

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**  
**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

ИРКУТСК 2003 г

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Иркутского государственного университета

УДК 53:001.4

Молекулярная физика: Лабораторный практикум / Под ред. проф.  
А.Д. Афанасьева. – Иркутск: ИГУ, 2003. –157 с.

Пособие содержит описания 11 лабораторных работ по курсу общей физики,  
раздел молекулярная физика. Описания лабораторных работ предназначены  
для студентов первого курса физических специальностей вузов.

Научный редактор - проф. А.Д. Афанасьев  
Рецензент – проф. И.А. Кринберг

© Иркутский государственный  
университет, 2003

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-1 А.Д. Афанасьев, Л.А. Щербаченко .....</b>	<b>5</b>
ИЗУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ .....	5
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-2 Д.Ю. Климушкин .....</b>	<b>30</b>
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ.....	30
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-3 Г.М. Заирова, Е.Ф. Мартынович .....</b>	<b>47</b>
МОЛЕКУЛЯРНОЕ СТРОЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ .....	47
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-4 В.В. Дорохова, Е.Ф. Мартынович, Д.Ю. Климушкин, Л.И. Ружников.....</b>	<b>65</b>
ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗОНДА.....	65
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-5 В.В. Дорохова, А.Д. Афанасьев.....</b>	<b>76</b>
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА И ЭФФЕКТИВНОГО ДИАМЕТРА МОЛЕКУЛ ГАЗА .....	76
Вычисление относительной скорости.....	85
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-6 Кузнецова Г.А. ....</b>	<b>88</b>
ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ .....	88
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-7 В.В. Дорохова .....</b>	<b>102</b>
ИЗУЧЕНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ПЕРВОГО РОДА .....	102
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-8 В.В. Дорохова, С.В. Ловцов.....</b>	<b>111</b>
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ УДЕЛЬНЫХ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ ВОЗДУХА .....	111
Вывод формулы для оценки значения $g$ .....	122
Обработка результатов измерений по методу наименьших квадратов.....	122
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-9 С.В. Ловцов.....</b>	<b>125</b>
ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ СЛАБО ПРОВОДЯЩИХ ТЕПЛО .....	125
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-10 Г.М. Заирова, Е.Ф. Мартынович ...</b>	<b>132</b>
ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТОДОМ ОХЛАЖДЕНИЯ.....	132
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-11 В.В. Дорохова, А.Д. Афанасьев.....</b>	<b>148</b>
ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ГАЗОВ.....	148

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Учебное пособие представляет собой сборник описаний лабораторных работ по курсу общей физике, раздел молекулярной физики. Это пособие является вторым учебным пособием, которое коллектив авторов кафедры Общей физики ИГУ выпускает для студентов первого курса физического факультета. Первая подобная работа, сборник описаний лабораторных работ по механике, была издана в 2001 году. Наш опыт показал, что издание описаний в виде одной книжки удобно для студентов и преподавателей.

В данном сборнике собрано 11 описаний лабораторных работ, содержащих краткую теорию изучаемой проблемы, выводы основных рабочих формул и задания для выполнения лабораторных работ. Контрольные вопросы и литература, приведенные в конце каждой работы, призваны помочь студентам при самоподготовке. Сборник можно использовать при организации индивидуальных занятий студентов дома и для работы в учебной лаборатории. Преподавателям его можно использовать в качестве методического пособия при планировании и организации занятий.

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-1**

### **ИЗУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ**

#### **Цель работы**

Ознакомиться со статистическими закономерностями физических величин

#### **Задача работы**

Статистическое исследование эмпирической совокупности частоты электрических сигналов, регистрируемых от сети пересчетным прибором

### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ**

Физические закономерности, которые возникают в больших собраниях однородных объектов, называются статистическими; наука, изучающая эти закономерности, называется статистикой.

Множественность связей и в ряде случаев невозможность их расчленения заставляют исследователя в каждом отдельном случае наблюдать лишь суммарный эффект действия многих факторов, из которых только один (или некоторые) представляет для него самостоятельный интерес, остальные же являются побочными факторами, затемняющими конечный результат исследования. Чтобы выявить основные факторы, исследователь вынужден повторять свое наблюдение несколько, а иногда и много раз. Такое многократное наблюдение позволяет пользоваться соответствующими суммарными статистическими характеристиками: средней величиной, среднеквадратичным отклонением и т.п., которые дают существенную информацию об изучаемых явлениях.

В настоящее время статистический метод использует каждый исследователь, экспериментатор, инженер-технолог, какую бы проблему массовых процессов он не изучал. Методы математической статистики используются при изучении радиоактивного распада атомов, пульсации тока в силовых системах, в различных вопросах телефонии, радиопередач, термодинамики и т.д. Интенсивный рост научно-технического прогресса значительно увеличил интерес к статистическому методу как к приему исследования, который широко должен применяться для расчета общей погрешности механизма, станка и прибора, для установления точности оценки процессов. Методы математической статистики необходимы в

области биофизики, биохимии, геофизики, геологии, технологии и организации производства. Любая научная лаборатория не может обойтись без статистической обработки результатов эксперимента, оценки погрешностей и выявления в ряде случаев взаимосвязей. Огромные архивные материалы, накопленные в научных и производственных лабораториях по методам математической статистики, могут дать ценные результаты и во многих случаях могут дополнить дорогостоящие исследования. Математическая статистика дает возможность по одним величинам вычислять другие, недоступные или малодоступные непосредственному наблюдению. Математическая статистика в сочетании с другими науками вооружает такими математическими приемами, которые позволяют предвидеть течение и развитие массового повторяющегося процесса, установить его характер и формы.

### **Случайное событие, случайная величина**

Основой для построения статистических моделей служит теория вероятностей. Предметом этой теории является изучение случайных событий и случайных величин.

Событие называется случайным, если при данных условиях оно может произойти или не произойти.

Случайная величина - это переменная, принимающая в результате испытаний то или иное числовое значение в зависимости от случайного исхода испытания.

Случайная величина может рассматриваться как функция, аргументом которой служит элементарное случайное событие поля испытаний. Можно выделить два основных типа случайных величин: дискретные и непрерывные.

Дискретной случайной величиной называется такая случайная величина, которая может принимать конечное или бесконечное счетное множество значений, элементы которого могут быть занумерованы в каком-нибудь порядке и выписаны в последовательности. В качестве примера дискретных величин, которые могут принимать целочисленные значения, можно указать число дефектных изделий в какой-либо партии, число вызовов, поступающих на телефонную станцию в часы наибольшей нагрузки, число частиц в геологической пробе и т.д.

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения в любых интервалах, находящихся в указанных участках.

К величинам такого характера относятся погрешности измерений, координаты молекул газа в сосуде, шумы в радиоприемных устройствах и т.п.

### **Свойства эмпирических статистических совокупностей. Графическое изображение распределения**

Совокупность случайных величин, обладающих качественной общностью, называется статистической совокупностью, а каждый член этой совокупности вариантом. Число вариант в совокупности представляет объём совокупности. Статистическая совокупность может состоять из непрерывно меняющихся или дискретных случайных величин.

К первой задаче статистической обработки относится группировка вариант в совокупности. Группировка является одним из важнейших положений статистической теории. Метод группировок определяется задачами исследования и является основой математической статистики.

Рассмотрим один из способов группировок, заключающийся в распределении числа случайных величин по значениям дискретной случайной величины или по интервалам непрерывной случайной величины.

Рассмотрим данный способ группировки на примере статистической совокупности, представляющей собой золотосодержащую пробу, в которую попало 100 золотых частичек разного диаметра. Диаметр частичек является непрерывной случайной величиной  $x_i$ ;

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_{100}.$$

Совокупность вариант-диаметров записывается в виде 10 столбцов по 10 вариант в каждом в той последовательности, в какой значения диаметра были получены в результате эксперимента. Затем определяется размах изменения вариант совокупности

$$\Delta x = (x_{\max} - x_{\min}). \quad (1)$$

Полученный размах (1) совокупности делится на определенное число интервалов  $K$ , которое определяется объемом совокупности  $N$

$$K = \sqrt{N}. \quad (2)$$

Ширина каждого интервала,

$$\Delta h = \frac{\Delta x}{K}. \quad (3)$$

должна способствовать выявлению основных черт распределения случайных величин и сглаживанию случайных колебаний. Поэтому экспериментатор может отступить от указанного числа интервалов (2) и брать большее или меньшее число интервалов в зависимости от поставленных задач

эксперимента и объема совокупности. При этом нужно помнить, что ширина интервала не должна быть меньше цены деления измерительного прибора. Если деление (3) не выполняется нацело, то результат округляют обычно в большую сторону, чтобы не потерять часть полученных результатов.

Для нахождения числа вариантов в каждом интервале необходимо определить границы всех интервалов. За верхнюю границу первого интервала нужно взять  $x_{\max}$ . Следующие границы всех интервалов распределяются таким образом:

$$\begin{aligned} & x_{\max} \div (x_{\max} - \Delta h), \\ & (x_{\max} - \Delta h) \div (x_{\max} - 2\Delta h), \\ & (x_{\max} - 8\Delta h) \div (x_{\max} - 9\Delta h). \end{aligned}$$

При совпадении границ интервалов с вариантой, последнюю вносят в интервал по совпадению с верхней границей интервала.

Число вариант, попавших в интервал, называется частотой  $n_i$ . Отношение частоты к объему совокупности - относительной частотой или частостью  $v_i$ :

$$v_i = \frac{n_i}{N} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (4)$$

Распределение частоты по значениям случайной дискретной величины или по интервалам непрерывной случайной величины называется законом распределения.

### Представление экспериментального закона распределения

Закон распределения можно представить в виде таблицы:

$x_i$													
$v_i$													

Более наглядно закон распределения представляется графически.

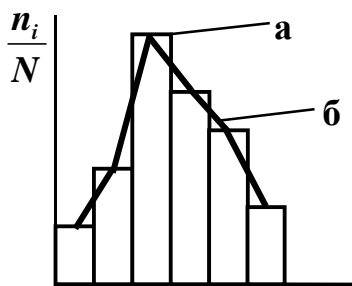


Рис. 1. Пример распределения

Среди многих способов графического изображения распределения чаще всего применяются два способа: построение полигона частот (рис.1, б) и построение гистограммы (рис.1, а). В первом случае значения, лежащие в данном интервале, "стягиваются" к середине этого интервала, т.е. условно считают, что все варианты любого интервала имеют величину,



соответствующую его середине. На гистограмме (рис.1) каждый интервал изображается прямоугольником с шириной, пропорциональной ширине интервала, и с высотой, пропорциональной частоте данного интервала. Изображение распределения с помощью гистограммы представляет собой другой крайний случай идеализации: все значения частот, лежащие внутри интервала, считаются распределенными равномерно по всему интервалу. Поэтому в принципиальном отношении оба способа отображения следует считать равноценными и выбор между ними определяется привычкой исследователя.

### Параметры распределения

Главным орудием статистики являются обобщающие показатели, основанные на данных массового наблюдения. Важнейшими из обобщающих показателей массового процесса являются средние величины. В достаточно большом числе наблюдений среднее  $\bar{x}$  отражает типичные черты массового процесса. Среднее - это тот центр, около которого группируются отдельные значения наблюдаемых и изучаемых элементов массового процесса. В практике работы научно-исследовательских лабораторий из многих видов средних, которые известны в общей теории статистики, чаще всего применяется среднее арифметическое. Среднее арифметическое есть частное от деления суммы значений признака на число элементов совокупности.

Среднее арифметическое обладает рядом математических свойств.

1. Среднее арифметическое суммы равно сумме средних арифметических.

2. Если одно из слагаемых - постоянная величина, то среднее арифметическое суммы равно сумме средних арифметических плюс постоянная величина.

3. Постоянный множитель или делитель можно вынести за знак среднего.

4. Алгебраическая сумма отклонений  $(x_i - \bar{x})$  равна нулю.

5. Сумма квадратов отклонений от среднего арифметического меньше, чем сумма квадратов отклонений от любого другого числа  $a$ :

$$\sum (x - a)^2 = \sum [(x - \bar{x}) - (a - \bar{x})]^2 = \sum [(x - \bar{x})^2 - 2(x - \bar{x})(a - \bar{x}) + (a - \bar{x})^2].$$

Эта сумма распадается на три суммы:

$$\sum (x-a)^2 = \sum (x-\bar{x})^2 - 2(a-\bar{x})\sum (x-\bar{x}) + \sum (a-\bar{x})^2,$$

так как  $\sum (x-\bar{x})=0$ , поэтому

$$\sum (x-a)^2 = \sum (x-\bar{x})^2 + \sum (a-\bar{x})^2 = \sum (x-\bar{x})^2 + (a-\bar{x})^2. \quad (5)$$

Отсюда видно, что

$$\sum (x-\bar{x})^2 \leq \sum (x-a)^2.$$

6. Среднее может быть получено как сумма произведений вариант на их частоты

$$\bar{x} = \sum_{i=1} n_i x_i \quad - \text{взвешенное среднее}, \quad (6)$$

### Среднее квадратичное отклонение и дисперсия

В качестве показателя размера вариации вариант в статистике принято среднее квадратичное отклонение  $S$ . Для его вычисления все отклонения возводятся в квадрат, потом вычисляется среднее из полученных квадратов - средний квадрат отклонений, а затем из этого среднего извлекают корень. В экспериментальных распределениях при определении среднего квадрата квадраты отклонений делятся на  $(N-1)$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}. \quad (7)$$

Дисперсия распределения  $D$ :

$$D = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}. \quad (8)$$

Формулу дисперсии (8) легко представить в другом виде, более удобном для вычисления. Используем формулу (5)

$$\sum (x_i - a)^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (a - \bar{x})^2.$$

Поделим её на  $(N-1)$

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1} = D = \frac{\sum (x_i - a)^2}{N-1} - (a - \bar{x})^2. \quad (9)$$

Когда  $a=0$ ,  $D = \frac{\sum x_i^2}{N-1} - \bar{x}^2$ , т.е.  $D = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ .

