

#### 4. Полное внешнее отражение рентгеновского излучения

Рассмотренный в предыдущем разделе минимальный угол скольжения  $(j_o)_{\min}$  при котором рентгеновское излучение проникает из вакуума в некоторую среду, является максимальным углом скольжения  $(j_o)_{\max}$ , при котором это излучение будет отражаться от поверхности. То есть в настоящем разделе принимается, что

$$(\varphi_o)_{\max} = \sqrt{2\delta}.$$

При  $j < (j_o)_{\max}$  наблюдается полное внешнее отражение рентгеновского излучения от поверхности среды. Этот эффект достаточно полно рассмотрен, например, в работах [Ошибка! Закладка не определена.,1,2].

Из формул Френеля для соотношения электрических векторов отраженного и падающего излучения следует, что соотношение интенсивностей этих излучений определяется выражением:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{(\varphi_o - a)^2 + b^2}{(\varphi_o + a)^2 + b^2}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(\varphi_o^2 - 2\delta)^2 + 4\beta^2} + (\varphi_o^2 - 2\delta) \right] \\ b^2 &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(\varphi_o^2 - 2\delta)^2 + 4\beta^2} - (\varphi_o^2 - 2\delta) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Если среда абсолютно прозрачна для рентгеновского излучения, то величина  $b$ , характеризующая поглощение, равна нулю. Тогда из (29) получаем:

$$a = \sqrt{\varphi_o^2 - 2\delta}$$

и

$$b = 0.$$

При этих условиях соотношение интенсивностей (28) упрощается и приобретает вид:

$$\frac{I}{I_0} = \left( \frac{j_o - \sqrt{j_o^2 - 2d}}{j_o + \sqrt{j_o^2 - 2d}} \right)^2 = \left( \frac{j_o - \sqrt{j_o^2 - (j_o)_{\max}^2}}{j_o + \sqrt{j_o^2 - (j_o)_{\max}^2}} \right)^2. \quad (30)$$

Из (30) следует, что при  $j_o = (j_o)_{\max}$  интенсивность отраженного излучения равна интенсивности падающего. При  $j_o >$

$(j_o)_{\max}$  отношение интенсивностей быстро падает. Скорость этого падения, найденная с использованием уравнения (30), отражена в табл. 3.

Таблица 3.

Зависимость соотношения интенсивностей отраженного и падающего излучений от угла падения  $j_o$  при  $j_o > (j_o)_{\max}$ .

$j_o / (j_o)_{\max}$	1	1,5	2	5
$I / I_o$	1	0,02	0,005	0,0001

Из таблицы 3 следует, что при  $j_o = 5(j_o)_{\max}$  интенсивность отраженного излучения практически равна нулю.

При  $j_o < (j_o)_{\max}$  выражение (30) для соотношения интенсивностей становится комплексным. Поэтому с целью нахождения соотношения интенсивностей в данном интервале углов  $j_o$  преобразуем выражение (6.30) к обычному комплексному виду:

$$\sqrt{\frac{I}{I_0}} = \frac{\varphi_0 - i\sqrt{(\varphi_0)_{\max}^2 - \varphi_0^2}}{\varphi_0 + i\sqrt{(\varphi_0)_{\max}^2 - \varphi_0^2}},$$

или после умножения числителя и знаменателя на разность членов знаменателя:

$$\sqrt{\frac{I}{I_0}} = \frac{2\varphi_0^2 - (\varphi_0)_{\max}^2}{(\varphi_0)_{\max}^2} - 2i \frac{\varphi_0 \sqrt{(\varphi_0)_{\max}^2 - \varphi_0^2}}{(\varphi_0)_{\max}^2} = \rho \cos \alpha + i \rho \sin \alpha.$$

В этом выражении нас интересует значение модуля  $r$ , который определяет величину комплексного выражения (значение  $a$  определяет фазу отраженной волны). Значения  $r$  и  $a$  можно найти, приравняв вещественной и мнимой части полученного выражения с последующим решением системы двух уравнений. Несложные вычисления показывают, что

$$r = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} a = \frac{2\varphi_0 \sqrt{(\varphi_0)_{\max}^2 - \varphi_0^2}}{(\varphi_0)_{\max}^2 - 2\varphi_0^2}.$$

То есть величина  $\frac{I}{I_0} = r^2 = 1$ .

