

Министерство образования Российской Федерации  
Государственное образовательное учреждение  
**ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Г.В. Павлинский

**ПРЕЛОМЛЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ РЕНТГЕНОВСКОГО  
ИЗЛУЧЕНИЯ**

Методическое пособие

Иркутск 2003 г

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Иркутского государственного университета

УДК 537.5  
ББК

Рецензент д. ф.-м. н., профессор Аграфонов Ю.В.

Павлинский Г.В. Преломление и отражение рентгеновского излучения: Методическое пособие.- Иркутск: ИГУ, 2003.- 46 с.

Пособие содержит сведения о таком важном разделе рентгеновского излучения, как его преобразование на границе двух сред, а также об интерференции отраженного и преломленного пучков. Указанные оптические свойства рентгеновского излучения широко используются в современном рентгеновском приборостроении.

Пособие ориентировано на студентов физических специальностей.

© Павлинский Г.В., 2003  
© Иркутский государственный  
университет, 2003

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Закон Снелля для электромагнитного излучения	4
2. Теоретические основы дисперсии	5
3. Преломление рентгеновских лучей	11
4. Полное внешнее отражение рентгеновского излучения	15
5. Интерференция рентгеновского излучения	21
5.1. Отражение рентгеновского излучения системой слой-подложка и многослойными структурами	22
5.2. Поля стоячих волн	29
6. Практическое использование оптических свойств рентгеновского излучения	35
6.1. Расширение возможностей рентгеновской спектрометрии	35
6.2. Способы фокусировки рентгеновского излучения	38
6.3. Сопоставление разрешающей и отражательной способности рентгенооптических элементов	43
Литературные источники	45

## 1. Закон Снелля для электромагнитного излучения

В соответствии с электромагнитной теорией света в облучаемом образце под влиянием электромагнитной волны возникают вынужденные колебания электронов, что приводит к возникновению индуцированной волны. Наложение индуцированной волны на первичную дает результирующую волну, которая распространяется в измененном направлении. То есть при переходе из вакуума в некоторую среду происходит преломление электромагнитного излучения. Преломление происходит при любой длине волны падающего на образец излучения, и все закономерности этого взаимодействия для видимой области спектра [1,2] справедливы для рентгеновского излучения.

В частности, в рентгеновской области справедлив закон Снелля для преломления луча на границе двух сред:

$$V_0 \sin j_0 = V \sin j, \quad (1)$$

где  $j_0$  и  $j$  - углы скольжения для падающего и преломленного излучения;  $V_0$  и  $V$  - фазовые скорости его распространения в контактирующих средах.

Из (1) следует, что

$$n_0 \sin j_0 = n \sin j, \quad (2)$$

где  $n_0 = c/V_0$  и  $n = c/V$  - показатели преломления для контактирующих сред;  $c$  - скорость света.

Для относительного показателя преломления имеем:

$$\frac{n}{n_0} = \frac{V_0}{V},$$

или, учитывая, что для среды  $I = \frac{V}{\lambda}$  и частота излучения  $\nu$  не меняется при переходе их одной среды в другую, получаем:

$$\frac{n}{n_0} = \frac{I_0}{I} \quad (3)$$

Если излучение падает на поверхность среды из вакуума, то  $n_0 = 1$ , и для показателя преломления  $n$  (называемого в этом случае абсолютным показателем преломления) имеем:

$$n = \frac{I_0}{I}. \quad (4)$$

Или, используя (6.2), для абсолютного показателя преломления среды можно записать:

$$n = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}. \quad (5)$$

В оптическом диапазоне длин волн любая среда является оптически более плотной по сравнению с вакуумом, т.е.  $n > 1$ . Следовательно,  $j_0 < j$  и при падении излучения из вакуума на образец направление преломленного луча ближе к нормали, чем направление падающего.

Оптические свойства рентгеновского излучения имеют ряд особенностей. Для выявления этих особенностей рассмотрим сначала зависимость показателя преломления от длины волны падающего излучения. Такая зависимость называется дисперсией.

## **2. Теоретические основы дисперсии**

Дисперсия в области рентгеновского излучения достаточно полно рассмотрена в монографии М.А.Блохина [3].