### Свойства дисперсии и среднего квадратичного отклонения

1. Если все значения вариант увеличить на одну и ту же величину  $a$ , то на ту же величину  $a$  увеличивается их среднее арифметическое. Отклонения же останутся без изменения. Значит, останутся без изменения дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

2. Если все значения вариант умножить на одно и то же число  $K$ , то в  $K$  раз увеличится их среднее арифметическое  $\bar{x}$ , отклонения от среднего арифметического  $x - \bar{x}$  и среднее квадратичное отклонение  $S$  (дисперсия) увеличится в  $K^2$  раз.

3. Запишем формулу (9) в виде

$$\frac{\sum (x_i - a)^2}{N - 1} = S^2 + (a - \bar{x})^2.$$

Средняя величина квадратов отклонений вариант от любой величины  $a$ , больше дисперсии  $D$ , на квадрат отклонения этой величины  $a$  от среднего арифметического вариант.

4. Если совокупность разбита на несколько частей, то общая дисперсия является суммой средней величины дисперсии внутри отдельных частей совокупности  $D_i$  и среднего квадрата отклонения частных средних от общей средней  $\bar{S}^2$

$$D = D_i + \bar{S}^2.$$

Докажем это равенство. Пусть совокупность разбита на  $L$  частей численностью в  $n_1, n_2, \dots, n_i$  и  $\sum n_i = n$ . Пусть частные дисперсии составляют  $S_1^2, S_2^2, \dots, S_i^2$ .

$$S_i^2 = D_i = \frac{1}{n_i - 1} \sum_i x^2 - \bar{x}_i^2,$$

где  $\sum_i$  означает суммирование в пределах данной части совокупности, а  $\bar{x}$  - частное среднее. Отсюда

$$\sum_i x^2 = (n_i - 1) S_i^2 + (n_i - 1) \bar{x}_i^2.$$

Складывая эти суммы вместе по всем частям совокупности, получаем:

$$\sum x^2 = \sum (n_i - 1) S_i^2 + \sum (n_i - 1) \bar{x}_i^2.$$

Разделим все члены равенства на  $(n - 1)$

$$\frac{1}{n - 1} \sum x^2 = \frac{\sum n_i S_i^2}{n - 1} + \frac{\sum n_i \bar{x}_i^2}{n - 1}.$$

Первое слагаемое здесь есть средняя из частных дисперсий  $\overline{S_i^2}$ , второе - средний квадрат частных средних. Если вычтем из него квадрат таким же образом взвешенной их средней, то получим их средний квадрат отклонения от этой средней, который обозначим  $\overline{S^2}$ . Следовательно,

$$\frac{1}{n-1} \sum x^2 = \overline{S_i^2} + \overline{S^2} + \left( \frac{\sum n_i \bar{x}_i}{n-1} \right)^2$$

Слагаемое в скобках есть общее среднее  $\bar{x}$  по всей совокупности. Следовательно,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum x^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \overline{S_i^2} + \overline{S^2}$$

### Мода

Важным показателем характеристики распределения является *мода*. Мода - это наиболее часто встречающееся значение варианты. Мода - это значение варианты, которой соответствует наибольшая относительная частота.

### Асимметрия и эксцесс

Гистограммы распределений изучаемых статистических совокупностей довольно часто бывают асимметричными (рис.3, 4), Если среднее арифметическое лежит правее моды, то асимметрия положительная, если левее моды - отрицательная. Для статистической оценки распределения необходимо вычислять меру асимметрии, называемую коэффициентом

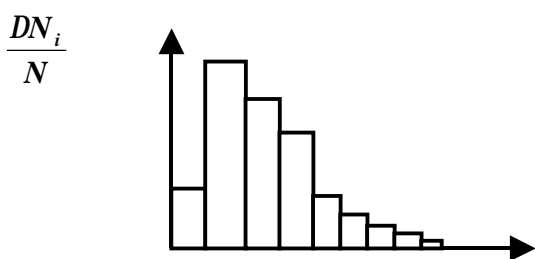


Рис.3 . Положительная асимметрия

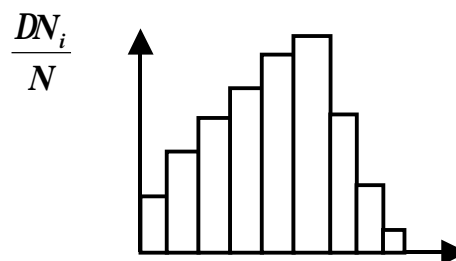


Рис.4. Отрицательная асимметрия

асимметрии  $A = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{N \cdot S^3}$  вычисления. В основу коэффициента

асимметрии положено среднеквадратичное отклонение, которое даёт возможность более полно учесть крайние значения вариант. При наличии асимметрии одна сторона кривой даёт большее кубическое отклонение, чем другая, и так как знак при кубическом отклонении сохраняется, то разница между суммами кубических отклонений показывает положительную либо отрицательную асимметрии.

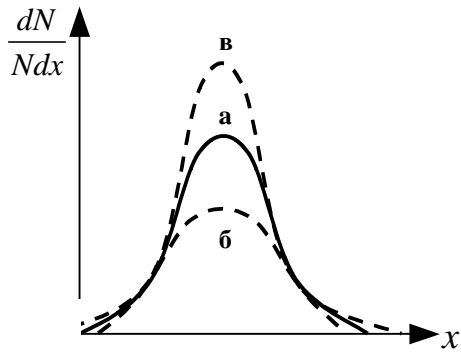


Рис.5. Распределения с разными показателями эксцесса

Наряду с асимметрией при статистическом анализе рядов распределения, важное значение имеет мера эксцесса. Мера эксцесса - это показатель отличия данного распределения от нормального по концентрации вариант около центра распределения. Вычисление этого показателя делается для того, чтобы определить, насколько кривая, полученная из опыта, оказывается более плоской и растянутой, или, наоборот, более сжатой и выпуклой в

центре по сравнению с кривой нормального распределения. Показатель эксцесса выражается следующей формулой:

$$E = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{N \cdot S^4} .$$

Если  $E > 0$ , то эксцесс положительный и вершина кривой будет выше нормальной, и наоборот, если  $E < 0$ , то эксцесс отрицательный, вершина кривой ниже нормальной (рис.5).

### Статистические моменты

При вычислении среднего арифметического, дисперсии, коэффициента асимметрии и эксцесса можно пользоваться формулами:

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{N} \sum v_i x_i , \tag{12}$$

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum v_i (x_i - \bar{x})^2 , \tag{13}$$

$$\langle \xi^3 \rangle = \frac{1}{N} \sum v_i (x_i - \bar{x})^3 \quad (14)$$

$$\langle \xi^4 \rangle = \frac{1}{N} \sum v_i (x_i - \bar{x})^4 \quad (15)$$

Сопоставляя эти формулы, замечаем, что все они могут рассматриваться как частные случаи одной более общей формулы

$$M_h = \frac{1}{N} \sum v_i (x_i - \bar{x})^h \quad (16)$$

При  $h = 1$  и  $x = 0$  получим  $\bar{x}$ .

При  $h = 2$  и  $x = x$  получим  $\langle \xi^2 \rangle = D$ .

При  $h = 3$  и  $x = x$  получим  $\langle \xi^3 \rangle$  и т. д.

Величина (16) называется моментом  $h$ -го порядка распределения относительно значения  $x$ .

Если в качестве  $X$  выбрано начало отсчетов, т.е. положено  $x=0$ , то момент называется начальным и обозначается  $m_h$ . Если же в качестве  $x$  выбран центр распределения  $\bar{x}$ , то момент называется центральным и обозначается  $\mu_h$ . В соответствии с этой терминологией среднее значение есть начальный момент первого порядка:  $\bar{x} = m_1$ , дисперсия, или средний квадрат отклонения  $S^2$ , есть центральный момент второго порядка  $S^2 = \mu_2$  средний куб отклонения есть центральный момент третьего порядка  $\langle x^3 \rangle = m_3$  и т.д. Очевидно, центральный момент первого порядка всегда равен нулю:  $\mu_1 = 0$ .

Центральные моменты могут быть выражены через начальные

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2, \quad (17)$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3, \quad (18)$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4, \quad (19)$$

где

$$m_1 = \frac{1}{N} \sum n_i x_i, \quad m_2 = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2,$$

$$m_3 = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^3, \quad m_4 = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^4.$$

В терминах статистических моментов коэффициент асимметрии запишется

так: 
$$A = \frac{m_3}{S^3} = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}.$$

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Теоретическое распределение - это математическая модель распределения вероятности по значениям дискретной случайной величины или по интервалам непрерывной случайной величины.

#### Вероятность

В эмпирическом распределении относительное число попаданий в заданный интервал дается частотой  $v_i$ , в теоретическом распределении подобная величина называется вероятностью. Вероятность есть мера объективной возможности данного события. Вероятность связана с частотой появления переменной величины:

$$p = \lim_{N \rightarrow \infty} v_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N} \quad (21)$$

Вероятность выражает вполне определенную, хотя и своеобразную, связь между постоянным комплексом условий и случайным событием в поле испытаний, количественно характеризуя единство необходимого и случайного. Конкретный смысл вероятности заключается в том, что она определяет среднюю частоту, с которой можно ожидать появления события в длинных сериях испытаний. Значение вероятности изменяется в пределах от нуля до единицы.

#### Теоретическое распределение дискретной и непрерывной случайной величины

Дискретное распределение считается теоретически заданным, если известны все возможные значения  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , принимаемые величиной, и вероятности  $p(x_i)$  для каждого события в поле испытаний. Так как эти события должны образовывать полную группу, то полная вероятность

$$P = \sum_i p(x_i) = 1 \quad (22)$$

При дискретном распределении общая масса вероятности, равная единице, сосредоточена в счетной или конечной системе точек  $x_i$ . Другими словами, точечное распределение массы вероятности, подобно, например, точечному распределению электрических зарядов. К теоретическим распределениям дискретных величин относятся биномиальное, гипергеометрическое, распределение Пуассона. Каждое из этих распределений описывается аналитической функцией, выражающей зависимость вероятности от дискретной переменной величины и параметров распределения.

Функция биномиального распределения:

$$P_n(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \quad (23)$$

где  $q = 1 - p$ ,  $n$ ,  $p$  - параметры распределения. Функция распределения Пуассона

$$P_n(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad (24)$$

где  $\lambda$  - параметр распределения.

Для теоретического изучения распределения непрерывных величин вводится понятие плотности вероятности  $\rho(x)$

$$\rho(x) = \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

где  $\Delta x$  длина малого интервала, начинающегося в точке  $x$

Для бесконечно малого интервала  $\Delta x$  вероятность

$$p(x < X < x + \Delta x) = \rho(x) \cdot \Delta x \quad (25)$$

для конечного интервала  $(x_1, x_2)$ , где  $x_1 < x_2$ ,

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

Интеграл от плотности вероятности распределения по любому промежутку оси дает вероятность попадания величины  $X$  в этот промежуток  $\Delta x$ .



Плотностью распределения может служить любая интегрируемая функция  $\rho(x)$ , удовлетворяющая двум условиям:

$$1. \rho(x) \geq 0, \quad (26)$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (27)$$

Вероятность

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^x \rho(x) dx = P(x) \quad (28)$$

называется интегральной функцией распределения в отличие от плотности вероятности  $\rho(x)$ , которую называют дифференциальной функцией распределения.

### Графическое представление дифференциальной функции распределения

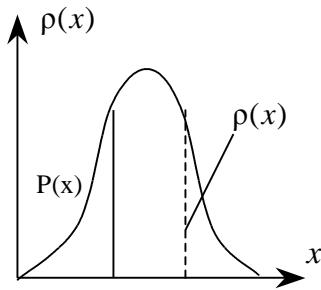


Рис.6. Плотность вероятности

На графике (рис.6) плотность вероятности  $\rho(x)$  является ординатой кривой распределения, а вероятность  $P(x)$  равна площади под этой кривой от  $-\infty$  до  $x$ . По определению  $P(X)$  обладает следующими свойствами:

I.  $P(x)$ - непрерывная возрастающая функция: её приращение в промежутке  $(x_1, x_2)$  равно вероятности для величины  $X$  попасть в этот промежуток. В самом деле, по правилу сложения вероятностей:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2),$$

$$\text{т.е. } P(x_2) = P(x_1) + P(x_1 \leq X \leq x_2),$$

и следовательно

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_2) - p(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = 0, \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = 1. \quad (30)$$

3. Производная от интегральной функции распределенная  $P(x)$  равна плотности  $\rho(x)$ , т.е

$$P'(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \rho(x) \quad (31)$$

## ПАРАМЕТРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

### Математическое ожидание

Среднее арифметическое, являющееся центром эмпирического распределения, переходит в математическое ожидание  $Mx$  при  $N \rightarrow \infty$ . В теоретическом распределении дискретных величин математическое ожидание

$$Mx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) \quad (32)$$

Математическое ожидание непрерывно распределенной величины

$$Mx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x) dx \quad (33)$$

При многократных экспериментальных определениях некоторой величины в одних и тех же условиях (при отсутствии систематических погрешностей) математическое ожидание можно рассматривать как "истинное" значение этой величины.

### Дисперсия

В теоретическом распределении дисперсия  $s^2$  есть математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от её математического ожидания

$$s^2 = M(x - Mx)^2 \quad (34)$$

Если обозначить  $Mx = a$ , то дисперсия распределения дискретной величины может быть записана:

$$s^2 = \sum (x_i - a)^2 \cdot p_i \quad (35)$$

в случае непрерывной величины:

$$s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 r(x) dx \quad (36)$$

### Нормальное распределение

Происхождение каждого эмпирического распределения обусловлено какими-то определенными естественными причинами. Совокупность причин, приводящих к тому или иному распределению, может быть в каждом случае иной.