Таким образом, для прозрачных сред при углах  $j_o < (j_o)_{\max}$ , как и при  $j_o = (j_o)_{\max}$ , интенсивность отраженного излучения равна интенсивности падающего.

Рассмотрим теперь случай, когда поглощением излучения в отражающей среде пренебречь нельзя.

Если  $j_o = 0$ , то из выражения (28) следует, что

$$\frac{I}{I_0} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1. \quad (31)$$

Если  $j_o \ll (j_o)_{\max}$ , то для расчета отражательной способности  $I/I_0$  может быть использовано выражение

$$\frac{I}{I_0} \approx 1 - \sqrt{\frac{2\beta}{\delta^2}} \varphi_0 \quad (32)$$

Если  $j_o = (j_o)_{\max}$ , то из (29) получаем:

$$a = b = \sqrt{\beta}.$$

Подставляя эти величины  $a$  и  $b$  в выражение (28), имеем:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{[(\varphi_0)_{\max} - \sqrt{\beta}]^2 + \beta}{[(\varphi_0)_{\max} + \sqrt{\beta}]^2 + \beta} = \frac{(\varphi_0)_{\max}^2 + 2\beta - 2(\varphi_0)_{\max} \sqrt{\beta}}{(\varphi_0)_{\max}^2 + 2\beta + 2(\varphi_0)_{\max} \sqrt{\beta}}.$$

С учетом того, что  $(j_o)_{\max} = \sqrt{2d}$ , это уравнение преобразуется в следующую зависимость:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\delta + \beta - \sqrt{2\beta\delta}}{\delta + \beta + \sqrt{2\beta\delta}} < 1 \quad (33)$$

Найденное соотношение интенсивностей всегда меньше единицы и уменьшается с ростом величины  $b$ , которая характеризует поглощающие свойства отражающей среды.

Если  $j_o \gg (j_o)_{\max}$ , то из выражений (28) и (29) следует, что рассматриваемая отражательная способность  $I/I_0$  с ростом угла  $j_o$  асимптотически стремится к нулю. При этом приближенное значение этой величины определяется соотношением:

$$\frac{I}{I_0} \approx \frac{\delta^2}{4\varphi_0^4}, \quad (34)$$

то есть уменьшается с ростом  $j_o$  пропорционально четвертой степени этого угла.

Из проведенного рассмотрения следует, что понятие предельного угла  $(j_o)_{\max}$  имеет смысл только в случае отражающих сред, прозрачных для рентгеновского излучения. При отражении от поглощающих сред интенсивность отраженного рентгеновского излучения с ростом угла скольжения  $j_o$  плавно падает от интенсивности, равной интенсивности падающего излучения для  $j_o = 0$ , почти до нуля для  $j_o \gg (j_o)_{\max}$ . Интенсивность отраженного излучения падает с ростом угла тем быстрее, чем значительнее поглощающие характеристика отражающей среды. Сказанное подтверждается расчетными и экспериментальными данными работы [Ошибка! Закладка не определена.], представленными на рис.4.

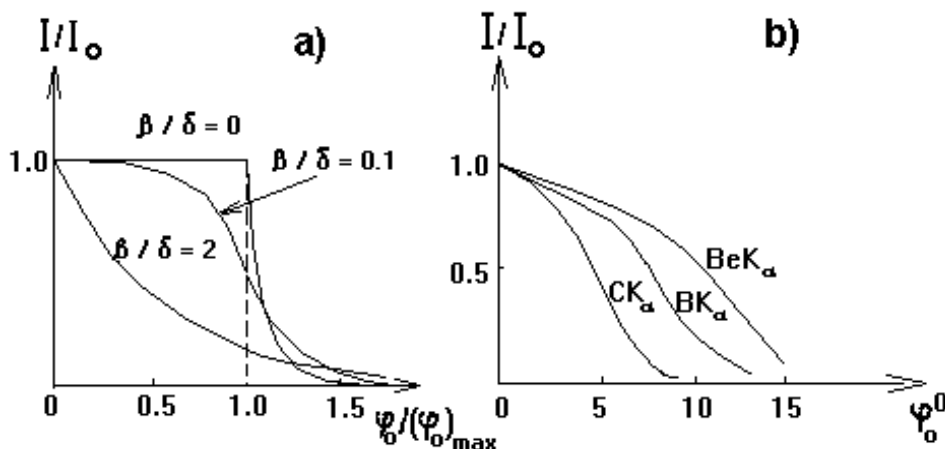


Рис.4. Зависимость соотношения интенсивностей отраженного и падающего рентгеновского излучения от угла падения этого излучения:

а) расчет для различных поглощающих характеристик отражающей среды; б) экспериментальные результаты для длинноволнового рентгеновского излучения элементов с малыми атомными номерами ( $I_{BeK_\alpha} = 114 A^\circ$ ;  $I_{BK_\alpha} = 67 A^\circ$ ;  $I_{CK_\alpha} = 45 A^\circ$ ). Отражение от поверхности титана.