Частичный показатель преломления  $n_q$  для электронов  $q$ -уровня согласно теории Лоренца определяется выражением:

$$n_q = 1 - d_q - ib_q, \quad (6)$$

где величина  $b_q$  определяется поглощающими свойствами образца и связана с частичным коэффициентом поглощения  $t_q$  соотношением

$$\beta_q = \frac{\lambda}{4\pi} \tau_q, \quad (7)$$

а единичный декремент частичного показателя преломления  $d_q$  определяется как

$$\delta_q = \frac{2\pi e^2 l_q}{m} \frac{\omega^2 - \omega_q^2}{(\omega^2 - \omega_q^2)^2 + 4b_\omega^2 \omega^2}. \quad (8)$$

В выражении (8):

$l_q$  - число  $q$ -электронов в единице объема среды;

$\omega$  - круговая частота вынуждающих колебаний;

$\omega_q$  - круговая частота собственных колебаний электронов  $q$ -оболочки в атоме

$$\omega_q = \frac{2\pi c}{\lambda_q} = 2\pi\nu_q;$$

$b_w$  - величина, характеризующая процесс затухания вынужденных колебаний

$$b_\omega = \frac{e^2}{3mc^2} \omega^2.$$

Исключим из рассмотрения область частот  $w$ , близких к частоте собственных колебаний  $w_q$ . Пусть при этом величина  $(\omega^2 - \omega_q^2)^2$  настолько велика, что  $(w^2 - w_q^2)^2 \gg 4b_w^2 w^2$ . В этом случае, из уравнения (8) следует:

$$d_q = \frac{2pe^2}{m} \frac{l_q}{w^2 - w_q^2} = \frac{e^2}{2pm} \frac{l_q}{n^2 - n_q^2}. \quad (9)$$

Или, суммируя по всем оболочкам атома, получаем:

$$d = \frac{e^2}{2pm} \sum_q \frac{l_q}{n^2 - n_q^2}. \quad (10)$$

Разработанная Лоренцем теория для прозрачных сред пренебрегает поглощением, полагая, что  $b_q$  в формуле (6) равно нулю. Правильность такого приближения подтверждается данными, приведенными в таблице 1, в которой сопоставлены величины  $d$  и  $b$  при достаточно коротковолновом характеристическом  $MoK\alpha$ -излучении (Для приведенных в таблице соединений  $d = \sum_i c_i d_i$  и  $b = \sum_i c_i b_i$ , где  $c_i$  – содержание  $i$ -того элемента в соединении.)

Таблица 1.

Величины  $d$  и  $b$  различных преломляющих сред для рентгеновского  $MoK\alpha$ -излучения ( $\lambda = 0.071$  нм).

Среда	$d \cdot 10^8$	$b \cdot 10^8$
Плексиглас	90	0.055
Кварцевое стекло	150	0.46
Кремний	160	0.84
Медь	560	24.1
Тантал	910	87.5
Золото	1050	129.5

Из табл.1 следует, что даже для золота ( $Z=79$ ) величина  $d$  превышает величину  $b$  почти в 8 раз.

Из (10) следует, что в отличие от оптической области, где  $n \ll n_q$  и  $d < 0$ , для рентгеновской области спектра, где  $n \gg n_q$ , декремент показателя преломления положителен ( $d > 0$ ).

Тогда

$$n = 1 - d, \quad (11)$$

и при условии, что  $d > 0$  показатель преломления  $n$  для рентгеновской области спектра оказывается меньше единицы:

$$n = 1 - d < 1.$$

Иными словами, для рентгеновского излучения всякая среда является оптически менее плотной, чем вакуум. При этом  $n = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} < 1$  и  $j < j_0$ . То есть преломленный рентгеновский луч имеет меньший угол с поверхностью, чем падающий.

Принимая для рентгеновской области спектра, что  $n \gg n_q$ , из уравнения (10) находим:

$$d = \frac{e^2 L}{2\pi m c^2} I^2, \quad (12)$$

где  $L = \sum_q l_q$  - число электронов в единице объема;

$I$  - длина волны рентгеновского излучения.

Поскольку число электронов в единице объема определяется выражением:

$$L = \frac{rNZ}{A}$$

то

$$d = \frac{e^2 N}{2\pi m c^2} \left( \frac{rZ}{A} \right) I^2 = 2,70 \times 10^{10} \frac{rZ}{A} I^2, \quad (13)$$

где  $I$  выражена в см.