Теоретическое распределение случайной величины, которому чаще всего соответствуют эмпирические распределения случайных величин в природе, является нормальным распределением или распределением Гаусса (закон Гаусса). Плотность вероятности нормального распределения определяется равенством:

$$f(x) = r(x) = \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2s^2}}, \quad (37)$$

для любого значения  $-\infty < x < +\infty$ , где  $\hat{x}$  - математическое ожидание,  $s^2$  - дисперсия,  $\hat{x}$  и  $s^2$  - параметры распределения.

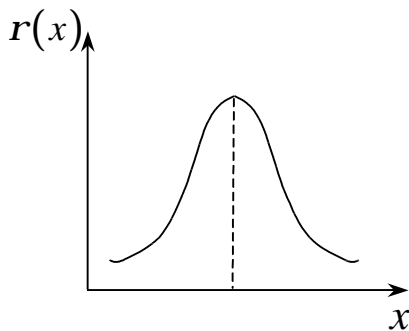


Рис.7. Дифференциальная кривая распределения

Соответствующая этой плотности дифференциальная кривая распределения показана на рис.7.

Интегральная функция нормального распределения записывается в виде:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (38)$$

График интегральной функции распределения изображен на рис.8.

Полная площадь под всей кривой выразится интегралом

$$F(-\infty; +\infty) = \frac{1}{\sqrt{2ps}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2s^2}} dx \quad (39)$$

Значение интеграла (39) равно единице.

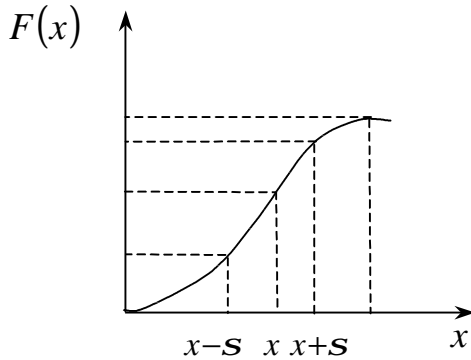


Рис. 8. Интегральная функция распределения

### Свойства нормального распределения

1. Из рис.9 видно, что нормальное распределение симметрично относительно ординаты, соответствующей значению  $\hat{x}$ . Значение  $\hat{x}$  является центром группирования - математическим ожиданием распределения.

Наибольшая ордината, отвечающая значению  $x = \hat{x}$ , имеет величину:

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2ps}} \quad (40)$$

2. При одном и том же значении  $\hat{x}$ , но различных  $S$  получим семейство кривых (рис. 9).

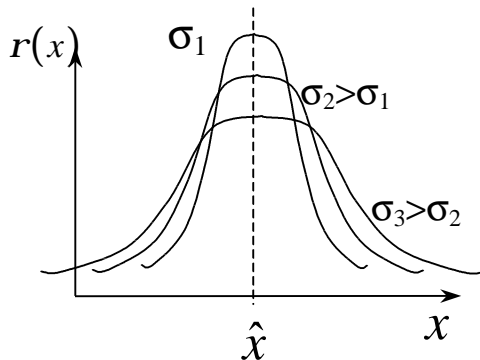


Рис.9. Функция нормального распределения

Из рис. 9 видно, что когда  $S$  уменьшается, ордината растет. Подъем кривой в центральной части компенсируется более резким спадом её к оси  $x$ , так что общая площадь остается неизменной и равной 1.

Нормальная кривая имеет две точки перегиба, абсциссами которых являются  $S$ . Следовательно, чем больше  $S$ , тем шире кривая.

3. Интеграл от плотности вероятности нормального распределения в пределах от  $S$  до  $+S$  равен 0,683; в пределах от  $-2S$  до  $+2S$  - 0,955; от  $-3S$  до  $+3S$  - 0,997.

4. Коэффициент асимметрии  $A$  нормального распределения равен нулю.

5. Эксцесс нормального распределения равен нулю.

## Выборки

Статистическая совокупность, свойства которой необходимо изучать, называется генеральной совокупностью. Статистической экспериментальной обработке подвергается только часть этой совокупности, которая называется выборкой. Чтобы выборка достаточно хорошо отражала свойства генеральной совокупности, она должна быть составлена правильно: выборка должна быть репрезентативна, т.е. представительна. Существует ряд способов, составления выборок, для каждого из которых имеется детально разработанная методика. Выбор того или иного способа определяется в основном конкретным характером исследования. Общее требование к составлению выборки включается в том, чтобы в выборке были "непредвзято" представлены все возможные значения изучаемой величины, т.е. примерно в тех же пропорциях, с теми же относительными частотами, что и в генеральной совокупности. Чаще всего предполагается, что это условие будет соблюдено, если отбирать элементы из генеральной совокупности случайным образом (случайная выборка).

## Оценка среднего

Если из генеральной совокупности сделать несколько выборок, то средние арифметические этих выборок будут отличаться от генерального среднего - математического ожидания. Когда число выборок велико, то выборочные средние образуют распределение, в котором выборочные средние концентрируются в основном около генерального среднего, причем эта концентрация тем теснее, чем больше были объемы выборок. Характерно, что при достаточно большом  $N$  распределение выборочных средних оказывается одновершинным даже в том случае, когда распределение вариант в генеральной совокупности имеет в середине провал, или даже распределение вариант в генеральной совокупности явно асимметрично. Можно сказать, что если  $N \rightarrow \infty$ , то при увеличении объема выборок распределение выборочных средних приближается к нормальному независимо от того, как распределены варианты в генеральной совокупности. Отсюда следует важный вывод: хотя выборочное среднее значение  $\bar{x}$ , полученное по результатам одной только выборки, и не равно генеральному среднему  $\hat{x}$ , оно все же указывает значение, вблизи которого находится  $\hat{x}$ . Поэтому выборочное среднее  $\bar{x}$  называют оценкой генерального, среднего  $\hat{x}$ .

## Оценка дисперсии

Дисперсию выборочных средних, относительно центра распределения - генерального среднего  $\bar{x}$ , можно найти следующим образом.

Пусть мы имеем выборку  $x_1, x_2, \dots, x_n$  из независимых вариантов.

$$\text{Поскольку } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N},$$

$$\text{то } N\bar{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_N,$$

$$\text{так что } S^2(N\bar{x}) = S^2(x_1 + x_2 + \dots + x_N),$$

$$\text{согласно (33) } S^2(N\bar{x}) = N^2 S^2(\bar{x}).$$

$$\text{В то же время } S^2(x_1 + x_2 + \dots + x_N) = S^2(x_1) + S^2(x_2) + \dots + S^2(x_N),$$

так как все  $S^2(x)$  одинаковы, то можно написать:

$$S^2(x_1 + x_2 + \dots + x_N) = N S^2(x).$$

Заменив левую и правую части в равенстве (41), получим

$$N^2 S^2(\bar{x}) = N S^2(x),$$

откуда

$$S^2(\bar{x}) = \frac{S^2(x)}{N} \quad (42)$$

и

$$S(\bar{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{N}}.$$

Стандартное отклонение среднего выборочного значения от генерального среднего в  $\sqrt{N}$  раз меньше, чем стандартное отклонение каждого отклонения варианты от генерального среднего.

Величину  $S(\bar{x})$  принято называть также стандартной ошибкой среднего значения.

Итак, мы нашли, что  $\bar{x}$  может служить оценкой для  $\hat{x}$ . Можно ли утверждать, что выборочная дисперсия  $S^2$  может служить оценкой генеральной дисперсии  $S^2$ ?

Воспользуемся свойством среднего (5), что сумма квадратов отклонений вариант от среднего меньше, чем сумма квадратов отклонений от

любой другой величины. Иными словами, величина  $\sum (x_i - \bar{x})^2$  имеет наименьшее значение в том случае, если в качестве величины  $x$  взято среднее значение совокупности. Значит, для каждой из возможных выборок сумма квадратов отклонений вариант  $x_i$  от своего выборочного среднего  $\bar{x}$  меньше, чем сумма квадратов отклонений вариант  $x_i$  от любого другого значения  $x$ , в том числе и от генерального среднего. Следовательно, при вычислении дисперсии на основании выборки по обычной формуле

$$s_{\text{выб}}^2 = \frac{1}{N} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2$$

мы всегда получаем заниженную оценку. Чтобы устранить эту систематическую ошибку, нужно при вычислении выборочной оценки дисперсии делить сумму квадратов отклонений  $\sum n_i (x_i - \bar{x})^2$  не на число всех отклонений  $N$ , а на число отклонений, являющихся независимыми. Так как отклонения связаны с условием  $\sum n_i (x_i - \bar{x}) = 0$ , то независимо могут быть заданы (42) только  $n - 1$  отклонений.  $N - e$  отклонение должно быть таким, чтобы выполнялось условие (43). Таким образом, несмещенную оценку дисперсии надо вычислять по формуле

$$S^2 = \frac{1}{N - 1} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2 \quad (43)$$

## КРИТЕРИИ РАЗЛИЧИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

### Параметрические критерии различия

Параметрические критерии позволяют установить совпадение или различие между параметрами двух распределений - их средними значениями, дисперсиями, коэффициентами асимметрии, эксцесса и т.д. При пользовании параметрическими критериями обычно предполагается, что сравниваемые распределения в общем однотипны и могут отличаться лишь значениями своих параметров.

Из-за случайности в образовании выборки распределения вариант в выборке всегда отличаются от их распределения в генеральной совокупности; поэтому если в генеральной совокупности варианты распределены по определенному теоретическому закону, то распределение в выборке будет заведомо отклоняться от этого закона. Отсюда следует, что

сам факт отклонения выборочного распределения от того или иного теоретического распределения еще не дает основания утверждать, что и в генеральной совокупности распределение не подчиняется данному теоретическому закону. Таким образом, вопрос сводится к тому, можно ли расхождение между выборочным и предположенным теоретическим распределением отнести за счет расхождения между выборкой и генеральной совокупностью, или же оно является результатом того, что сама генеральная совокупность отклоняется от данного теоретического распределения

В любом случае задача может быть сведена к проверке гипотезы об отсутствии реального различия. Эту гипотезу называют *нулевой гипотезой*. Предельно допустимое значение вероятности, начиная с которого вероятность можно считать малой, называют уровнем значимости. Если вероятность нулевой гипотезы  $\alpha < 1\%$ , то она отвергается, если вероятность лежит в пределах от  $1\%$  до  $5\%$ , то возможность отвергнуть нулевую гипотезу сомнительна, если же  $\alpha \geq 0,05 = 5\%$ , то нулевая гипотеза принимается. Выбор уровня значимости определяется в различных случаях конкретными задачами исследования.

### Критерий нормальности распределения

Следствием нормальности распределения можно считать выполнение условий  $\langle A \rangle = 0$  и  $\langle E \rangle = 0$ . Если для выборки получено  $A \neq 0$  и  $E \neq 0$ , то нельзя делать вывод, что распределение в генеральной совокупности не является нормальным. Выборочные параметры всегда несколько отличаются от соответствующих параметров генеральной совокупности, параметры  $A$  и  $E$  выборки будут случайными величинами, распределенными примерно нормально со стандартными отклонениями:

$$s_A \approx \sqrt{\frac{6}{N+3}} \text{ и } s_E \approx \sqrt{\frac{24}{N+5}}. \quad (44)$$

Следовательно, тот факт, что выборочная  $A$  равна  $s_A$  (или даже больше, чем  $s_A$ ), отнюдь не противоречит тому, что генеральная  $\langle A \rangle$  равна нулю. Только в том случае, когда

$$\frac{|A|}{s_A} > U_a \quad (45)$$

можно считать маловероятным, что такое значение  $A$  получилось как случайное отклонение от генерального значения  $\langle A \rangle = 0$ . В этом случае



можно считать, что асимметрия действительно имеет место, является значимой.

Таким образом, статистически необходимым условием нормальности распределения следует считать не  $A = 0$ ,  $E = 0$ , а условия

$$\frac{|A|}{S_A} < U_a, \quad \frac{|E|}{S_E} < U_a, \quad (46)$$

причем оба эти неравенства должны выполняться одновременно.

Однако при не очень больших объемах выборок коэффициенты асимметрии и эксцесса не распределены нормально, а потому к ним нельзя применять  $U$ -критерий. Особенно это относится к коэффициенту эксцесса, который заменяют показателем  $C$ :

$$C = \frac{|\bar{x}|}{S},$$

где  $|\bar{x}| = \frac{1}{N} \sum n_i |x_i - \bar{x}|$  есть выборочная оценка абсолютного отклонения

$\langle |x| \rangle$ .  $S$  - оценка стандартного отклонения.

Для нормального распределения  $\langle |x| \rangle = S \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798 S$ ,  $\left( \frac{\langle |x| \rangle}{S} \right)_{\text{норм}} \approx 0,798$ .

Распределение будет нормальным, если  $A$  будет меньше 5%  $A_a$  и  $C$  не будет выходить за интервал. Для 100 измерений  $A$  должно быть меньше 0,389, а  $C$  должно находиться в интервале 0,764 - 0.834.

### Критерий соответствия $c^2$

К.Пирсон предложил критерий  $c^2$  (хи-квадрат) для оценки степени различия двух сравниваемых рядов частот (можно сравнивать эмпирический и теоретический или два эмпирических распределения). Этот критерий представляет собой сумму отношений квадратов разностей между частотами эмпирического и теоретического распределений к частотам (вероятностям) теоретического распределения:

$$c^2 = \sum \frac{(n_i - f(\Delta x_i))^2}{f(\Delta x_i)}, \quad (49)$$

где  $n_i$  - частота эмпирического распределения,  $f(\Delta x_i)$  - вероятность теоретического распределения.