Из рис.4(а) следует, что при  $b = 2d$ , например, для  $j_o = 1,5(j_o)_{\max}$  отношение  $I_o / I \gg 0,1$  и больше этого отношения, имеющего место при меньших поглощающих характеристиках отражающей среды (например, при  $b/d=0$ ).

Из рис. 4(b) следует, что интенсивность отраженного длинноволнового рентгеновского излучения довольно быстро падает из-за сильного его поглощения в отражающей среде. Вместе с тем, углы, при которых отраженная интенсивность рассматриваемых элементов существенна, оказываются довольно значительными.

Таким образом, отражение рентгеновского излучения даже при углах падения, меньших критического угла  $(j_o)_{\max}$  сопровождается частичным падением его интенсивности, что объясняется поглощением в отражающей среде.

Согласно теории, предложенной Эйхенвальдом [3], отраженная волна заходит в отражающую среду, движется по криволинейному пути и через половину периода выходит из этой среды.

Интенсивность проникающих в среду электромагнитных волн убывают с глубиной по экспоненциальному закону. Глубина проникновения излучения может быть определена величиной  $x_e$ , при которой его интенсивность уменьшается в  $e$  раз [4,5]:

$$x_e = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{(\theta^2 - 1)^2 + 4\beta^2} - (\theta^2 - 1)}}, \quad (35)$$

где  $\theta = \frac{\Phi_0}{(\Phi_0)_{\max}}$ ;  $l$  - длина волны падающего излучения.

Если угол падения равен критическому,  $j_o = (j_o)_{\max}$ , то  $q=1$  и из (35) получаем:

$$x_e = \frac{\lambda}{4\pi\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}}, \quad (36)$$

где  $t$  - линейный коэффициент поглощения этого излучения в отражающей среде.

При углах, много меньших критического,  $j_o \ll (j_o)_{\max}$ , для расчета глубины  $x_e$  может быть использовано приближенное выражение [2]:

$$x_e \approx \frac{\lambda}{4\pi\sqrt{2\delta}} \quad (37)$$

Поскольку согласно уравнению (13) декремент  $d$  пропорционален квадрату длины волны, то  $\frac{\lambda}{\sqrt{2\delta}} = \text{Const}$  и глубина

проникновения  $x_e$  в этом случае оказывается не зависимой от энергии фотонов падающего излучения.

При сравнительно больших углах,  $j_o \gg (j_o)_{max}$ , глубина проникновения существенно зависит от поглощающих свойств отражающей среды, что следует из приближенного выражения, приведенного в [2]:

$$x_e \approx \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\varphi_0}{\beta} \quad (38)$$

На рис.5 представлена зависимость глубины проникновения рентгеновского излучения с различной энергией квантов от угла падения этого излучения на поверхность кремния.