Из (13) следует, что

1. Величина  $d$  очень мала. Так, например, при взаимодействии излучения  $MoK\alpha$  ( $I = 0,7 \text{ \AA}$ ) с алюминием величина  $d$  согласно расчетам оказалась равной  $d = 1,74 \cdot 10^{-6}$ . Эта величина близка к экспериментально найденной величине  $d = 1,68 \cdot 10^{-6}$ .

2. Для данного вещества (то есть когда величина  $L$  не меняется) отношение  $d / I^2$  постоянно:  $\frac{\delta}{\lambda^2} = \frac{e^2 L}{2\pi m c^2} = Const$ . Постоянство величины  $\frac{\delta}{\lambda^2}$  также хорошо подтверждается экспериментом для случаев  $I \ll I_q$ .

Отмеченная выше близость коэффициента преломления к единице препятствует решению ряда практических задач. Для увеличения этого коэффициента следовало бы использовать большие длины волн. Однако, увеличение  $I$  приближает ее к области длин волн  $I_q$  краев поглощения, где дисперсия усложняется влиянием частот собственных колебаний электронов атома и существенным ростом коэффициента истинного поглощения  $t$ , что приводит к росту величины  $b$ .

Оценим пригодность теории Лоренца в так называемой области аномальной дисперсии, где  $I$  становится близким к  $I_q$ . Переходя в выражении (10) от частот к длинам волн, для величины  $d / \lambda^2$  можем записать:

$$\frac{d}{I^2} = \frac{e^2}{2\pi m c^2} \sum_q \frac{l_q I_q^2}{I_q^2 - I^2} \quad (14)$$

Выразим величину  $l_q$  (число  $q$ -электронов в единице объема) через  $z_q$  число  $q$  - электронов в атоме, где  $\lambda_q$  близко к  $\lambda$ :

$$l_q = \frac{rN}{M} z_q .$$

Здесь  $r$  - плотность вещества;  $M$  - молекулярный вес;  $N$  - число Авогадро.

Подставив это выражение в (14) и выделив из суммы  $K$  - оболочку, получаем:

$$\frac{d}{I^2} = \frac{e^2}{2\pi m c^2} \frac{rN}{M} \left( \frac{z_K I_K^2}{I_K^2 - I^2} + \sum_{q \neq K} \frac{z_q I_q^2}{I_q^2 - I^2} \right) . \quad (15)$$

Рассмотрим область длин волн вблизи длины волны  $K$  - края поглощения. В этом случае  $I \ll I_q$  для всех остальных оболочек и можно принять, что

$$\sum_{q \neq K} \frac{z_q \lambda_q^2}{\lambda_q^2 - \lambda^2} \approx \sum_{q \neq K} z_q = Z_A - z_K$$

С учетом полученного выражения формула (15) переписется как



$$\frac{\delta}{\lambda^2} = \frac{e^2}{2\pi mc^2} \frac{\rho N}{M} \left( Z_A - \frac{z_K}{1 - \left(\frac{\lambda_K}{\lambda}\right)^2} \right). \quad (16)$$

Из выражения (16) следует, что при  $l=l_K$  с увеличением  $l$  функция  $d/l^2$  изменяется от  $+\infty$  до  $-\infty$ .

Расчитанные по (16) и экспериментальные величины  $d/l^2$  для кальцита ( $\text{CaCO}_3$ ) сопоставлены на рис.1.