Чтобы дать правило проверки, следует выбрать уровень значимости для критерия. Определив значение  $c^2$  по данным выборки, нужно его сопоставить с критическим значением  $c_q^2$ , соответствующим выбранному уровню значимости. Если  $c^2 \leq c_q^2$ , то расхождение между экспериментальным и теоретическим распределением несущественно, и экспериментальное распределение можно аппроксимировать теоретическим.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ

Экспериментальная задача. Статистическое исследование эмпирической совокупности частоты электрических сигналов, регистрируемых от сети пересчетным прибором.

### Приборы и принадлежности

1. Пересчетный прибор ПС-02-08 (или ПП-16).
2. Секундомер.

### Порядок выполнения работы

#### Первое задание

1. Сдать преподавателю зачет по теории работы,
2. Получить допуск к выполнению эксперимента.

#### Второе задание

1. Ознакомиться с инструкцией работы пересчетного прибора.
2. Получить статистическую совокупность вариант частоты электрических сигналов за время 10 секунд. Объем совокупности  $N = 100$ .
3. Провести обсчет полученных результатов с помощью программы Excel. Для этого занести в Excel данные и построить таблицу 1. Провести группировку полученной статистической совокупности от меньшего к большему, найти  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$ , определить  $\Delta X$ , выбрать число интервалов  $K$ , найти ширину интервала  $Dx$ , определить границы интервала. Определить отклонения вариант от среднего значения, квадраты этих отклонений, их

кубы и четвертые степени. Рассчитать  $\bar{x}$  -среднее по всем значениям,  $S$  - среднее квадратичное, доверительный интервал  $\Delta x_\delta$ , используя коэффициент Стьюдента, асимметрию и эксцесс. Сделать вывод о принадлежности экспериментального распределения к нормальному.

Таблица 1.

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$
$x_1$				
$x_2$				
:				
$x_n$				
$\Sigma$ (по все столбцам)				
$\bar{x}$	$x = \bar{x} \pm \Delta x_\delta$	$S$	$A$	$E$

4. Рассчитать частоту  $n$  и частость  $\nu$  выпадения вариантов. Результаты вычислений занести в таблицу 2. Построить гистограмму и полигон экспериментального распределения на миллиметровке.

Таблица 2.

$N_i$	$x_{\text{среднее по интервалу}}$	$n_i/N$
1		
2		
:		
K		

### Третье задание

1. Графически сравнить экспериментальное распределение с распределением Гаусса при экспериментально полученных значениях  $\bar{x}$  и  $S$ .

Для этого определить значение плотности вероятности экспериментального распределения предполагая, что оно подчиняется закону Гаусса и  $f(x)$  определится:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \exp\left(-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2s^2}\right),$$

где  $x_i$  – среднее по интервалу,  $\bar{x}$  – среднее по всем значениям, для ограниченного числа измерений  $N$ . В вычислениях следует  $s$  принять равной средне квадратичному отклонению выборки измерений  $S$ . Имея в виду что  $p(Dx_i)=f(x)Dx$  - вероятность попадания в интервал  $Dx_i$ , она же частота  $n_i$  (см. пп.2.1, 2.2, формулы 21, 22, 25), где  $Dx$ - ширина интервала. Построить таблицу 3.

Таблица 3.

№	$x_{\text{среднее по интервалу}}$	$n_i/N$	$f(x)Dx$
1			
2			
:			
К			

2. Построить график совместности  $n_i$  (полигон) и график  $f(x)Dx$  на компьютере.

3. Используя формулу (49) для  $\chi^2$  – критерия, определить его значение и сопоставить с критическим, установить принадлежность экспериментального распределения нормальному

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое случайное событие, случайная величина, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина?
2. Что такое варианты, статистическая совокупность, частота, частость, закон распределения?
3. Что такое гистограмма, полигон? Какими свойствами они обладают?
4. Назовите основные параметры экспериментального распределения.
5. Что такое теоретическое распределение, каковы его параметры?
6. Каков смысл дифференциальной и интегральной функций нормального распределения? Как они выражаются на графике дифференциальной функции?
7. Что такое статистические моменты? Как они связаны с параметрами распределения?
8. Какова связь между параметрами генеральной и выборочной

- совокупности?
9. Каков смысл параметрических критериев?
  10. В чем заключается смысл  $\chi^2$ -критерия?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Длин А.М. Математическая статистика в технике. -М.: Сов. наука, 1958.
2. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. -М.: Наука, 1970.
3. Лакин Г.Ф. Биометрия. -М.: Высш. школа, 1968.
4. Свешников А.А. Основы теории ошибок. -Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
5. Урбах В.Ю. Биометрические методы. -М.: Наука, 1964.
6. Бекнев В.С., Епифанов В.М., Леонтьев А.И. и др. Газовая динамика. Механика жидкости и газа / Под общ.ред. А.И. Леонтьева -М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-2

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ

#### Цель работы

Изучить распределение Максвелла и убедиться в его применимости для статистического описания электронного газа.

#### Задача работы

Получить интегральную и дифференциальную функции распределения электронов, испаряющихся с поверхности твердого тела (катода в вакуумном диоде); определить температуру электронного газа и наиболее вероятную скорость электронов.

### РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МИКРОЧАСТИЦ ПО СКОРОСТЯМ И ЭНЕРГИЯМ

Молекулярно-кинетическая теория вещества рассматривает тела, состоящие из множества атомов или молекул, у которых в результате взаимных столкновений, происходящих миллиарды раз за секунду, хаотично меняются скорости, импульсы, энергия, и т.д. Поведение таких систем описывается законами, которые называются статистическими. К ним относятся распределения молекул газа по скоростям, энергиям, по импульсу и т. д. [1, 2].

#### Интегральная и дифференциальная функции распределения

Центральное понятие статистической физики — понятие плотности вероятности  $f(x)$  или, иначе, дифференциальной функции распределения. Вероятность того, что переменная  $x$  лежит в интервале от  $x$  до  $x+dx$ , определяется как

$$dp = f(x)dx. \quad (1)$$

Интегральной функцией распределения называется вероятность нахождения переменной в интервале от  $a$  до  $x$  (здесь  $a$  — минимально возможное значение переменной). Эта функция определяется выражением

$$p(x) = \int_a^x f(x') dx' \quad (2)$$

Интегральная функция распределения может быть выражена как площадь под графиком дифференциальной функции распределения. Наоборот, дифференциальная функция распределения при данном значении переменной равна угловому коэффициенту касательной к графику интегральной функции распределения.

### Распределение Максвелла

При изучении распределения молекул по скоростям бессмысленно задаваться вопросом о числе частиц с заданной скоростью, поскольку множество частиц счетно, а множество скоростей — непрерывно. Строго говоря, каждой конкретной скорости соответствует нуль молекул. Правильная постановка вопроса такова: сколько частиц имеет скорость в заданном интервале (скажем, от 300,0 м/с до 300,5 м/с). Число частиц со скоростями, лежащими в интервале от  $V_x$  до  $V_x + dV_x$ , от  $V_y$  до  $V_y + dV_y$ , от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$  определится как

$$dN = N \cdot f(V_x, V_y, V_z) \cdot dV_x dV_y dV_z,$$

где  $N$  — полное количество частиц и  $f$  — дифференциальная функция распределения, которая является функцией трех переменных — компонент скорости молекулы. Из всех возможных функций распределения в статистической физике особую роль играет распределение Максвелла, поскольку оно описывает распределение описываемых классической механикой частиц в состоянии термодинамического равновесия:

$$f(V_x, V_y, V_z) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -m \frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{2kT} \right), \quad (3)$$

где  $m$  — масса частицы,  $T$  — температура,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана. Обратим внимание, что распределение микрочастиц по каждой компоненте скорости совпадает с нормальным (гауссовым) распределением, причем средняя скорость молекул в проекции на любую координатную ось равна нулю, а стандартное отклонение  $s = \sqrt{kT/m}$ .

Распределение Максвелла можно записать не только в декартовой, но и в других координатных системах. Цилиндрическую систему координат удобнее всего использовать в тех задачах, где имеется симметрия относительно некоторой оси. С помощью распределения Максвелла в этой системе координат можно определить плотность вероятности для радиальной (т.е. перпендикулярной оси симметрии) компоненты скорости частицы  $V_r$ :

$$f(V_r) = 2p \left( \frac{m}{2pkT} \right) V_r \exp \left( -\frac{mV_r^2}{2kT} \right), \quad (4)$$

где  $V_r^2 = V_x^2 + V_y^2$ . Наивероятнейшее значение *радиальной* скорости равно

$$V_r = \sqrt{kT/m}. \quad (5)$$

Сферическая система координат используется тогда, когда изучаемая физическая система обладает центральной симметрией. Распределение Максвелла, записанное в этой координатной системе, позволяет найти распределение частиц по модулю скорости:

$$f(V) = 4pV^2 \left( \frac{m}{2pkT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mV^2}{2kT} \right). \quad (6)$$

Отсюда следует, в частности, что наивероятнейшее значение *модуля* скорости частицы равно

$$V = \sqrt{2kT/m}. \quad (7)$$

Из (3) следует также распределение по кинетическим энергиям  $E = mV^2/2$ :

$$f(E) = \sqrt{\frac{2}{p}} \left( \frac{1}{kT} \right)^{3/2} \sqrt{2E} \exp \left( -\frac{E}{kT} \right). \quad (8)$$

На рис. 1 приведены графики, иллюстрирующие распределения по скоростям и энергиям согласно выражениям (3, 4, 6, 8).



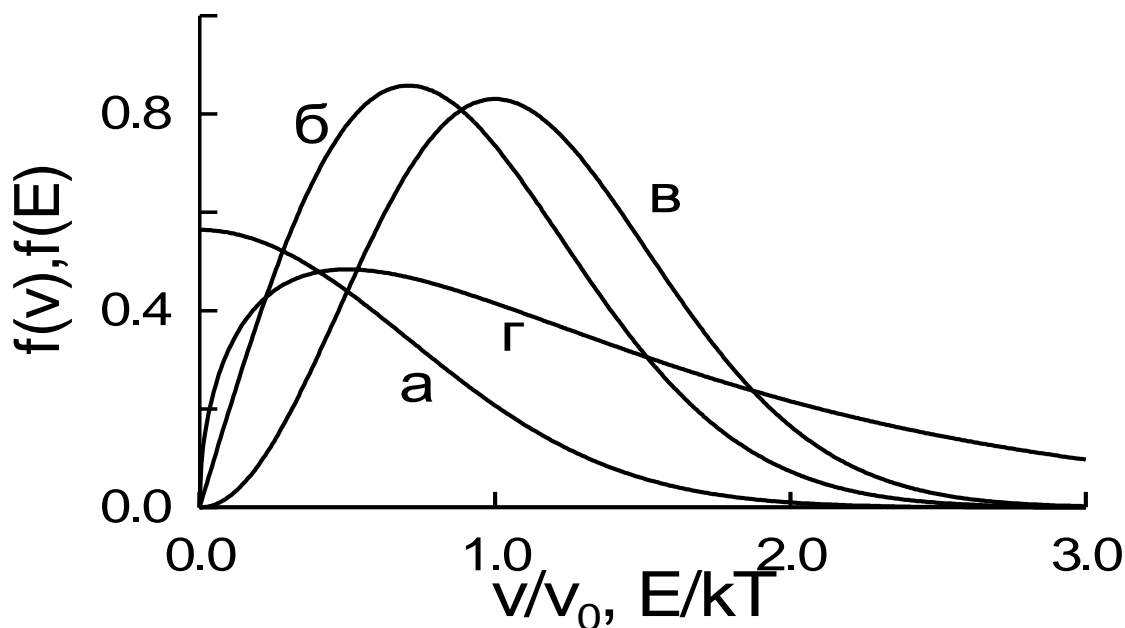


Рис 1. Распределение Максвелла по компоненте вектора скорости в декартовой системе координат (а), по радиальной компоненте вектора скорости (б), по модулю скорости (в), по энергиям (г). По горизонтальной оси отложено отношение скорости молекулы к наиболее вероятной ( $V_0$ ), либо энергии к величине  $kT$

### Изменение концентрации частиц при прохождении через потенциальный барьер

Рассмотрим распределение невзаимодействующих между собой частиц во внешнем силовом поле. Средняя концентрация частиц в точке с координатами  $x, y, z$  в состоянии теплового равновесия определяется распределением Больцмана:

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{U(x, y, z)}{kT}\right), \quad (9)$$

где  $U(x, y, z)$  — потенциальная энергия частицы в этом поле,  $n_0$  — концентрация на нулевом уровне отсчета потенциальной энергии. Пусть частица переходит из точки с потенциальной энергией  $U_1$  в точку с потенциальной энергией  $U_2$ . При этом поле совершает над частицей работу

$A=U_1-U_2$ . В ходе этого процесса, как следует из (9), концентрация частиц меняется в

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(\frac{A}{kT}\right) \quad (10)$$

раз. В частности, если частица проникает через потенциальный барьер, т.е. движется против направления силы, то поле совершает отрицательную работу,  $A < 0$ , и концентрация частиц уменьшается,  $n_2 < n_1$ .