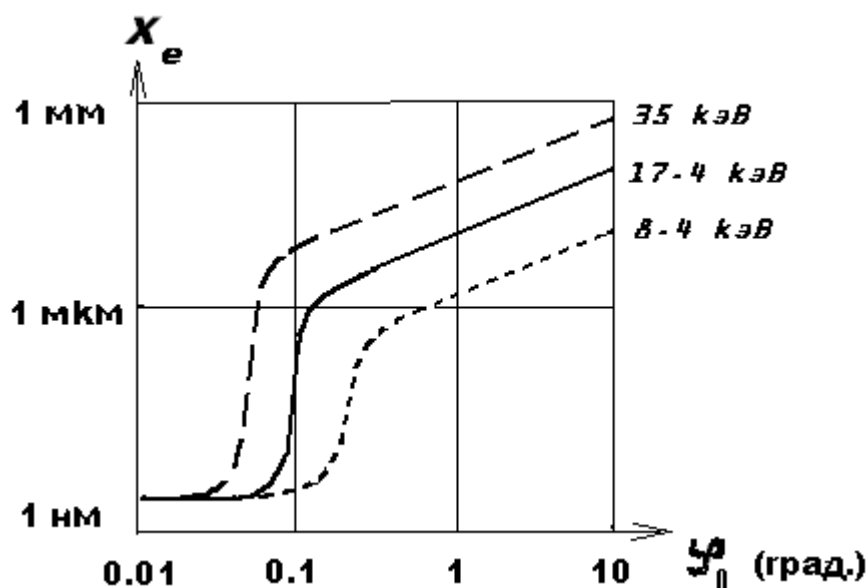


Рис.5. Зависимость глубины  $x_e$  проникновения рентгеновского излучения в кремниевую поверхность от угла скольжения  $j_o$  для трех различных энергий фотонов этого излучения.

Из рисунка 5 следует, что имеется область малых углов  $j_o$ , где глубина проникновения рентгеновского излучения в кремниевую поверхность не зависит от энергии фотонов этого излучения. Однако, в соответствии с уравнением (37) глубина проникновения зависит от  $d$  и, следовательно, определяется материалом отражающей среды. Рассчитанные по (37) минимальные глубины проникновения излучения в различные среды приведены в табл.4. Здесь же приведены рассчитанные по (36) глубины проникновения в рассматриваемые среды  $MoKa$ -излучения при критическом угле  $(j_o)_{max}$ .

Таблица 4.

Глубина проникновения излучения в различные среды при малых углах  $j_o \ll (j_o)_{max}$  и МоК- излучения при углах  $j_o = (j_o)_{max}$ .

Среда	$x_e$ при $j_o \ll (j_o)_{max}$ (нм)	$x_e$ для МоК $\alpha$ -излучения при $j_o = (j_o)_{max}$ (нм)
Плексиглас	4.3	241
Кварцевое стекло	3.2	83
Кремний	3.2	62
Медь	1.7	11.5
Тантал	1.3	6.0
Золото	1.2	5.0

Для поглощающих сред при углах падения, превышающих критический угол  $(j_o)_{max}$ , происходят одновременно процессы преломления и полного внешнего отражения падающего излучения. Если преломленный луч будет отражен другой поверхностью, которая параллельна первой, то становится возможной интерференция этих двух отраженных излучений, поскольку их длины волн одинаковы.

### 5. Интерференция рентгеновского излучения

Явление интерференции следует из суперпозиции двух или более пучков. Простейшим случаем интерференции является сложение двух волн одинаковой частоты при совпадении их направлений. В этом случае амплитуда  $A$  результирующей волны в некоторой точке определяется как

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi} \quad (39)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды складывающихся длин волн, а  $j$  – разность фаз этих волн в рассматриваемой точке. Если волны когерентны, то в заданной точке разность фаз  $j$  неизменна. Следовательно, результирующая амплитуда  $A$  характеризуется

постоянным пространственным распределением с чередующимися минимумами и максимумами. Если  $A_1=A_2$ , то максимум результирующей амплитуды равен удвоенной амплитуде слагаемых волн, а минимум равен нулю. Минимумы наблюдаются, когда разность фаз  $j$  равна  $p$ , а максимумы – когда  $j = 2p$ .

Двухлучевая интерференция рентгеновского излучения может наблюдаться при его отражении от верхней и нижней поверхности тонкого слоя, нанесенного на массивную подложку. Другая возможность состоит в интерференции падающего и отраженного от поверхности рентгеновского излучения. В последнем случае направления интерферирующих пучков не совпадают и поэтому образуются стоячие волны. Рассмотрим каждый из этих случаев.

### **5.1. Отражение рентгеновского излучения системой слой-подложка и многослойными структурами**

Пусть монохроматический пучок рентгеновского излучения падает из вакуума (или воздушной среды) под малым углом скольжения на тонкий однородный слой, нанесенный на плоскую идеально гладкую массивную подложку. Пусть материал подложки оптически менее плотен, чем материал слоя. Тогда при углах, близких к критическому углу полного внешнего отражения, происходит процесс, схема которого представлена на рис. 6.

Найдем разность  $\Delta$  хода лучей **I** и **II**:  $\Delta=(\mathbf{AB}+\mathbf{BC}) - \mathbf{DC}$ ;

Из рисунка следует, что  $\mathbf{AB}+\mathbf{BC}=(2d/\sin j)$  и  $\mathbf{DC}=(2d/\operatorname{tg} j)\times\cos j$ .

