (WKα - линия):

$$\upsilon = \frac{2.21}{0.21} \sin\left(\frac{60}{2}\right) \frac{1}{\sqrt[3]{20^2}} = \frac{2.21 \times 0.5}{0.21 \times 7.37} = 0.714$$

Тогда

$$S = 1 - \exp(-5 \times 0.714) = 1 - 0.028 = 0.972$$

И, следовательно, погрешность выдвинутого предположения составляет

$$\delta = \frac{1-0.972}{0.972} \approx 0.029 = 2{,}9\ \%$$

Раздел 5. Преломление и отражение рентгеновского излучения

Задача №35

Оценить относительную погрешность использования формулы $Dj_o = d\,Ctg\,j_o$ для расчета изменения направления луча (углы падения $j_o = (j_o)_{min}$ и $j_o=20^o$) при проникновении рентгеновского излучения с длиной волны $l=7A^o$ из вакуума в алюминий (Z=13; атомный вес 27; плотность 2.7 г/см^3).

Решение

Для малых углов падения, близких к углу $(j_o)_{min}$, вместо приведенной в задаче формулы следует использовать выражение

$$D\varphi_0 = \varphi_0 - \sqrt{\varphi_0^2 - (\varphi_{0.\min})^2}$$

где $j_{o.min} = \sqrt{2\delta}$ и декремент показателя преломления d определяется формулой

$$\delta = 2.7\times10^{10}\times\frac{Z\rho}{A}\times\lambda^2$$

Вычисления

Для рассматриваемого случая величина декремента показателя преломления:

$$\delta = 2.7\times10^{10}\times\frac{13\times2.7}{27}\times7^2\times10^{-16} = 172\times10^{-6}$$

Тогда

$$\varphi_{0.\min} = \sqrt{2\times172\times10^{-6}} = 18.5\times10^{-3}\textit{радиан} = 18.5\ 10^{-3}\ 57.3^o = 1.06^o$$

Для случая $j_{o,min}$ имеем:

$$Dj_o = j_{o,min} = 1.06^o$$

Расчет по формуле $Dj_o = d\,Ctg\,j_o$ дает:

$$Dj = 172\times10^{-6}\times Ctg(1.06^o) = 92.7\times10^{-4}\textit{радиана} = 92.7\times10^{-4}\times57.3^o = 0.53^o$$

Относительная погрешность расчета:

$$V = \frac{1.06-0.53}{1.06} = 0.5 = 50\,\%$$

Для случая $j_o=20^o$ имеем:

$$\Delta\varphi_0 = 20-\sqrt{20^2-1.06^2} = 20-19.972 = 0.028^0;$$

Расчет по формуле $\Delta\varphi_o = \delta\, Ctg\,\varphi_o$ дает:

$$\Delta\varphi_o = 172\times10^{-6}\times Ctg20^o = 4.726\times10^{-4}\ \text{радиана} = 4.726\times10^{-4}\times57.3^o = 0.027^o$$

Относительная погрешность: $V = \dfrac{0.028-0.027}{0.028} \approx 0.04 = 4\%$

Задача №36

Найти показатель преломления и изменение угла $\Delta\varphi_o$ (для $\varphi_o = 10^0$) при проникновении рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 1A^0$ из вакуума в кремниевый образец (Z=14; атомный вес 28.09; плотность 2.42 г/см^3). Как изменятся эти характеристики при увеличении длины волны падающего излучения до $5A^0$?

Решение

Дисперсией называется зависимость показателя преломления n от длины волны падающего излучения. Поскольку для прозрачных сред $n = 1-\delta$, то обычно рассматривается зависимость декремента показателя преломления δ от длины волны λ. Для рентгеновской области спектра

$$\delta = 2.7\times10^{10}\,\frac{Z\rho}{A}\lambda^2,$$

где Z, A и ρ - соответственно атомный номер, атомный вес и плотность преломляющего материала.