Можно объединить распределения Максвелла и Больцмана и получить распределение Максвелла-Больцмана

$$dn = n_0 \left(\frac{m}{2pkT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E(V_x, V_y, V_z) + U(x, y, z)}{kT}\right] dV_x dV_y dV_z, \quad (11)$$

которое позволяет найти концентрацию частиц со скоростями, лежащими в интервале от  $V_x$  до  $V_x + dV_x$ , от  $V_y$  до  $V_y + dV_y$ , от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$  и находящихся в точке пространства с координатами  $x, y, z$ . Обратим внимание, что параметр  $T$ , температура системы, имеет одно и то же значение во всех точках пространства; следовательно, средняя скорость молекул также не зависит от ее положения. Отсюда следует вывод, что при преодолении потенциального барьера средние скорости молекул не меняются. Этот результат следует и из общих термодинамических соображений: при термодинамическом равновесии, когда справедливо распределение Максвелла-Больцмана, температура одна и та же во всех точках системы. Тем не менее, этот вывод кажется несколько парадоксальным, поскольку кинетическая энергия и, следовательно, скорость каждой частицы уменьшается при прохождении через барьер в силу закона сохранения энергии:

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = U_1 - U_2 = A < 0.$$

Решение этого мнимого парадокса, которое было дано еще Максвеллом, подробно разобрано во многих учебниках; см., например, [1(§11), 2(§77)]. Дело в том, что не все молекулы могут преодолеть барьер. Те из них, скорость которых недостаточно велика, должны будут повернуть обратно. Таким образом, концентрация молекул до барьера будет выше, чем после него, что, собственно, и утверждается формулой (10), следующей из распределения Больцмана. Поэтому, хотя скорость каждой молекулы действительно меняется, доля молекул, лежащих в определенном диапазоне скоростей, оказывается неизменной до и после барьера. Следовательно, средняя скорость молекул окажется прежней, т.е. температура будет одинакова во всей системе, как это и следует из распределения Максвелла-Больцмана и условия термодинамического равновесия.

## Условия применимости классической статистики

При выводе вышеприведенных формул предполагалось, что движение микрочастиц описывается классической механикой. Однако классическая механика — это приближенная теория; точное описание физических явлений дает квантовая механика. Согласно квантовой механике, каждая микрочастица обладает свойствами волны с длиной

$$l_D = \frac{h}{p}, \quad (12)$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $p$  — импульс частицы. Величина  $l_D$  называется длиной волны Де Бройля. Классическая механика приближенно применима только при условии, что среднее расстояние между частицами  $n^{-1/3}$  (здесь  $n$  — концентрация частиц) значительно превышает эту величину:

$$n^{-1/3} \gg l_D.$$

Поскольку характерная скорость частиц при температуре  $T$  определяется как  $V \approx \sqrt{kT/m}$ , то условие применимости классического приближения можно записать в виде

$$\frac{(hn^{1/3})^2}{kTm} \ll 1. \quad (13)$$

Это неравенство заведомо удовлетворяется для газов при условиях, близких к нормальным. А вот для электронов в проводниках, например, оно может нарушаться, и необходимо использовать квантовую статистику. Статистические свойства квантовых систем описываются распределениями Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна. Распределение Максвелла-Больцмана является их предельным случаем при достаточно больших температурах, т.е. оно применимо для описания статистических свойств газов, жидкостей и твердых тел, но только в том случае, если выполняется условие (13).

## ИЗУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМОЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ

### Испарение электронов с поверхности металлов

Как известно, в металлах существуют "свободные" электроны. Процесс их испарения с поверхности металла при высокой его температуре называется термоэлектронной эмиссией. При температурах 1000-2000 К, характерных для настоящей работы, поведение свободных электронов в металле практически не отличается от статистики Максвелла-Больцмана (в общем случае оно подчиняется статистике Ферми-Дирака). При термоэлектронной эмиссии за пределы металла выходят только наиболее быстрые электроны, к которым распределение Максвелла-Больцмана применимо заведомо. Роль работы  $A$ , "высоты" потенциального барьера, играет работа выхода, обусловленная притяжением электронов к ионному остову проводника. Для разных металлов она составляет 2—5 эВ (напомним, что 1 эВ эквивалентен  $1.16 \cdot 10^4$  К). Поэтому согласно формуле (10) концентрация электронов, покинувших металл, в  $10^{10}$ – $10^{12}$  раз меньше концентрации свободных электронов в металле. Как было отмечено выше, температура газа эмитированных электронов равна температуре катода, поверхность которого они покинули и, конечно, распределение скоростей частиц этого газа с хорошей степенью точности описывается законом Максвелла.

### Метод задерживающего потенциала

Для изучения распределения термоэлектронов по скоростям в настоящей задаче используется метод задерживающего потенциала, суть которого заключается в следующем. В вакуумном диоде катод **К** имеет форму нити, про

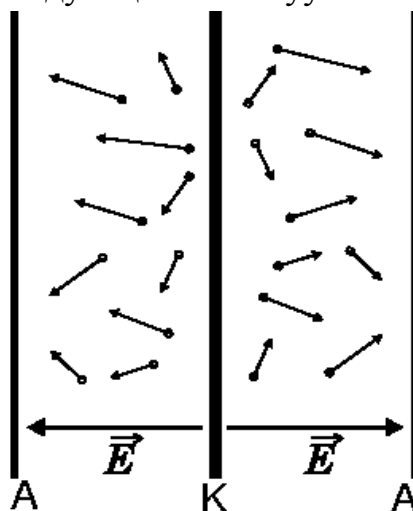


Рис.2. Катод в вакуумном

Между электродами создается электрическое поле  $\vec{E}$ , тормозящее движение испарившихся с катода электронов. Отрицательное напряжение играет роль фильтра, пропускающего только те электроны, радиальная скорость которых достаточно велика, чтобы преодолеть потенциальный барьер между анодом и катодом (очевидно, что радиальное поле не влияет на продольную компоненту скорости). На анод попадут электроны, энергия которых больше работы сил электрического поля по их торможению  $mV_r^2/2 > eU$ , где  $U$  — потенциал анода. Отсюда следует условие попадания электрона на анод

$$V_r \geq V_{\min} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \quad (14)$$

Измеряя анодный ток при изменении величины отрицательного анодного напряжения, можно непосредственно исследовать распределение термоэлектронов по скоростям или энергиям. Для этого рассмотрим вольтамперную характеристику вакуумного диода, т.е. зависимость между анодным током и разностью потенциалов между электродами. При больших положительных потенциалах ток практически не зависит от напряжения, т.к. все вылетающие с катода электроны попадают на анод. Это предельное значение тока называется током насыщения (участок  $b$  на рис. 3).

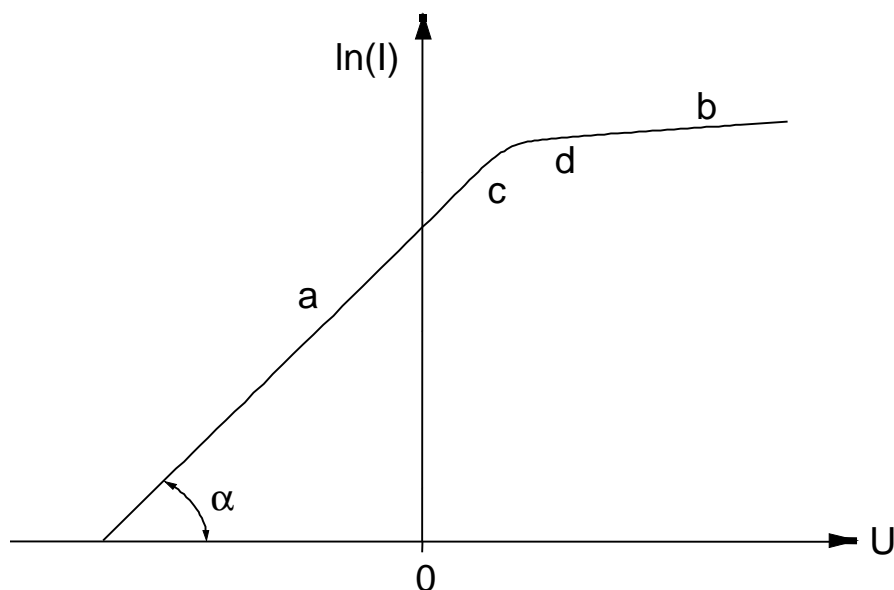


Рис.3. Вольтамперная характеристика вакуумного

### Вычисление анодного тока при задерживающем напряжении

При  $U < 0$  анодный ток вычисляется следующим образом. Сначала рассмотрим только электроны с радиальными скоростями от  $V_r$  до  $V_r + dV_r$ . Плотность тока, создаваемого этими частицами, есть

$$dj = eV_r \cdot dn. \quad (15)$$

Здесь  $e$  — заряд электрона и  $dn$  — число частиц в этом интервале скоростей, которое выражается через функцию распределения Максвелла в цилиндрической системе координат как

$$dn = n_0 f(V_r) dV_r, \quad (16)$$

где  $n_0$  — полное число частиц на расстоянии  $r$  от оси цилиндра. Полный ток через цилиндрическую поверхность радиуса  $r$  определяется через интеграл

$$I(U) = S \int_{V_{\min}(U)}^{\infty} dj = S \frac{m}{kT} e n_0 \int_{V_{\min}}^{\infty} V_r^2 \exp\left(-\frac{mV_r^2}{2kT}\right) dV_r, \quad (17)$$

где  $S$  — площадь цилиндрической поверхности внутри диода. Если ток не зависит от времени, то через любую цилиндрическую поверхность с осью, совпадающей с катодом, за равные промежутки времени проходит одно и то же число электронов, т.е. произведение  $S n_0$  не зависит от расстояния от оси диода. Таким образом, выражение (17) определяет анодный ток. Обозначая константу в этом выражении через  $C$  и вводя новую переменную  $x = eU/kT$ , получаем выражение для анодного тока как функцию  $x$ :

$$I(x) = C \int_{\sqrt{x}}^{\infty} t^2 \exp(-t^2) dt, \quad (18)$$

где  $t$  — промежуточная переменная интегрирования. Этот интеграл не выражается аналитически через элементарные функции. Использование численных методов показывает, что график функции  $y = \ln I(x)$  практически совпадает с прямой линией (рис. 4), т.е. эта функция приближенно может быть выражена в виде  $y = kx + b$ . Для определения величины  $k$  (углового коэффициента этой прямой) найдем значение этой функции при двух значениях переменной, например,  $y(2) = -2.155$  и  $y(10) = -9.495$ . Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, получаем  $k = -0.92$ . Итак, из теории следует, что при отрицательных потенциалах на логарифмической вольтамперной характеристике вакуумного диода имеется приближенно линейный участок:

$$\ln I(U) \approx -0.92 \frac{eU}{kT} + b. \quad (19)$$

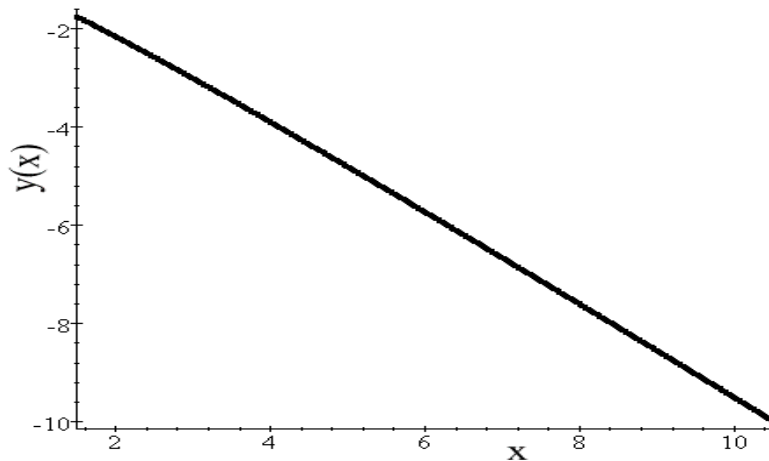


Рис. 4. График функции  $y = \ln I(x)$

Зависимость (19) имеет место лишь при отрицательных разностях потенциалов между анодом и катодом (участок  $a$  на рис. 3). При положительных разностях потенциалов возрастание тока замедляется, и при достижении тока насыщения (участок  $b$ ) — прекращается. Оба участка отделены друг от друга переходным участком  $c-d$ , на протяжении которого сказывается влияние пространственного отрицательного электрического заряда, вызванного эмиссией электронов с катода.

В настоящей лабораторной работе предлагается убедиться в том, что на логарифмической вольтамперной характеристике диода действительно имеется линейный участок. Наличие этого участка является следствием максвелловского распределения термоэлектронов по скоростям, что и подтверждает его справедливость. Рассчитав угловой коэффициент линейного участка, можно измерить температуру электронного газа.

### Функция распределения электронов анодного тока

Перейдем теперь к вопросу о распределении по скоростям электронов в анодном токе, которую мы обозначим  $F(V_r)$ . Это не та же самая функция, что функция Максвелла в цилиндрической системе координат  $f(V_r)$ , т.е. вероятность обнаружить электрон со скоростью от  $V_r$  до  $V_r + dV_r$ ,

определяемая выражением (4). Связано это с тем, что электрический ток — это заряд, проносимый через сечение проводника за единицу времени. Следовательно, функция распределения электронов в токе  $F(V_r)$  имеет следующий физический смысл: это электрический заряд, проносимый через сечение проводника за единицу времени частицами с радиальными скоростями от  $V_r$  до  $V_r+dV_r$ . Эта функция получается из комбинации формул (15) и (16):

$$F(V_r)dV_r = dj = eV_r \cdot n_0 f(V_r)dV_r, \quad (20)$$

где  $f(V_r)$  — распределение Максвелла в цилиндрической системе координат. Как видим, по сравнению с распределением Максвелла в цилиндрической системе координат (4) функция распределения электронов в анодном токе имеет дополнительный множитель  $V_r$ . Причину появления этого множителя понять нетрудно: ведь даже если бы количество частиц с любыми скоростями во всем проводнике было одинаково, то все равно за единицу времени через сечение проводника «быстрых» частиц успевало бы проходить больше, чем «медленных», потому что они движутся быстрее. Очень похожая ситуация имеет место в известной задаче о распределении по скоростям молекул, вылетающих из малого отверстия в сосуде, которая подробно рассмотрена, например, в учебниках [1,2].