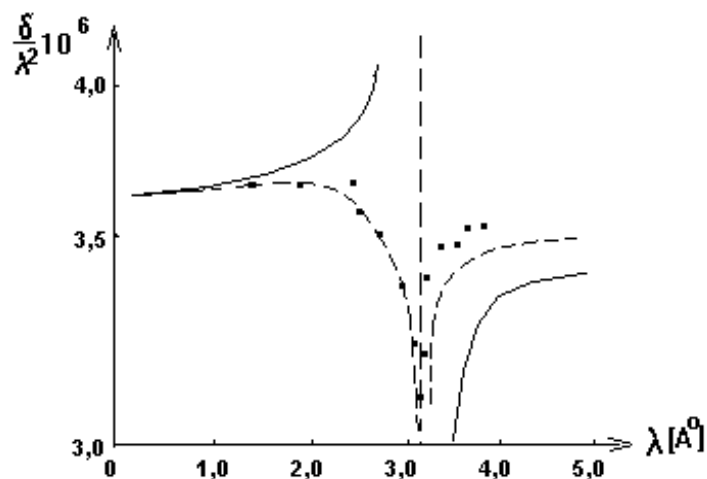


Рис.1. Зависимость  $d/l^2$  от длины волны  $l$  для кальцита в области  $K$  - края поглощения кальция. Сплошная линия - расчет по Лоренцу. Пунктирная линия - расчет по Калману и Марку. Точками показаны результаты эксперимента.

Из рис.1 следует, что теория Лоренца, вполне приемлемая в области коротких длин волн, дает заниженные результаты в области  $l > l_K$ , и неверна в окрестностях самого края поглощения. Причиной несоответствия расчетных и экспериментальных результатов является пренебрежение поглощением средой падающего излучения. Это поглощение излучения в области  $l_q$ , как отмечалось ранее, оказывается существенным.

Влияние поглощения учтено в работах Калмана и Марка [4,5]. При этом для  $d_q/l^2$  ими для  $q$  – оболочки получено следующее выражение:

$$\frac{d_q}{l^2} \approx \frac{e^2 l_q}{2\pi mc^2} \left[ 1 + \frac{l^2}{l_q^2} \ln \left| 1 - \frac{l_q^2}{l^2} \right| \right]$$

Суммируя по всем оболочкам атома, они получили:

$$\frac{d}{I^2} = \frac{e^2}{2\pi mc^2} \left[ \sum_q l_q + I^2 \sum_q \left( \frac{l_q}{I_q^2} \ln \left| 1 - \frac{I_q^2}{I^2} \right| \right) \right] \quad (17)$$

Сравнивая формулу (17) с найденной из теории Лоренца (уравнение (14)), замечаем, что вместо суммы, содержащей в знаменателе разность квадратов  $I_q^2 - I^2$ , появилось более сложное выражение. При  $I = I_q$  квадратная скобка, а, следовательно, и отношение  $d/I^2$  становится равным  $-\infty$ . При этом ветвь кривой для области  $I < I_K$  в рассмотренном ранее случае рассеяния излучения на кальците (см. рис.1) хорошо согласуется с экспериментальными данными. Оставшееся некоторое несоответствие теории и эксперимента для области  $I > I_K$  объясняется пренебрежением экранирования  $K$ -электронов электронами наружных оболочек.

Учет такого экранирования в предложенной Хенлем [6] квантовой теории дисперсии позволил достичь хорошего согласия и в длинноволновой области рассеяния.

Подобные аномальные области рассеяния рентгеновского излучения наблюдаются также в окрестностях длин волн  $L$ -,  $M$ - и т.д. краев поглощения.

Результаты точного и приближенного расчета зависимости декремента  $d$  от длины волны  $I$  падающего излучения в аномальной области  $L$  – край поглощения для золотой поверхности представлены на рис.2.

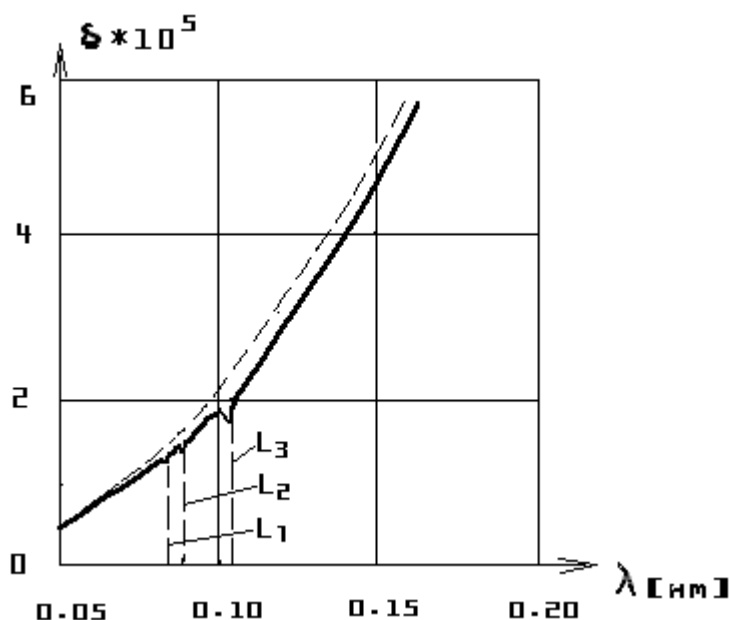


Рис.2. Зависимость декремента  $d$  от длины волны падающего излучения для золота ( $Z=79$ ) (сплошная кривая). Пунктирной кривой представлен приближенный расчет по формуле (13).