Поскольку предельный угол $(\varphi_o)_{min}$ обычно очень мал и заданный в условиях задачи угол падения 10^0 существенно превышает этот угол $(\varphi_o)_{min}$, то изменение $\Delta\varphi$ угла распространения рентгеновского излучения при проникновении в среду может быть найдено по простой формуле:

$$\Delta\varphi_o = \delta\, Ctg\,\varphi_o$$

Вычисления

Для кремния $Z=14$; $A=28.09$; $\rho=2.42$ *г/см*^{3}. Тогда:

1) для длины волны $\lambda = 1A^o$:

$$\delta = 2.7\times10^{10}\,\frac{14\times2.42}{28.09}\times1\times10^{-16} = 3.26\times10^{-6}.$$

$$\Delta\varphi_o = 3.26\times10^{-6}\, Ctg\,10^o = 18.8\times10^{-6}\ \text{радиан} =$$
$$= 18.8\times10^{-6}\times57.3\ \text{град} = 1.075\times10^{-3}\ \text{град} = 0.063'$$

2) для длины волны $\lambda = 5A^o$:

$$\delta = 2.7\times10^{10}\,\frac{14\times2.42}{28.09}\times5^2\times10^{-16} = 81.4\times10^{-6}$$

$$\Delta\varphi_o = 81.4\times10^{-6}\times Ctg10^o = 1{,}6'.$$

Т.е рассматриваемые показатели (δ и φ_0) выросли в 25 раз.

Задача №37

В предположении прозрачности отражающей среды определить максимальный угол полного внешнего отражения излучения Кa -линий молибдена (λ = 0,710 A^0) и углерода (λ = 44,7 A^0) от кремниевой подложки (Z=14; атомный вес 28.09; плотность 2.42 г/см^3).

Решение

Максимальный угол *(j o)max* отражения рентгеновского излучения от поверхности вещества определяется выражением

$$(j_o)_{max} = \sqrt{2\delta}\,,$$

где *d* декремент показателя преломления существенно зависит от длины волн λ падающего излучения:

$$\delta = 2.7\times10^{10}\,\frac{Z\rho}{A}\lambda^2$$

Величины Z, ρ и A приведены в условиях задачи.

Вычисления

1) Первичное излучение имеет длину волны λ = 0,710 A^0 (МоКα):

$$\delta = 2.7\times10^{10}\,\frac{14\times2.42}{28,09}\times0,71^2\times10^{-16} = 3,31\times10^{10}\times0,71^2\times10^{-16} = 1,67\times10^{-6}$$

Тогда

$(j_o)_{max}=$

$$= \sqrt{2\delta} = 10^{-3}\sqrt{2\times1,67} = 1,83\times10^{-3}\text{радиан} = 1,83\times57,3\times10^{-3}\text{градуса} \approx 0,1^0$$

2) Первичное излучение имеет длину волны λ = 44,7 A^0 (СКα):

$$\delta = 2.7\times10^{10}\,\frac{14\times2.42}{28,09}\times47,1^2\times10^{-16} = 3,31\times10^{10}\times47,1^2\times10^{-16} = 7,34\times10^{-3}$$

Тогда

$(j_o)_{max}=$

$$= \sqrt{2\delta} = 10^{-2}\sqrt{2\times73,4} = 12,12\times10^{-2}\text{радиан} = 12,12\times57,3\times10^{-2}\text{градуса} \approx 6,9^0$$

Таким образом, изменение длины волны рентгеновского излучения от 0,71A^0 до 47, 1A^0 увеличивает максимальный угол полного внешнего отражения с $0,1^0$ до $6,9^0$. То есть отражение длинноволнового излучения может происходить при достаточно больших углах.

Задача №38

Во сколько раз уменьшится интенсивность рентгеновского *NaKa* - излучения (*l=11.9A^o*) при его полном внешнем отражении под углом $j_o = \sqrt{2\delta}$ (*d* - декремент показателя преломления) от поверхности углерода (*Z=6;* атомн.вес 12.01; плотность 2.25 г/см^3)?