Необходимо учесть, что длина волны  $l_o$  после преломления меняет свою величину, принимая в слое значение  $l$ . Поэтому, чтобы получить разность хода в длинах волн падающего излучения, следует величину  $\mathbf{AB}+\mathbf{BC}$  помножить на отношение  $l_o/l = n$ , где  $n$  - показатель преломления. При этом получаем:

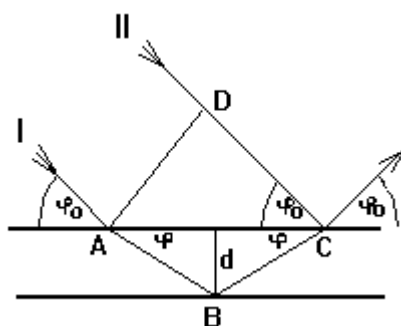


Рис.6. Отражение рентгеновского луча от тонкого слоя на подложке.



$$\Delta = \frac{2d}{\sin\varphi} n - \frac{2d}{\operatorname{tg}\varphi} \operatorname{Cos}\varphi_0.$$

Но  $\operatorname{Cos}j_o = n' \operatorname{Cos}j$ .

Следовательно,

$$\Delta = \frac{2d}{\sin\varphi} n - \frac{2d}{\sin\varphi} n \operatorname{Cos}^2\varphi = \frac{2d}{\sin\varphi} n(1 - \operatorname{Cos}^2\varphi);$$

или

$$\Delta = 2d' n' \operatorname{Sin}j \quad (40)$$

Представим полученную разность хода лучей  $\Delta$  как функцию угла падения  $j_o$ :

$$\Delta = 2dn\sqrt{1 - \operatorname{Cos}^2\varphi} = 2d\sqrt{n^2 - \operatorname{Cos}^2\varphi_0} = 2d\sqrt{\operatorname{Sin}^2\varphi_0 - 2\delta + \delta^2}.$$

Ввиду малости угла  $j_o$  можно положить, что  $\operatorname{Sin}j_o \gg j_o$ . Поскольку  $d$  мало, то можно пренебречь величиной  $d^2$ . Кроме того, как было показано ранее,  $2d = (j_o)_{\max}^2$ . С учетом сказанного из последнего выражения получаем:

$$\Delta \approx 2d\sqrt{\varphi_0^2 - (\varphi_0)_{\max}^2}. \quad (41)$$

Поскольку по условию отражение происходит от поверхности оптически менее плотной среды, то фаза колебаний электрического и магнитного векторов остаются неизменными. При этом интерференционному максимуму будет соответствовать условие  $\Delta = m\lambda_o$ , где  $m$  - целое число (разность хода лучей равна целому числу длин волн падающего излучения). Откуда следует:

$$2d\sqrt{\varphi_0^2 - (\varphi_0)_{\max}^2} = m\lambda_o \quad (42)$$

или

$$\varphi_0^2 = (\varphi_0)_{\max}^2 + \left(\frac{\lambda}{2d}\right)^2 \quad (42a)$$

Интерференционные минимумы возникают, когда разность хода равна нечетному числу длин полуволны падающего излучения. То есть

$$2d\sqrt{\varphi_0^2 - (\varphi_0)_{\max}^2} = (2m + 1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (43)$$

где  $n$  - целое число.

Если подложка является оптически более плотной средой по сравнению со слоем, то на границе слой – подложка фаза колебаний электрического и магнитного векторов меняется на  $\pi$  (происходит потеря половины длины волны). В результате условие (42) становится соответствующим интерференционному минимуму, а условие (43) - интерференционному максимуму.

Поскольку уравнения (42) и (43) несут смысловую нагрузку только при  $j_o > (j_o)_{\max}$ , то интерференционная картина наблюдается именно в этой области, то есть вне области полного внешнего отражения. При этом следует иметь в виду, что для достижения максимальной величины интерференционного сигнала необходимо, чтобы существенная часть падающего излучения проникла в слой, и одновременно возможно большая часть проникшего в слой излучения отразилась от поверхности слой-подложка. По крайней мере, должно выполняться условие

$$(j_{o, c})_{\max} < j_o \text{ и } j < (j_{o, cn})_{\max}, \quad (44)$$

где  $j$  - угол падения преломленного пучка на поверхность слой-подложка, а индексы  $c$  и  $cn$  относятся к поверхностям слоя и слоя-подложки, соответственно. То есть для соблюдения оптимальных условий угол падения первичного излучения на слой с подложкой должен быть достаточно малым.