Как следует из формул (4) и (20), функция  $F(V_r)$  пропорциональна произведению  $V_r^2 \cdot \exp(-mV_r^2/2kT)$ , т.е. с точностью до постоянного множителя она имеет такой же вид, как распределение Максвелла в сферической системе координат (6). Поэтому максимум этой функции должен приходиться на значение скорости  $V_r = \sqrt{2kT/m}$ , т.е. он не совпадает с наиболее вероятным значением радиальной скорости (5), которое соответствует максимуму функции  $f(V_r)$ .

Функция  $F(V_r)$  по своему смыслу аналогична дифференциальной функции распределения. Роль интегральной функции играет число электронов, обладающих скоростью, которая превышает минимальную скорость, необходимую для преодоления потенциального барьера, т.е.  $V_r > V_{min}$ .



## ИЗМЕРЕНИЯ И ИХ ОБРАБОТКА

### Приборы и принадлежности

1. Вакуумный диод 6Х6С.
2. Панель монтажная .
3. Источник питания 1 в цепи накала Б5-8 или Б5-7.
4. Источник питания 2 в анодной цепи Б5-46.
5. Микроамперметр постоянного тока М193 (либо М194). Минимальный предел измерений  $3 \cdot 10^{-6}$  А и  $7.5 \cdot 10^{-6}$  А, соответственно.
6. Магазин сопротивлений Р33 или реостат 100 Ом, 2 А, устанавливаем на делителе около 30 Ом.
7. Амперметр постоянного тока ЛМ-1 на 3 А.

### Выполнение работы

1. Соберите схему согласно рис. 5.

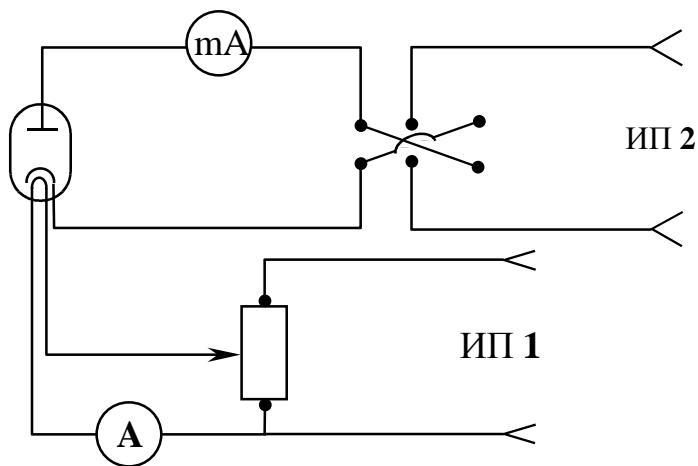


Рис. 5. Электрическая схема

2. Установите запирающее напряжение в анодной части цепи 0,01 В.
3. Подайте в цепь накала источником постоянного тока ИП 1 напряжение 6,3 – 10 В и подберите ток в пределах от 0,22 до 0,27 А, так чтобы в анодной цепи ток был  $3 \cdot 10^{-6}$  А или  $7.5 \cdot 10^{-6}$  А, соответственно максимальному отбросу на шкале прибора.

4. Изучение распределения электронов по скоростям мы проводим на участке (а) вольтамперной характеристики вакуумного диода 6Х6С (см. рис.3). Поэтому после 30-минутного прогрева лампы начните измерять значения анодного тока в режиме отрицательного анодного напряжения, изменяя его в пределах от -0,01 В до -0.5 В через 0.02 В с помощью регуляторов ИП 2. Оформите результаты измерений в виде таблицы 1.

**Таблица 1.**

**Распределение термоэлектронов по скоростям**

$U_{\text{ип}}, \text{В}$	$I, \text{дел}$	$I \cdot 10^{-7}, \text{А}$	$n \cdot 10^{12} \text{с}^{-1}$	$\Delta U, \text{В}$	$U, \text{В}$	$V \cdot 10^5, \text{м/с}$
---------------------------	-----------------	-----------------------------	---------------------------------	----------------------	---------------	----------------------------

5. Используя выражение (9), рассчитайте значение минимальной скорости электронов, достигших анода лампы. Численные значения констант:  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  кг — масса электрона,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд электрона. Учтите, что анодное напряжение  $U$  учитывает падение напряжения  $\Delta U$  на миллиамперметре:  $U = U_{\text{ип}} - \Delta U$ . Падение напряжения на миллиамперметре (на данном пределе измерения) определяется из таблицы на передней панели миллиамперметра.

6. Исходя из значений анодного тока  $I$ , из условия  $I = e \cdot n$  рассчитайте количество электронов  $n$ , достигающих анода лампы за 1 с. Результаты также занесите в таблицу 1.

7. Постройте график зависимости  $\ln I = f(U)$ . Убедитесь, что экспериментальные точки достаточно хорошо ложатся на прямую, т.е. эта зависимость имеет вид  $\ln I = b + aU$ . Этот и другие графики этой работы следует строить от руки на миллиметровке; использование компьютерной программы Excel может привести к существенным ошибкам, поскольку она содержит ряд “подводных камней”, о существовании которых могут не знать неопытные пользователи. При построении графика следует руководствоваться общими правилами, изложенными, например, в руководстве [5].

8. С помощью метода наименьших квадратов рассчитайте угловой коэффициент прямой  $a$  и, зная, что  $a = -0.92e/kT$  (см. формулу 19), определите температуру газа. Обязательно вычислите погрешности измерения величин  $a$  и  $T$ .

9. При найденной температуре электронного газа  $T$  по формуле (5) определите наиболее вероятную скорость электронов и ее погрешность.

10. Постройте зависимость  $n = n(V_r)$ , где  $n$  — полное число электронов, достигающих анода за единицу времени. Эта зависимость играет в данном

эксперименте роль интегральной функции распределения электронов в анодном токе. Если Вы все сделали правильно, у Вас должна получиться кривая, похожая на кривую, изображенную на рис. 6,а.

11. Следующий этап — построение дифференциальной функции распределения электронов анодного тока по скоростям  $F(V_r)$  (пример на рис.6,б). Как отмечено ранее, дифференциальная функция распределения при данном значении радиальной скорости равна угловому коэффициенту касательной к графику интегральной функции распределения. В данной работе эта величина вычисляется приближенно. Для этого следует разбить ось абсцисс (рис. 6,а) на равные интервалы  $\Delta V$ , начиная с наименьшей скорости, и получить для каждого интервала соответствующие отношения числа электронов  $\Delta n_i$ , достигнувших анода, к интервалу скоростей  $\Delta V_i$ . При построении кривой отложите на оси абсцисс середину выбранного интервала

скоростей  $V_i$ , на оси ординат — величину  $f(V) = \frac{1}{n_{\max}} \Delta n / \Delta V$ , где  $n_{\max}$  —

полное число электронов, попавших на анод за единицу времени, оно определяется экстраполяцией экспериментальной кривой до пересечения ее с осью Y. Желательно иметь не менее 15 экспериментальных точек.

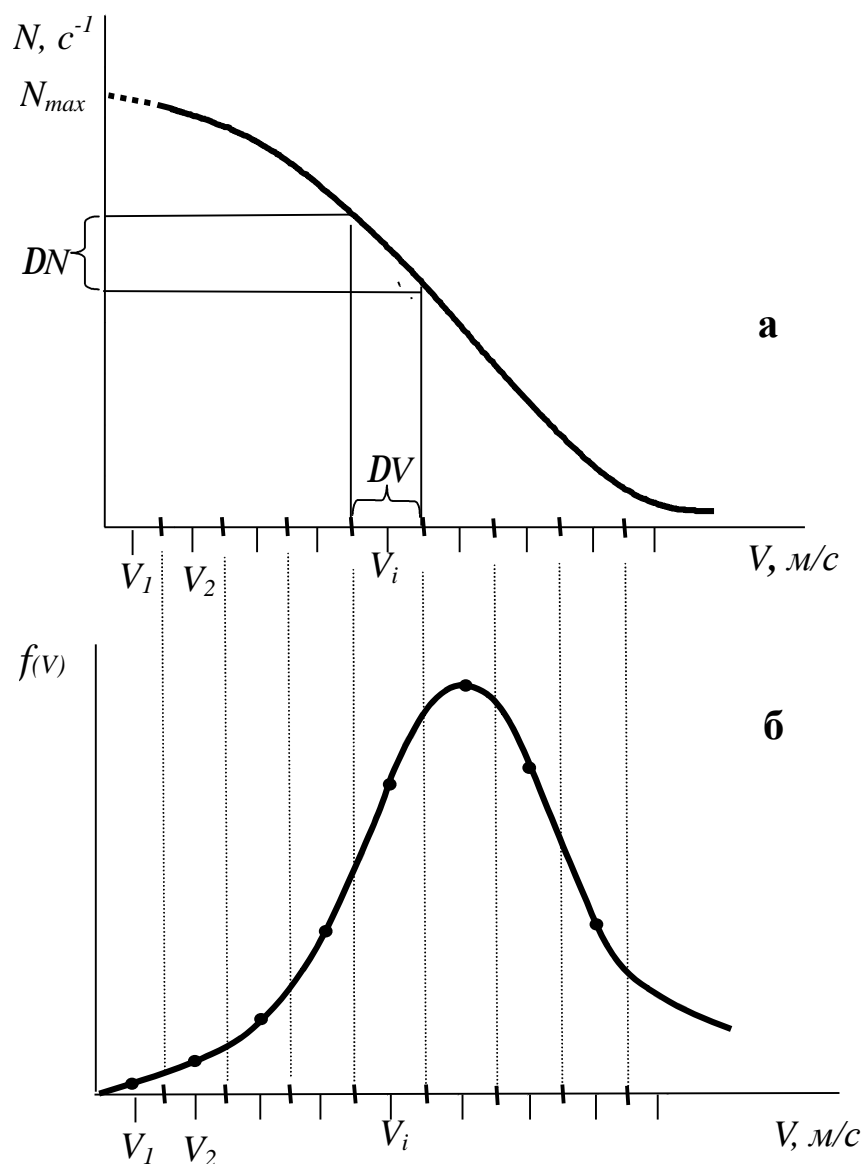


Рис.6. **а** – интегральная и **б** – дифференциальная функции распределения электронов по скоростям

12. Найдите максимум дифференциальной функции распределения электронов анодного тока и сравните эту величину с наиболее вероятной скоростью электронов, которая была определена согласно пункту 7.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Почему при изучении молекулярного движения нужно пользоваться статистическими законами?

2. Что такое дифференциальная и интегральная функции распределения?
3. Почему распределение Максвелла играет особую роль в статистической физике?
4. Почему средняя скорость молекул, распределенных по закону Максвелла, в проекции на любую координатную ось равна нулю?
5. В каких случаях удобно использовать распределение Максвелла в форме (3), (4) и (6)? Почему в данной работе мы используем его в форме (4)?
6. Как меняются концентрация и распределение микрочастиц по скоростям при прохождении ими потенциального барьера?
7. При вылете термоэлектрона за пределы проводника его скорость и кинетическая энергия уменьшается за счет работы выхода. Средняя кинетическая энергия пропорциональна температуре. Почему же электронный газ за пределами проводника характеризуется той же температурой, что и в проводнике?
8. Что такое распределение Максвелла-Больцмана?
9. Когда вместо распределения Максвелла-Больцмана нужно использовать функции распределения Ферми-Дирака или Бозе-Эйнштейна?
10. Почему при термоэлектронной эмиссии распределение свободных электронов можно описать классическим распределением Максвелла?
11. Запишите функцию распределения термоэлектронов по скоростям в вакуумном диоде с цилиндрическим катодом и начертите ее график. Влияют ли компоненты скорости электрона вдоль оси катода на анодный ток лампы?
12. Объясните действие задерживающего потенциала и выведите формулу (14).
13. С чем связано наличие линейного и плоского участков на логарифмической вольтамперной характеристике диода?
14. Подчиняется ли вольтамперная характеристика вакуумного диода закону Ома?
15. С помощью каких рассуждений мы пришли к формуле (19)?
16. Какой физический смысл имеет функция распределения электронов в анодном токе  $F(V)$ ?
17. Выведите формулу (20).
18. Почему по сравнению с распределением Максвелла в цилиндрической системе координат функция распределения электронов в анодном токе имеет дополнительный множитель  $V_r$ ?
19. На чем основан метод определения температуры электронного газа в данной работе?

20. Каков физический смысл интегральной и дифференциальной функций распределения в данной работе?
21. Почему максимуму дифференциальной функции распределения  $F(V_r)$  соответствует точка перегиба на интегральной функции распределения?
22. Почему максимум дифференциальной функции распределения  $F(V_r)$  не совпадает со значением наиболее вероятной скорости электронов в вакуумном диоде?
23. С помощью интегральной или дифференциальной функции распределения определите количество электронов со скоростями, превышающими наиболее вероятную скорость. Каких электронов больше, со скоростями больше или меньше наиболее вероятной скорости?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. -М.: Высшая школа, 1987.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. -М.: Наука, 1992.
3. Булкин П.С., Попов И.И. Общий физический практикум: молекулярная физика. -М.: Изд-во МГУ, 1988.
4. Гапонов В.И. Электроника. -М.: Изд-во гос. физ.-мат. лит., 1960, Т.1.
5. Иверонова В.И.. Физический практикум. -М.: 1968.
6. Основы физики. Курс общей физики. Т.2. Квантовая и статистическая физика. / Под. ред. Ю.М. Ципенюка. -М.: Физ.-мат. лит., 2001.
7. Квасников И.А.. Молекулярная физика. -М.: Эдиториал УРСС, 1998.

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-3**

### **МОЛЕКУЛЯРНОЕ СТРОЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ**

#### **Цель работы**

Познакомиться с молекулярно-кинетической теорией газов и жидкостей и изучить капиллярный эффект и явление поверхностного натяжения.

#### **Задача работы**

Определить коэффициент поверхностного натяжения исследуемой жидкости несколькими методами.