Решение

При условии $j_o = \sqrt{2\delta}$ отношение падающей и отраженной интенсивности определяется соотношением:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\left[\sqrt{2\delta} - \sqrt{\beta}\right]^2 + \beta}{\left[\sqrt{2\delta} + \sqrt{\beta}\right]^2 + \beta},$$

где *d* $= 2.7 \times 10^{10} \times \dfrac{Z\rho}{A} \times \lambda^2$ - декремент показателя преломления; $\beta = \dfrac{\lambda}{4\pi}\mu(\lambda)$ - характеристика поглощающих свойств отражающего материала.

Вычисления

Декремент показателя преломления для рассматриваемого случая

$$\delta = 2.7 \times 10^{10} \times \frac{6 \times 2.25}{12.01} \times 11.9^2 \times 10^{-16} = 429.8 \times 10^{-6}$$

Линейный коэффициент поглощения излучения натрия в углероде:

m$_C$(l$_{Na}$)=m$_{mC}$(l$_{Na}$)r$_C$= 1830´2.25=4117.5см $^{-1}$

Тогда величина *b* оказывается равной:

$$\beta = \frac{11.9 \times 10^{-8}}{4 \times 3.14} \times 4117.5 = 3900 \times 10^{-8} = 39 \times 10^{-6}.$$

И убыль интенсивности при полном внешнем отражении оказывается:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\left[\sqrt{2 \times 429.8 \times 10^{-6}} - \sqrt{39 \times 10^{-6}}\right]^2 + 39 \times 10^{-6}}{\left[\sqrt{2 \times 429.8 \times 10^{-6}} + \sqrt{39 \times 10^{-6}}\right]^2 + 39 \times 10^{-6}} = \frac{23.06^2 \times 10^{-6} + 39 \times 10^{-6}}{35.56^2 \times 10^{-6} + 39 \times 10^{-6}} = \frac{570}{1304} ==$$

=0.43=43%.

Т.е отразится от поверхности углерода при рассматриваемых условиях 43% подающего рентгеновского излучения.

Задача №39

Как изменится глубина проникновения рентгеновского излучения (за глубину проникновения считать ослабление интенсивности в e раз, где e – основание натурального логарифма) в отражающий материал при углах φ_0 << $(\varphi_0)_{max}$, если кремниевый отражатель заменить на танталовый?

Решение

При очень малых углах падения [$\varphi_0 << (\varphi_0)_{max}$] глубина проникновения x_e определяется простым выражение:

$$x_e \approx \frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\delta}}$$

Учитывая, что $d = 2.7\times10^{10}\times\frac{Z\rho}{A}\times\lambda^2$, получаем:

$$x_e \approx \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\times2.7\times10^{10}\times Z\rho/A}}$$

Т.е при очень малых углах глубина проникновения излучения в отражающий материал не зависит от длины волны падающего излучения, а определяется только характеристиками этого материала.

Вычисления

1) Отражающий материал – кремний (Z = 14; A = 28.09; ρ = 2.42 г/см^3).

$$x_e \approx \frac{1}{4\times3.14\times10^5\times\sqrt{2\times2.7\times14\times2.42/28.09}} = \frac{1}{32.05\times10^5} = 0.031\times10^{-5}\,\text{см} =$$

$x_e \approx 3.1$нм.

2) Отражающий материал – тантал (Z = 73; A = 180.95; ρ = 17.1 г/см^3).

$$x_e \approx \frac{1}{4\times3.14\times10^5\times\sqrt{2\times2.7\times73\times17.1/180.95}} = \frac{1}{76.66\times10^5} = 0.013\times10^{-5}\,\text{см}$$

$x_e \approx 1.3$нм.

Из расчетов следует, что в рассматриваемых условиях глубина проникновения составляет единицы нанометров. При малых углах падения [$\varphi_0 << (\varphi_0)_{max}$] глубина проникновения рентгеновского излучения в кремниевую мишень равна 3.1 нм, а в танталовую мишень 1.3 нм, т.е уменьшилась в 2.38 раза.

Задача №40

Рассчитать толщину слоя на подложке, если в МоKα - излучении, отраженном от этой системы, максимумы Киссига третьего и четвертого порядка наблюдаются соответственно при углах отражения 0.3^0 и 0.35^0.