### 3. Преломление рентгеновских лучей

Коэффициент преломления при переходе излучения из вакуума в некоторую среду определяется соотношением (4)

$$n = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}.$$

и в области рентгеновского излучения, как показано в предыдущем разделе, оказывается меньше единицы ( $n < 1$ ). Тогда угол падения  $j_o$  излучения оказывается больше угла  $j$ , под которым излучение распространяется в среде ( $j_o > j$ ). Поэтому имеется такой минимальный угол  $(j_o)_{min}$ , при котором излучение не проникает из вакуума в вещество. При этом, как это следует из рис. 3,  $Dj = (j_o)_{min}$ .

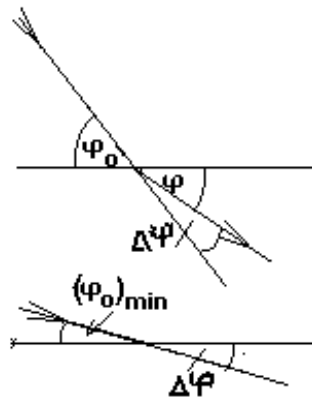


Рис. 3. Обычный и предельный вариант преломления рентгеновского излучения.

Найдем зависимость  $Dj$  от угла  $j$  при больших его значениях. Используя выражения (11) и (4), можем записать:

$$n = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} = 1 - \delta.$$

Поскольку  $d$  - малая величина, то

$$\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} = \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta} \approx \frac{1}{1 + \delta}. \quad (18)$$

Откуда  $\text{Cos}\varphi = \text{Cos}\varphi_0 + \delta \times \text{Cos}\varphi_0$ ,  
или  $\text{Cos}\varphi_0 - \text{Cos}\varphi = -\delta \times \text{Cos}\varphi_0$ . (19)

Учитывая, что углы  $j_o$  и  $j$  отличаются друг от друга незначительно, можно положить, что

$$D\text{Cos}j = -\text{Sin}j_o Dj. \quad (20)$$

Из последних двух соотношений получаем:

$$Dj = d \cdot \text{Ctg}j_o. \quad (21)$$

Из (21) следует:

1) при  $j_o = p/2$  имеем  $Dj = 0$ , то есть излучение не меняет своего направления.

2) с уменьшением  $j_o$  от  $p/2$  до  $(j_o)_{min}$  величина  $Dj$  растет, достигая максимума  $(Dj)_{max}$  при  $j_o = (j)_{min}$ .

При малых  $j_o$ , близких к  $(j)_{min}$ , величины  $Dj$  и  $j_o$  оказываются соизмеримыми. В этих условиях дифференцирование (20) неприменимо.

Найдем отклонение  $Dj$  для малых  $j_o$ .

При малых  $j_o$  величина  $\text{Cos}j_o = 1$  и в (19)  $d \cdot \text{Cos}j_o \gg d$ . Поэтому:

$$\text{Cos}j_o - \text{Cos}j = -d. \quad (22)$$

Разность косинусов представим как

$$\text{Cos}\varphi_0 - \text{Cos}\varphi = -2\text{Sin}\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}\text{Sin}\frac{\varphi_0 + \varphi}{2}$$

С учетом малости углов можно принять синусы этих углов равными самим углам.

Тогда  $\text{Cos}\varphi_0 - \text{Cos}\varphi = -2(Dj/2)(j_o + j_o - Dj)/2$ ,

или  $\text{Cos}j_o - \text{Cos}j = Dj(j_o - Dj/2)$ . (23)

Подставляя (23) в (22), получаем:

или  $j_o Dj - Dj^2/2 - d = 0$   
 $Dj^2 - 2j_o Dj + 2d = 0$ .