### **СТРУКТУРА ЖИДКОСТЕЙ**

В газах и жидкостях в отличие от твердых тел молекулы не связаны между собой стационарными устойчивыми связями. В газах расстояние между молекулами в среднем большое и молекулы практически свободно изменяют взаимное расположение. В жидкостях расстояние между молекулами малое, молекулы плотно заполняют занимаемое жидкостью пространство и сравнительно медленно меняют взаимное положение. В течение продолжительных промежутков времени группы молекул могут образовать агрегаты молекул, которые по своим свойствам напоминают твердое тело. Таким образом, жидкости по своей структуре и межмолекулярным силам имеют как свойства газа, так и свойства твердых тел. В связи с этим теория строения жидкостей является наиболее трудной и наименее разработанной.

## ПОТЕНЦИАЛ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Взаимодействие молекул удобно характеризовать зависимостями силы  $f(r)$  и потенциальной энергии взаимодействия  $U(r)$ , как функциями расстояния  $r$  между центрами сблизившихся молекул, приведенными на рис. 1 и 2.

При построении этих кривых сила взаимодействия и потенциальная энергия молекул, находящихся на бесконечно большом расстоянии друг от друга, положены равными нулю. На расстояниях  $r > r_0$  (рис. 1) между молекулами действуют силы взаимного притяжения (отрицательный знак силы), а при  $r < r_0$  силы отталкивания (положительный знак силы).

Из рис. 1 видно, что по абсолютному значению сила притяжения растет с увеличением  $r$  вплоть до некоторого значения  $r_1$ . Затем сила уменьшается и

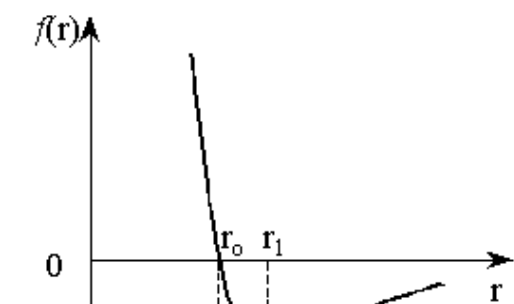


Рис. 1. Сила межатомного взаимодействия



Рис. 2. Потенциальная энергия межатомного взаимодействия

при расстоянии  $r_0$  между атомами становится равной нулю. При дальнейшем уменьшении  $r$  сила вновь появляется, но уже сила отталкивания, быстро растущая с уменьшением расстояния между молекулами, стремясь к бесконечности при  $r \rightarrow 0$ .

Кривой  $f(r)$  соответствует похожая на нее кривая  $U(r)$  (рис. 2). Сходство кривых не должно удивлять, так как  $f$  и  $U$  связаны, как известно, соотношением

$$f(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}$$

При расстоянии между атомами  $r_0$ , когда сила взаимодействия равна нулю, потенциальная энергия проходит через минимум. О молекуле в таком положении принято говорить, что он находится на дне “потенциальной ямы”. Это положение равновесия, т. е. силы притяжения уравновешиваются силами отталкивания.



Какой-либо универсальной формулы  $U(r)$ , пригодной для всех молекул, не существует. Более точно характеристика  $U(r)$  может быть дана лишь конкретно для данных молекул. Во многих вопросах теории к хорошим результатам приводит следующая аппроксимация функции  $U(r)$ :

$$U(r) = \frac{a_1}{r^n} - \frac{a_2}{r^m}, \quad (1)$$

в которой постоянные  $a_1, a_2, n, m$  подбираются из требований наилучшей аппроксимации реального потенциала. Как показало исследование потенциалов, в большинстве случаев хорошим приближением являются  $n=12, m=6$  при  $a_1, a_2$ , уточняемых для конкретных атомов. Функция  $U(r)$ , описываемая уравнением (1), называется потенциалом Леннарда-Джонса, широко используется в теории жидкостей и газов. Первый член (1) соответствует силам отталкивания, второй – силам притяжения, которые называются силами Ван-дер-Ваальса.

В теории уравнения состояния Ван-дер-Ваальса применяется более грубая аппроксимация. Крутой участок кривой  $U(r)$  заменяется вертикальной прямой, как это изображено на рис. 2 пунктиром. Если  $d$  – расстояние этой прямой от начала координат, то центры взаимодействующих частиц не могут сблизиться на расстояние, меньше  $d$ . Расстояние  $d$  играет роль диаметра молекулы, который относится к числу не вполне четко определяемых величин.

Рассматриваемая аппроксимация соответствует модели твердых упругих шаров, между которыми действуют силы притяжения; силы отталкивания учитываются тем, что размеры шаров считаются конечными.

## ЖИДКОЕ И ГАЗООБРАЗНОЕ СОСТОЯНИЯ

Кинетическая энергия притяжения может быть только положительной, потенциальная энергия между молекулами отрицательна. Если кинетическая энергия велика, так что сумма кинетической и потенциальной энергий рассматриваемой системы молекул положительна, то молекулы, представленные самим себе, стремятся разойтись на бесконечно большое расстояние. Такое состояние системы – газ и он стремится к расширению.

При сжатии газа его плотность увеличивается и среднее расстояние между молекулами уменьшается. При этом, как видно из формулы (1), уменьшается потенциальная энергия. Если средняя кинетическая энергия молекул не слишком велика, то наступает такой момент, когда сумма кинетической и потенциальной энергий будет отрицательной. Такая система молекул уже не может самопроизвольно рассеяться в большем объеме,

поскольку после рассеяния ее энергия состояла бы лишь из кинетической, т. е. была бы положительной, что невозможно, так как полная энергия системы отрицательна. Вспомните из механики: энергия связанного состояния отрицательна. Молекулы удерживаются друг около друга в конечном объеме. Такое состояние системы молекул является либо жидким, либо твердым. Чаще всего при сжатии газа образуется жидкое состояние.

Этот процесс образования жидкости при сжатии газа может иметь место лишь в случае, если кинетическая энергия молекул, т. е. температура, не очень велика.

## ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

Итак, мы пришли к выводу, что жидкое состояние возникает тогда, когда кинетическая энергия мала, а потенциальная энергия притяжения молекул превосходит по абсолютному значению кинетическую энергию. Силы притяжения между молекулами жидкости значительны и обеспечивают удержание молекул в объеме жидкости. Таким образом, у жидкости образуется поверхность, которая ограничивает ее объем. Площадь поверхности, ограничивающей данный объем, зависит от формы. Из геометрии известно, что при заданном объеме минимальной поверхностью обладает шар.

Поверхность жидкости, соприкасающейся с другой средой (стенки сосуда, ее собственный пар, твердое тело), находится в особых условиях по сравнению с остальной массой жидкости. Возникают эти особые условия

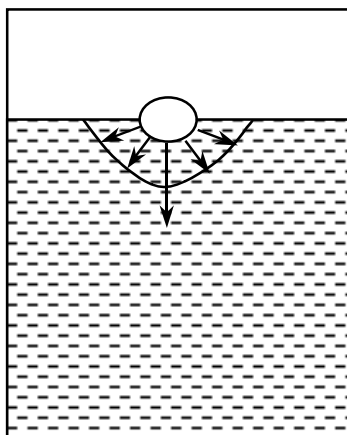


Рис. 3. Силы на границе жидкость - пар

потому, что молекулы пограничного слоя жидкости, в отличие от молекул в ее глубине, окружены молекулами той же жидкости не со всех сторон.

Часть “соседей” поверхностных молекул – это частицы второй среды, с которой жидкость граничит. Эта среда может отличаться от жидкости как природой, так и плотностью частиц.

В случае, если жидкость граничит со своим собственным паром (насыщенным), т. е. в случае, когда мы имеем дело с одним веществом, сила, направлена внутрь жидкости (рис. 3). Это объясняется тем, что плотность молекул в

жидкости много больше, чем в насыщенном паре над жидкостью (вдали от критической температуры), и поэтому сила притяжения, испытываемая молекулой поверхностного слоя со стороны молекул жидкости, больше, чем со стороны молекул пара.

Отсюда следует, что при увеличении поверхности жидкости некоторое число молекул из объема жидкости должно быть поднято в поверхностный слой. Для этого необходимо произвести внешнюю работу. Если при постоянной температуре обратимым путем изменить поверхность жидкости на бесконечно малую величину  $dS$ , то необходимая для этого работа:

$$dA = -s dS . \quad (2)$$

Знак минус указывает на то, что увеличение поверхности ( $dS > 0$ ) сопровождается отрицательной (затраченной) работой.

Коэффициент  $s = \left| \frac{dA}{dS} \right|$  является основной величиной, характеризующей

свойства поверхности жидкости, и называется коэффициентом поверхностного натяжения. Следовательно, коэффициент поверхностного натяжения измеряется работой, необходимой для увеличения площади поверхности жидкости при постоянной температуре на единицу.

С другой стороны, из термодинамики известно, что при изотермических процессах роль потенциальной энергии играет свободная энергия, для которой справедливо соотношение  $dF = -dA$ , где  $dA$  – работа, связанная с возникновением свободной энергии  $dF$  (свободной энергией системы называется та ее часть, которая может быть превращена в работу). В результате однородности поверхности, очевидно, что свободная энергия пропорциональна площади поверхности.

На основании сказанного выше с учетом (2) можно написать

$$F = sS , \quad (3)$$

т. е. коэффициент поверхностного натяжения жидкости можно определить как свободную энергию жидкости, приходящуюся на единицу ее поверхности. В системе СИ  $s$  имеет размерность Дж/м<sup>2</sup> или Н/м. Поверхностное натяжение зависит от свойств жидкости и изменяется в широких пределах. Например, при 20<sup>0</sup>С для воды  $s=0,073$  Н/м, для ртути  $s=0,465$  Н/м.

## МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Теперь ясно, в чем заключаются указанные выше особые условия, в которых находится поверхность жидкости. Они заключаются в том, что

поверхность жидкости обладает избыточной по сравнению с остальной массой жидкости потенциальной (свободной) энергией.

К чему же это приводит? Так же, как в механике, система стремится достигнуть состояния с наименьшей потенциальной энергией, и только состояние с наименьшей потенциальной энергией является устойчивым, в термодинамике система в изотермических условиях стремится достигнуть состояния с наименьшей потенциальной энергией. Поэтому поверхность жидкости стремится сократиться. Благодаря этому вдоль поверхности жидкости по касательной к ней действуют силы, называемые силами поверхностного натяжения. В этом отношении жидкость уподобляется тонкой резиновой пленке, растянутой изотропно по всем направлениям в плоскости поверхности, которой окружен объем жидкости. Наличие

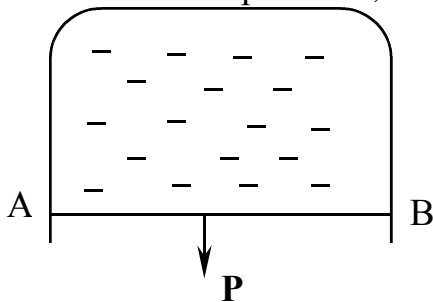


Рис. 4. Проволочная рамка с мыльной пленкой

поверхностного натяжения очень эффектно демонстрируется с помощью мыльных пленок.

Если, например, опустить проволочную рамку, одна из сторон которой АВ подвижна (рис. 4), в мыльный раствор, то вся она затянется пленкой жидкости. Силы поверхностного натяжения принуждают пленку сокращаться, и подвешенная перекладина АВ вслед за пленкой перемещается вверх. Чтобы сохранить ее в равновесии, к перекладине нужно приложить силу  $P$  в виде груза (сюда входит и вес самой перекладины).

Поверхностная сила  $f$  с учетом того, что пленка имеет две поверхности (пленка представляет собой слой жидкости), равна при равновесии весу груза  $P$ :

$$2f = P \quad \text{и} \quad f = \frac{P}{2}.$$

Если под действием силы перекладина, увлекаемая пленкой, переместилась на расстояние  $dh$  из положения АВ, то работа, совершенная силой  $f$ , равна:  $dA = fdh$ . Работа эта равна уменьшению свободной энергии пленки  $dF$ , которое, как мы знаем, равно  $dF = SdS$ . В данном случае  $dS = ldh$ , где  $l$  – длина рамки. Отсюда  $dA = Sldh = fdh = \frac{P}{2}dh$  и

$$S = \frac{P}{2l}. \quad (4)$$

Из (4) следует, что коэффициент поверхностного натяжения может быть определен как величина, равная силе поверхностного натяжения, действующего на единицу длины линии, являющейся границей жидкости, т. е.

$$s = \frac{f}{L} . \quad (5)$$

Сила  $f$  направлена перпендикулярно к любому элементу длины  $L$ , разграничивающей поверхность жидкости, и касательная к ее поверхности.

Чтобы понять, как возникают силы поверхностного натяжения, действующие вдоль поверхности, необходимо принять во внимание, что кроме сил притяжения на молекулы поверхностного слоя действуют также и другие силы, которые не позволяют этим молекулам переместиться внутрь жидкости, т. е. силы со стороны молекул внутреннего слоя. Вблизи же поверхности имеет место динамическое равновесие – число молекул, выходящих на поверхность каждую секунду из внутренних областей, равно числу молекул, уходящих каждую секунду из поверхностного слоя во внутренние области.

Динамическое равновесие возможно лишь при условии, что плотность молекул в поверхностном слое меньше, чем внутри жидкости. Поясним это утверждение следующим рассуждением. Для того чтобы перейти из внутренних слоев в поверхностный, молекуле необходимо “раздвинуть” молекулы поверхностного слоя и преодолеть силы притяжения со стороны молекул внутренних слоев, стремящихся удержать ее там.

Чтобы перейти из поверхностного слоя во внутренний (вниз), молекуле надо лишь “раздвинуть” молекулы внутреннего слоя. Таким образом, молекуле легче перейти из поверхностного слоя во внутренний, чем наоборот. Поэтому говорят, что поверхностный слой находится как бы в растянутом состоянии. Толщина поверхностного слоя составляет несколько молекулярных слоев.