Решение

Максимумы Киссига для излучения, отраженного системой слоя на подложке, наблюдаются при условии

$$2d\sqrt{(\varphi_0)_m^2 - (\varphi_0)_{max}^2} = m\lambda \qquad (1)$$

где $(\varphi_0)_m$ – угол отражения излучения m-го порядка для излучения с длиной волны λ; d – толщина слоя.

Тогда для m+1 –го порядка отражения имеем:

$$2d\sqrt{(\varphi_0)_{m+1}^2 - (\varphi_0)_{max}^2} = (m+1)\lambda \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) предельный угол отражения $(\varphi_0)_{max}$, получаем:

$$(\varphi_0)_{m+1}^2 - (\varphi_0)_m^2 = \frac{(2m+1)\lambda^2}{4d^2}$$

Откуда

$$d = \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{(2m+1)}{(\varphi_0)_{m+1}^2 - (\varphi_0)_m^2}} \qquad (3)$$

Вычисления

Сначала выразим углы отражения падающего излучения в радианах:

$(\varphi_0)_m = 0.3^0 = 0.3 / 57.3 = 5.24\times10^{-3}$ радиан

$(\varphi_0)_{m+1} = 0.35^0 = 0.35 / 57.3 = 6.11\times10^{-3}$ радиан

Рассчитаем толщину d по формуле (3):

$$d = \frac{0.7093}{2}\sqrt{\frac{2\times3+1}{(6.11^2 - 5.24^2)\times10^{-6}}}[A^0] = \frac{0.7093}{2}\times10^3\sqrt{\frac{7}{9.9}} = 0.297\times10^3[A^0]$$

d = 29.7 [нм]

Толщина слоя на покрытии равна 29.7 нм.

Раздел 6. Рентгеновская флуоресценция

Задача №41

Во сколько раз изменится интенсивность рентгеновской флуоресценции кремния (C_{si}=100%) при замене длины волны первичного излучения $\lambda=1A^O$ на длину волны $\lambda=6A^O$? (Интенсивность первичного излучения считать постоянной; $m=\mathrm{Sin}\varphi/\mathrm{Sin}\psi=1$; $\lambda_{SiK\alpha}=7.125A^O$).

Решение

Интенсивность рентгеновской флуоресценции определяется выражением:

$$I_i = k_i I(\lambda)\frac{\frac{\lambda}{\lambda_i}\tau_i(\lambda)}{\mu(\lambda)+m\times\mu(\lambda_i)},$$

где величина k_i не зависит от длины волны первичного излучения. Тогда для отношения интенсивностей, полученных для длин волн $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$, можем записать:

$$\frac{I_i^1}{I_i^2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\times\frac{\tau_i(\lambda_1)}{\tau_i(\lambda_2)}\frac{\mu(\lambda_2)+m\times\mu(\lambda_i)}{\mu(\lambda_1)+m\times\mu(\lambda_i)}$$

Вычисления

Вычисления массовых коэффициентов ослабление, выполненное с использованием таблиц Thinh and Leroux, дают следующие результаты:

$\mu(\lambda_1=1A^0)$ = 16.8 $см^2г^{-1}$;
$\mu(\lambda_1=6A^0)$ = 2626,9 $см^2г^{-1}$;
$\mu(\lambda_{SiK\alpha}=7.125A^0)$ = 324 $см^2г^{-1}$.

Истинные коэффициенты поглощения $\tau(\lambda)$ можно в первом приближении принять равными коэффициентам ослабления. С учетом сказанного

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{6}{1}\times\frac{2626{,}9}{16{,}8}\times\frac{16{,}8+1\times324}{2626{,}9+1\times324}=105$$

Т.е при замене длины первичного излучения с $1A^O$ на $6A^O$ интенсивность рентгеновской флуоресценции кремния вырастет в 105 раз.