Решая полученное квадратное уравнение, имеем:

$$Dj = \varphi_0 - \sqrt{\varphi_0^2 - 2\delta} \quad .(24)$$

В предельном случае

$$(Dj)_{\max} = (\varphi_0)_{\min} - \sqrt{(\varphi_0)_{\min}^2 - 2\delta} .$$

Из рис.3 следует, что  $(Dj)_{\max} = (j_o)_{\min}$ . Поэтому из полученного выражения получаем:

$$\begin{aligned} & (\varphi_0)_{\min}^2 = 2\delta \\ \text{или} & \quad (\varphi_0)_{\min} = \sqrt{2\delta} . \end{aligned} \quad (25)$$

Используя (24) и (25), имеем:

$$Dj = \varphi_0 - \sqrt{\varphi_0^2 - (\varphi_0)_{\min}^2} . \quad (26)$$

Уравнение (26) позволяет проследить зависимость отклонения  $Dj$  от величины самого угла  $j_o$  и сопоставить ее с аналогичной зависимостью, которая следует из уравнения (21). Пусть на поверхность алюминия ( $Z=13$ ,  $A=27$ ,  $r = 2,7 \text{ г/см}^3$ ) падает излучение с длиной волны  $0,745 \text{ \AA}$  ( $NbKa$  - линия). В этом случае область дисперсии далека от аномальной, и расчет величины  $d$  может быть выполнен по формуле (13):

$$\delta = 2,70 \times 10^{10} \times \frac{\rho Z}{A} \times \lambda^2 \approx 2 \times 10^{-6} .$$

Тогда в соответствии с выражением (25) величина  $(j_o)_{\min}$ :

$$(j_o)_{\min} = \sqrt{2\delta} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ рад} .$$

Рассчитанные по формулам (21) и (26) величины угла  $Dj$  для различных углов падения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Зависимость величины  $Dj$  от превышения угла падения  $j_o$  над минимальным углом  $(j_o)_{\min}$

$j_o / (j_o)_{\min}$		10	5	2	1
$Dj$ [рад]	По (21)	$0,10 \cdot 10^{-3}$	$0,20 \cdot 10^{-3}$	$0,50 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$
	по (26)	$0,10 \cdot 10^{-3}$	$0,20 \cdot 10^{-3}$	$0,54 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$

Из табл.2 следует, что при заданных условиях неточность выражения (21) сказывается только до углов  $j_o$ , примерно в два раза превышающих минимальный угол преломления  $(j_o)_{min}$ . При больших углах эта формула вполне применима для вычисления направления преломленного луча.

В завершение настоящего раздела получим приближенное соотношение между углами  $j$  и  $j_o$ , часто используемое при сравнительно малых их величинах и учитывающее поглощение излучения преломляющей средой. Абсолютный коэффициент преломления может быть представлен как

$$n = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} = 1 - \delta - i\beta.$$

Возводя в квадрат обе части этого равенства, получаем:

$$\frac{1 - \sin^2 \varphi_0}{1 - \sin^2 \varphi} \approx 1 - 2(\delta + i\beta).$$

В предположении, что углы  $j$  и  $j_o$  малы, имеем:

$$\frac{1 - \varphi_0^2}{1 - \varphi^2} \approx 1 - 2(\delta + i\beta)$$

откуда, с учетом малой величины произведений  $j_o^2(d + ib)$  и  $j^2(d + ib)$ , получается приближенное выражение:

$$\varphi \approx \sqrt{\varphi_0^2 - 2\delta - 2i\beta} \quad (27)$$

7

- 
1. Ландсберг Г.С. Оптика// 5 изд., М., 1976 (Общий курс физики).
  2. Born M., and Wolf E. Principles of optics// Pergamon Press, London, 6<sup>th</sup> ed., 1980.
  3. Блохин М.А. Физика рентгеновских лучей// М.: ГИТТЛ, 1957, 518 с.
  4. Kallman H. u. Mark H. Naturwiss., 1926, Bd.14, s.648.
  5. Kallman H. u. Mark H. Ann. d. Physik (4), 1927, Bd.82, s.585.
  6. Honl H. Ann. d. Physik, 1933, Bd.18, s.538.

7