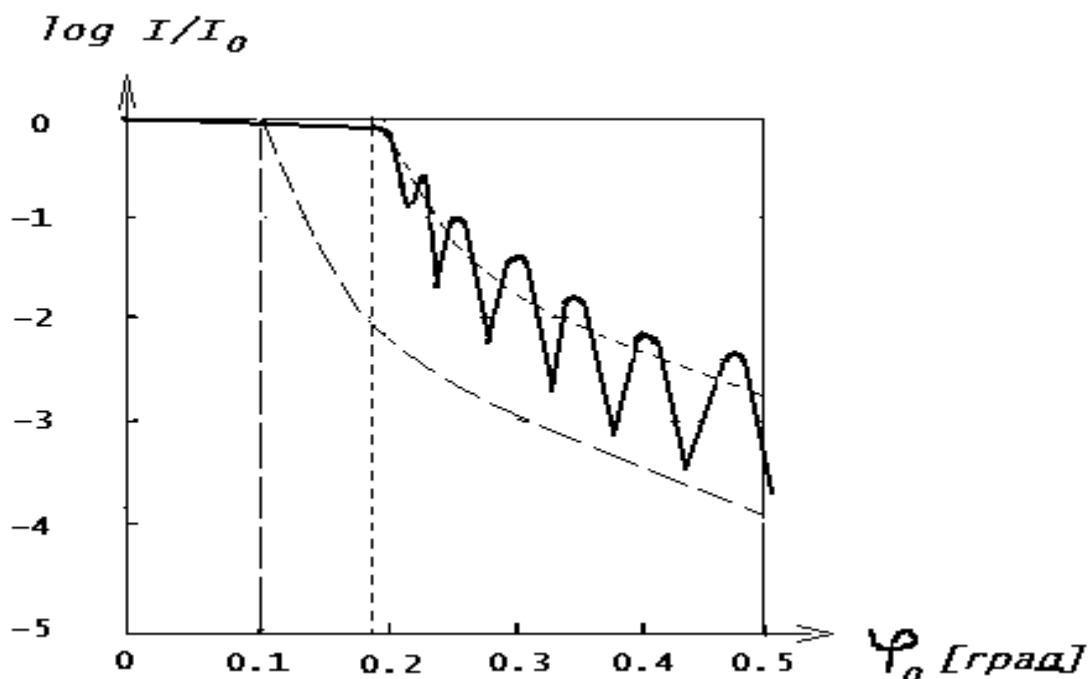


Рис.7. Отражательная способность  $I / I_0$  тонкого кобальтового слоя ( $d=30$  нм) на массивной кремниевой подложке как функция угла скольжения  $j_0$ . Расчет выполнен для  $MoK\alpha$  - излучения ( $\lambda=0.071$  нм). Мелкой штриховой кривой обозначена отражательная способность  $Co$ . Крупной штриховой кривой обозначена отражательная способность  $Si$ . Мелкая и крупная штриховые вертикали отмечают критические углы  $(j_0)_{max}$  для  $Co$  и  $Si$  соответственно.

1. Израилева Л.К., Боровский И.Б. Исследование формул Френеля в рентгеновской области// Изв.АН СССР . Сер. физ., 1972, т.36, No.2, с.438-450.
2. Klockenkamper R. Total-reflection X-ray fluorescence analysis (edit.Winefordner J.D.) // John Willey & Sons Inc.: New York, 1997, 245 p.
3. Эйхенвальд А.А. Теоретическая физика, ч.6// М.-Л., ГНТИ, 1931, 368с.
4. Синайский В.М. Экспериментальная проверка применимости формул Френеля в случае полного внешнего отражения рентгеновского излучения// Аппаратура и методы рентгеновского анализа, Л.: Машиностроение, 1974, вып.14, с.184-189.

---

5. Лосев Н.Ф., Краснолуцкий В.П., Лосев В.Н. Рентгеноспектральный флуоресцентный анализ с использованием полного внешнего отражения первичного излучения (Обзор).// Заводская лаборатория, 1993, т.59, N.6, с.20-29.

6