Задача №42

Как изменится интенсивность рентгеновской флуоресценции железа (C_{Fe}=100%) при изменении комбинации углов падения первичного и отбора флуоресцентного излучения (φ=90°;ψ=35°) на комбинацию (φ=35°; ψ=90°). Длину волны первичного излучения принять равной $\lambda_{NiK\alpha}$=1.660A^{O}

Решение

Выражение для интенсивности рентгеновской флуоресценции можно представить в виде:

$$I_i = k_i \frac{\theta_i(\lambda)}{\dfrac{\mu(\lambda)}{Sin\varphi} + \dfrac{\mu(\lambda_i)}{Sin\psi}}$$

где $\theta_i(\lambda)$ – вероятность преобразования первичного фотона в фотон флуоресцентного излучения. Величины k_i и $\theta_i(\lambda)$ не зависят от угла *j* падения первичного и угла *y* отбора флуоресцентного излучения. Тогда для отношения интенсивностей при разных углах *j* и *y* получаем:

$$\frac{I_{i.1}}{I_{i.2}} = \frac{\dfrac{\mu(\lambda)}{Sin\varphi_2} + \dfrac{\mu(\lambda_i)}{Sin\psi_2}}{\dfrac{\mu(\lambda)}{Sin\varphi_1} + \dfrac{\mu(\lambda_i)}{Sin\psi_1}}$$

Вычисления

Для излучения железа (l_i *=1.937 A^0*) массовый коэффициент ослабления равен *m(l_i)=72.4см^{2}г $^{-1}$*. Для первичного излучения (*l=l$_{Ni}$=1.660A^0*) величина *m(l),* найденная по Справочным таблицам Блохина и Швейцера, равна *m(l)=374см^{2}г$^{-1}$*. Поэтому

$$\frac{I_{Fe}(\psi = 35^o)}{I_{Fe}(\psi = 90^o)} = \frac{\dfrac{374}{Sin(35^o)} + \dfrac{72.4}{Sin(90^o)}}{\dfrac{374}{Sin(90^o)} + \dfrac{72.4}{Sin(35^o)}} = 1.45$$

Т.е интенсивность рентгеновской флуоресценции вырастет примерно в 1.5 раза.

Задача №43

Найти приближенно длину волны первичного излучения, при которой на интенсивность рентгеновской флуоресценции FeKα-линии железа не влияет присутствие никеля, если состав образца: 50% Fe+50% Ni ? (Принять: $m=Sin\varphi/Sin\psi=1$; выход флуоресценции $\omega_{KNi}=0.414$; в процессе довозбуждения участвуют все линии никеля и поэтому $p_{KNi}\cong 1$; коэффициент $\varepsilon \approx 1$; скачок поглощения $S_{Fe}=8.32$ и $\lambda_{FeK\alpha}=1.936A^{O}$).

Решение

Приближенное выражение для длины волны первичного излучения, при которой эффекты довозбуждения атомов элемента А и селективного поглощения первичного излучения, вызванные присутствием некоторого элемента В, полностью уравновешены (скомпенсированы), имеет вид:

$$\lambda = \lambda_i \sqrt[3]{\frac{m\omega_{qB}p_{qBi}\varepsilon}{1-\omega_{qB}p_{qBi}\varepsilon}\frac{1}{W_A(S_A-1)+1}}$$

где W_A-фактор химического состава:

$$W_A = C_A\frac{\mu_A(\lambda_A)}{\mu(\lambda_A)},$$

Вычисления

Массовый коэффициент ослабления излучения железа в железе: $m_{Fe}(l_{Fe})=72.4$ *см*^{2}*г*$^{-1}$. Массовый коэффициент ослабления излучения железа в образце:$m(l_{Fe})=C_{Fe}\ m_{Fe}(l_{Fe})+C_{Ni}\ m_{Ni}(l_{Fe})=\ 86.1$ *см*^{2}*г*$^{-1}$. (Расчет выполнен с использованием Справочника Блохина и Швейцера).

Тогда фактор химического состава: $W_A=0.5\frac{72.4}{86.1}=0.446$

А длина волны:

$$\lambda = 1.936\times\sqrt[3]{\frac{1\times0.414\times1}{1-0.414\times1}\times\frac{1}{0.446(8.32-1)+1}} = 1.06A^0$$

Т.е найденная длина волны примерно на 0,4A^0 короче длины волны края поглощения возбуждающего элемента (λ = 1,488 A^0).

Задача №44

Как изменится интенсивность рентгеновской флуоресценции Kα-линии марганца в его смеси с магнием (1% Mn+99% Mg), если магний заменить на железо? (Принять: m=Sinφ/Sinψ=1; длину волны первичного излучения принять равной длине волны Kα- линии: $\lambda_{NiK\alpha}$=1.660A^{O} ; возбуждением атомов марганца Kβ-излучением железа пренебречь).

Решение

Интенсивность рентгеновской флуоресценции определяется формулой:

$$I_i = \frac{\theta(\lambda)}{\mu(\lambda) + m \times \mu(\lambda_i)},$$

где *q(l)* не зависит от состава флуоресцирующего материала. Следовательно, для отношения интенсивностей можем записать:

$$\frac{I_{Mn}^{MgMn}}{I_{Mn}^{FeMn}} = \frac{\mu_{FeMn}(\lambda) + m \times \mu_{FeMn}(\lambda_{Mn})}{\mu_{MgMn}(\lambda) + m \times \mu_{MgMn}(\lambda_{Mn})} \qquad (1)$$

<u>*Вычисления*</u>

$m_{FeMn}(l)$=0.01´340+0.99´374=373,7см^{2}г$^{-1}$;
$m_{FeMn}(l_{Mn})$=0.01´80.7+0.99´90.4=90,3 см^{2}г$^{-1}$;
$m_{MgMn}(l)$=0.01´340+0.99´50=53,0 см^{2}г$^{-1}$;
$m_{MgMn}(l_{Mn})$=0.01´80.7+0.99´96=95,8см^{2}г$^{-1}$.

Подставляя полученные значения в формулу (1), получаем:

$$\frac{I_{Mn}^{MgMn}}{I_{Mn}^{FeMn}} = \frac{373.7 + 1 \times 90.3}{53.0 + 1 \times 95.8} = 3{,}12$$

Таким образом, проявление эффекта избирательного поглощения первичного излучения понижает в рассмотренном случае интенсивность рентгеновской флуоресценции марганца примерно в 3 раза.

<u>*Задача №45*</u>

Рассчитать вклад довозбуждения, вносимого излучением атомов железа в интенсивность K-рентгеновской флуоресценции хрома, если состав образца 95% Fe+5% Cr. (ω_{Fe}=0.342; $p_{ij}\cong 1$; S_{Fe}=8.32; φ=ψ=45^{o}; длину волны первичного излучения принять равной длине волны Kα линии никеля $\lambda_{NiK\alpha}$=1.660A^{O}).

Решение

Интенсивность рентгеновской флуоресценции, обусловленной непосредственным возбуждением и довозбуждением можно представить одной формулой:

$$I_i = k_i \frac{\theta_i(\lambda)}{\mu(\lambda) + m \times \mu(\lambda_i)}$$

Отличие состоит в задании функции*$q_i(l)$:* Для непосредственного возбуждения атомов квантами первичного излучения имеем:

$$q_i(l)=t_{qi}(l)´w_i´p_{ij}´C_i$$

Для эффекта довозбуждения: $\theta_i^D(\lambda) = P_1 \times L(\lambda) \times P_2$,

где P_1 - вероятность преобразования первичного кванта в промежуточный носитель его энергии; $L(l)$ - передаточная функция; P_2 - вероятность преобразования промежуточного носителя энергии в квант флуоресцентного излучения:

$$\theta_i^D(\lambda) = \left\lfloor \tau_{q_N}(\lambda) \times \omega_N \times p_{Nj} \times C_N \right\rfloor \times L(\lambda) \times \left\lfloor \tau_{q_i}(\lambda_N) \times \omega_i \times p_{ij} \times C_i \right\rfloor,$$

где $L(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{Sin}\varphi}{\mu(\lambda)} \ln\left(1 + \frac{\mu(\lambda)}{\mu(\lambda_N)\mathrm{Sin}\varphi}\right) + \frac{\mathrm{Sin}\psi}{\mu(\lambda_i)} \ln\left(1 + \frac{\mu(\lambda_i)}{\mu(\lambda_N)\mathrm{Sin}\psi}\right)\right]$

Вклад эффекта довозбуждения определим как отношение:

$$\frac{I_i^D}{I_i} = \frac{\theta_i^D}{\theta_i} = \frac{\tau_{qN}(\lambda) \times \tau_{q.i}(\lambda_N)}{\tau_{q.i}(\lambda)} \times \omega_N \times p_{Nj} \times C_N \times L(\lambda) \qquad (1)$$

Вычисления

$\mu(\lambda)$=0.95×374+0.05×307=370,7;

$\mu(\lambda_{Cr})$=0.95×114+0.05×90.4=112,8;

$\mu(\lambda_{Fe})$=0.95×72.4+0.05×464=92,0;

$$L(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\frac{0.707}{370.7} \ln\left(1 + \frac{370.7}{92 \times 0.707}\right) + \frac{0.707}{112.8} \ln\left(1 + \frac{112.8}{92 \times 0.707}\right)\right] = 0{,}00497$$

Подставляя полученные величины в (1), имеем:

$$\frac{I_{Cr}^D}{I_{Cr}} = \frac{\frac{8.32-1}{8.32} 374 \times \frac{8.75-1}{8.75} 464}{\frac{8.75-1}{8.75}} \times 0.343 \times 1 \times 0.95 \times 0.00497 = 0{,}80$$

Таким образом, интенсивность рентгеновской флуоресценции хрома, возникшая в результате эффекта довозбуждения, составляет в данном случае 80% от интенсивности его флуоресценции, непосредственно возбужденной первичным излучением.

Задача № 46

Определить, каким (тонким, ненасыщенным или насыщенным) является слой меди толщиной 40 мкм при возбуждении ее рентгеновской флуоресценции первичным МоКα - излучением с длиной волны 0.71 А^0. Углы падения первичного и выхода флуоресцентного излучения считать одинаковыми и равными 45^0. При решении задачи использовать 1% -ные приближения к тонкому и насыщенному слою.

Решение

С погрешностью в 1% слой вещества считается насыщенным, если его толщина $x = \dfrac{4.6}{\left[\dfrac{\mu(\lambda)}{Sin\varphi} + \dfrac{\mu(\lambda_i)}{Sin\psi}\right]\times\rho}$. С той же погрешностью тонким считается слой с толщиной $x = \dfrac{0.022}{\left[\dfrac{\mu(\lambda)}{Sin\varphi} + \dfrac{\mu(\lambda_i)}{Sin\psi}\right]\times\rho}$. В этих уравнениях $\mu(\lambda)$ и $\mu(\lambda_i)$ – массовые коэффициенты ослабления первичного и флуоресцентного излучения соответственно; ρ - плотность флуоресцирующего образца. φ и ψ - углы падения первичного и отбора флуоресцентного излучения соответственно. Выполнив расчет предельной толщины тонкого и насыщенного слоя, можно определить, каким является слой, толщина которого равна 40 мкм.

Вычисления

Согласно Справочным таблицам Блохина и Швейцера
$\mu_{Cu}(\lambda_{MoK\alpha})$ =51.2 см^{2}г$^{-1}$ и $\mu_{Cu}(\lambda_{CuK\alpha})$ = 53.7 см^{2}г$^{-1}$
Следовательно, величина

$$\frac{1}{\left[\dfrac{\mu(\lambda)}{Sin\varphi} + \dfrac{\mu(\lambda_i)}{Sin\psi}\right]\times\rho} = \frac{1}{[51.2 + 53.7]\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 8.93} = 0.0015\text{см} = 15\text{мкм}$$

Откуда тонкий слой обеспечивается при x = 0.02×15= 0.3 мкм. Для насыщенного слоя необходима толщина x = 4.6×15 = 69 мкм. Таким образом, слой меди толщиной 40 мкм является промежуточным, т.е ненасыщенным.

Задача №47

Сопоставить интенсивности рентгеновской флуоресцентной $L\alpha_1$ - линии олова (Z=50), если длина волны первичного излучения отклоняется на малую величину $\Delta\lambda$ в коротковолновую и длинноволновую сторону от К –краю поглощения олова. Интенсивность первичного излучения в обоих случаях считать постоянной. Эффектами самовозбуждения и резонансного комбинационного рассеяния пренебречь. Выход К – флуоресценции для олова $\omega_K = 0.859$. Скачки поглощения $S_K = 6.0$; $S_{L3} = 3.10$; $S_{L2} = 1.4$; $S_{L1} = 1.2$.

Решение

Если длина волны первичного излучения короче К- края поглощения, то наряду с непосредственным возбуждением L_3 оболочки наблюдается ее ионизация в результате каскадных К->LL и К->LM переходов (в соответствии с условиями задачи другими эффектами пренебрегаем). Поэтому вероятность преобразования первичного фотона во флуоресцентный определяется как

$$\theta_i(\lambda-\Delta\lambda)=[\tau_K\frac{S_K-1}{S_K}P_{KL}+\tau_L\frac{S_{L3}-1}{S_K S_{L1} S_{L2} S_{L3}}]\times\omega_L p_{L\alpha},$$

где вероятность P_{KL} перехода вакансии с К- на L – оболочку в результате радиационных и Оже переходов примерно равна

$$P_{KL}\approx 0.9-0.1\omega_K$$

Если длина волны первичного излучения больше К – края поглощения, то ионизация L – оболочки в результате каскадных переходов отсутствует и вероятность преобразования первичного фотона во флуоресцентный задается выражением:

$$\theta_i(\lambda+\Delta\lambda)=\tau_L\frac{S_{L3}-1}{S_{L3}S_{L2}S_{L1}}\omega_L p_{L\alpha}$$

Соотношение интенсивностей рентгеновской флуоресценции в сравниваемых случаях равно отношению рассмотренных вероятностей

$$\frac{\theta_i(\lambda-\Delta\lambda)}{\theta_i(\lambda+\Delta\lambda)}=\frac{\tau_K\frac{S_K-1}{S_K}(0.9-0.1\omega_K)+\tau_L\frac{S_{L3}-1}{S_K S_{L1}S_{L2}S_{L3}}}{\tau_L\frac{S_{L3}-1}{S_{L1}S_{L2}S_{L3}}}$$

Вычисления

Длину волны первичного излучения принимаем равной К – краю поглощения олова: λ = 0.4906 A^0. По таблицам Thinh and Leroux находим:

$$\tau_K = 17.6481\times29.2001\times0.4906^{2.83} = 69.2 \text{ см}^2\text{г}^{-1}$$

$$\tau_L = 17.6481\times4.4647\times0.4906^{2.69} = 11.6 \text{ см}^2\text{г}^{-1}$$

Подставляя в конечную формулу, получаем:

$$\frac{\theta_i(\lambda-\Delta\lambda)}{\theta_i(\lambda+\Delta\lambda)} = \frac{69.2\dfrac{6.0-1}{6.0}(0.9-0.1\times0.859)+11.6\dfrac{3.1-1}{6.0\times3.1\times1.4\times1.2}}{11.6\dfrac{3.1-1}{3.1\times1.4\times1.2}} = 10.2$$

Т.е исключение каскадных переходов из процесса возбуждения атомов L- оболочки уменьшает интенсивность флуоресценции $L\alpha$ - линии олова в 10 раз.

Павлинский Гелий Вениаминович

Физика рентгеновского излучения

Сборник задач

Технический редактор: Владимирова Л.И.

Темплан 2003.

Подписано к печати Формат
Бумага писчая белая. Печать офсетная. Усл. печ. л. Уч.-изд.л.
Тираж экз.

Редакционно-издательский отдел
Иркутского государственного университета
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36.