Возникновение сил поверхностного натяжения удобно представить по аналогии со схемой сил, представленных на рис. 5

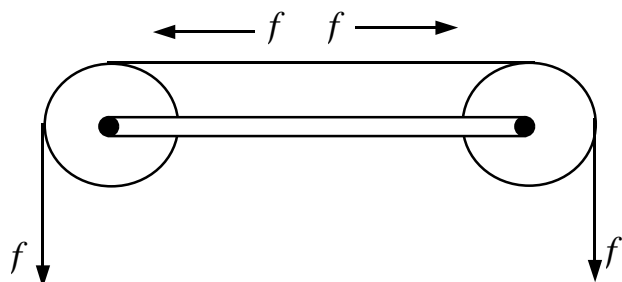


Рис. 5. Блоки с нитью

Через закрепленные блоки перекинута нить, на которой в вертикальном направлении действует равнодействующая сила  $f$ , а в горизонтальном направлении в нити действует сила натяжения  $f$ .

Поверхностное натяжение зависит

от свойств вещества, с которым соприкасается поверхность жидкости. Поэтому, когда идет разговор о поверхностном натяжении, надо указывать не только жидкость, которая имеется в виду, но и вещество, с которым поверхность жидкости соприкасается, т. е. коэффициент должен быть снабжен двумя индексами, указывающими две граничащие между собой среды, например,  $\sigma_{12}$  – твердое тело – жидкость.

## КАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Известно, что в узких стеклянных трубках–капиллярах, опущенных в жидкость, жидкость поднимается на некоторую высоту (рис. 6). Причиной этому является поверхностное натяжение.

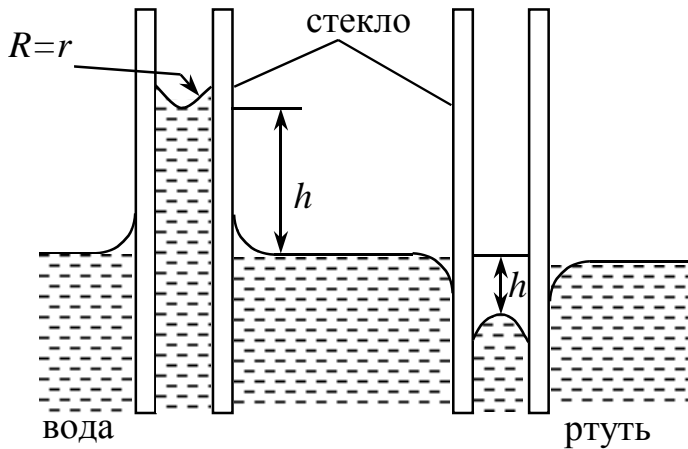


Рис. 6. Жидкости в капиллярах

Рассмотрим поверхность жидкости, опирающуюся на некоторый плоский контур. Если поверхность жидкости не плоская, то стремление ее к сокращению под действием сил поверхностного натяжения приведет к возникновению давления, дополнительно к тому, которое испытывает жидкость с плоской поверхностью. В случае выпуклой поверхности это давление положительно (рис. 7),

в случае вогнутой - отрицательно (в последнем случае поверхностный слой, стремясь сократиться, растягивает жидкость).

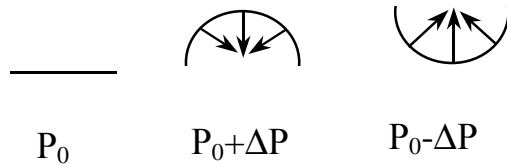


Рис. 7. Силы поверхностного натяжения

Величина добавочного давления  $\Delta P$  должна, очевидно, возрастать с увеличением коэффициента поверхностного натяжения и кривизны поверхности.

Величина добавочного давления над произвольной поверхностью вычисляется по формуле Лапласа [1, 2]:

$$DP = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (6)$$

Здесь  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны поверхностного слоя, величина  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  - называется средней кривизной произвольной поверхности в данной точке. Если поверхность сферическая, то  $R_1=R_2$  и

$$\Delta P = \frac{2s}{R}, \quad (7)$$

где  $R$  – радиус сферы. Добавочное давление  $DP$  (иногда его называют лапласовым давлением) обуславливает изменение уровня жидкости в капиллярных трубках. Поэтому его еще называют капиллярным давлением.

Если жидкость полностью смачивает стенки капилляра, то поверхность ее имеет вогнутую форму ( $\Delta P < 0$ ), если полностью не смачивает – выпуклую ( $DP > 0$ ). Поэтому в случае смачивания капилляра уровень жидкости в нем будет выше, чем в сосуде при не смачивании (рис. 6). Жидкость поднимается или опускается в капилляре до тех пор, пока добавочное давление  $DP$  не сравняется с гидростатическим давлением поднявшегося или опустившегося столба жидкости. Если считать, что жидкость полностью смачивает поверхность капилляра, то радиус кривизны мениска  $R$  совпадает с внутренним радиусом трубки  $r$ . По равенству лапласова и гидростатического давления можно записать:

$$\Delta P = \frac{2s}{r} = rgh, \quad (8)$$

где  $\rho$  - плотность жидкости,  $h$  – высота ее поднятия,  $g$  – ускорение силы тяжести.

Из равенства (8) можно определить коэффициент поверхностного натяжения:

$$s = \frac{r\rho gh}{2}. \quad (9)$$

Формула (9) используется в качестве рабочей при определении коэффициента поверхностного натяжения капиллярным методом.

## **ЗАДАЧА 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ ОТРЫВА КАПЕЛЬ**

### **Приборы и принадлежности**

Бюретка с краном на штативе, химический стакан, исследуемые жидкости, аналитические весы, отчетный микроскоп.



## Вывод рабочей формулы метода

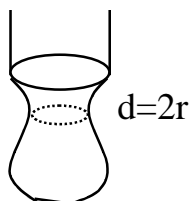


Рис. 8. Капля в момент отрыва

Если чуть приоткрыть кран на бюретке, то жидкость из трубки будет вытекать по каплям. Непосредственно перед отрывом капля висит на шейке, форму которой можно считать цилиндрической. Все капли в момент отрыва уравниваются (или чуть больше) силами поверхностного натяжения, действующими по контуру, ограничивающему поперечное сечение шейки. Линией раздела, очевидно, является окружность. Тогда, согласно (5) можно записать:

$$mg = 2pr s ,$$

где  $2r$  – диаметр шейки капли в момент отрыва. Отсюда:

$$s = \frac{mg}{2pr} . \quad (10)$$

Как следует из формулы метода, эксперимент сводится к определению диаметра капли  $d$  и массы одной капли.

## Порядок выполнения работы

1. Наполняют бюретку исследуемой жидкостью и с помощью крана добиваются равномерного падения капель в стакан.
2. Установив отсчетный микроскоп на уровне шейки капли, добиваются четкого ее изображения. Измеряют 10 раз диаметр шейки в момент отрыва. Цена деления микроскопа равна 0,06 мм/дел.
3. Взвешивают на аналитических весах пустой химический стаканчик. Не меняя скорости падения капель, наполняют его 100 каплями жидкости и вновь взвешивают. Если масса пустого стаканчика равна  $m_1$ , а с жидкостью  $m_2$ , тогда масса одной капли будет

$$m = \frac{m_2 - m_1}{100} .$$

Опыт по определению  $m_1$  и  $m_2$  проводят несколько раз.

4. Подставляя полученные значения  $m$  и  $g$  в формулу метода, определяют значение  $\sigma$  для воды и спирта.
5. Результаты измерений и вычислений заносят в таблицу 1.



Таблица 1.

№	Жидкость	г, м	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$m$ , кг	$\sigma$ , Н/м
1	Вода					
2						
3						
1	Спирт					
2						
3						

6. Проводят статистическую обработку результатов по методу Стьюдента для  $\alpha=0,95$ . Окончательный результат представляют в виде:

$$s = \bar{s} \pm \Delta s .$$

## ЗАДАЧА 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ СРАВНЕНИЯ

### Приборы и принадлежности

Бюретка с краном на штативе, химический стаканчик, исследуемая жидкость и вода.

### Вывод рабочей формулы

Возьмем две жидкости, заключенные в один и тот же объем. Массы этих жидкостей можно представить в виде:

$$n_1 m_1 = r_1 V ,$$

$$n_2 m_2 = r_2 V ,$$

где  $m_1$ ,  $m_2$  – масса одной капли соответствующих жидкостей;  $n_1$ ,  $n_2$  – количество их капель;  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  – плотности этих жидкостей,  $V$  – объем, занимаемый каждой из этих жидкостей.

В момент отрыва капли жидкости, согласно задаче 1, имеем (для  $n$  капель):

$$r_1 V = 2pr s_1 n_1$$

$$r_2 V = 2pr s_2 n_2 .$$

После преобразования приходим к выражению, представляющему рабочую формулу метода и выражающему величину поверхностного натяжения

исследуемой жидкости через аналогичную характеристику вспомогательной жидкости (в данном случае - воды):

$$S_2 = S_1 \cdot \frac{r_2 n_1}{r_1 n_2} \quad (11)$$

### Порядок выполнения работы

1. Промывают бюретку и наполняют ее через воронку водой.
2. Добиваются с помощью крана равномерного падения капель.
3. Подставляя мерный стаканчик (химический стакан с делениями), считают количество капель  $n_1$  воды, соответственно заданному объему.
4. Наливают в бюретку исследуемую жидкость, предварительно промыв ею бюретку, и определяют количество капель  $n_2$  этой жидкости в том же объеме.
5. Взяв из таблицы значения  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\sigma_1$  при данной температуре, по формуле (11) находят  $S_2$ .
6. Результаты измерений и вычислений заносят в таблицу 2.

Таблица 2

№	$S_1$ , Н/м	$r_1$ , кг/м <sup>3</sup>	$r_2$ , кг/м <sup>3</sup>	$T$ , К	$n_1$	$n_2$	$S_2$ , Н/м
1							
2							
3							

### ЗАДАЧА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ КОМПЕНСАЦИИ РАЗНОСТИ ДАВЛЕНИЙ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ (МЕТОД ШТЕЙНА)

#### Приборы и принадлежности

Установка, набор исследуемых жидкостей, груша, капилляр, отчетный микроскоп.

#### Описание установки

Установка состоит из капилляра А, широкой трубки Д и водяного манометра С, сообщающихся посредством трубки В. Широкую трубку Д опускают в стакан с водой, помещенный на столике, который можно

закрепить винтом Е в любом положении. Опуская и поднимая столик, можно изменить давление в рассматриваемой системе.

### Вывод рабочей формулы

Как мы уже установили выше, если капилляр опустить в сосуд с исследуемой жидкостью, то в случае смачивания стенок капилляра этой жидкостью, последняя поднимется на некоторую высоту ( $dP < 0$ ). Если теперь увеличить внешнее давление над поверхностью жидкости в капилляре, скомпенсировав тем самым Лапласово давление  $dP$ , то уровень жидкости в капилляре опустится до уровня жидкости в сосуде и сравняется с ним.

Если внешнее давление при этом увеличилось на  $P$ , то согласно (8)

$$P = \Delta P = \frac{2s}{r}, \quad (12)$$

где  $r$  – радиус капилляра.

С другой стороны, избыток давления  $P$  в системе можно выразить так:

$$P = rgh, \quad (13)$$

где  $h$  – разность уровней воды в манометре,  $r$  – плотность жидкости, налитой в манометр. Выражая из (12) и (13)  $s$ , получим:

$$s = rgh \frac{r}{2}. \quad (14)$$

### Порядок выполнения работы

1. Капилляр вынимают из трубки, промывают исследуемой жидкостью с помощью груши. Затем опускают его в стаканчик с исследуемой жидкостью. Далее, не вынимая его из стаканчика, вновь сообщают с манометром посредством трубки.

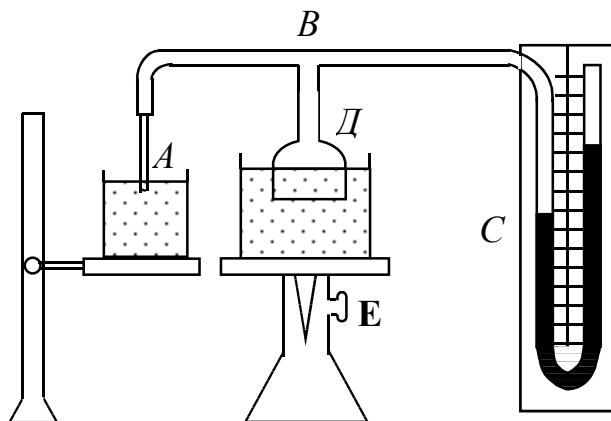


Рис. 9. Схема опыта

в стаканчик с исследуемой жидкостью. Далее, не вынимая его из стаканчика, вновь сообщают с манометром посредством трубки. Жидкость в капилляре поднимается и устанавливается на некоторой высоте (надо следить, чтобы столбик жидкости не содержал пузырьков воздуха, если они имеются, значит, капилляр промыт плохо, и надо его промыть еще раз).

2. Медленно поднимают столик (Е) и доводят уровень жидкости в

капилляре до ее уровня в стаканчике (см. рис.9.). Закрепляют столик и определяют разность уровней манометра ( $h$ ). Опыт продельвают несколько раз, перемещая столик и заново отсчитывая разность уровней  $h$ .

3. Определяют радиус капилляра с помощью отчетного микроскопа, помещая его горизонтально в штатив и освещая лампой. Микроскоп наводят на конец капилляра и отмечают, какому числу делений окулярной шкалы соответствует диаметр капилляра. После этого в той плоскости, где находился конец капилляра, устанавливается миллиметровую шкалу и определяют цену деления окулярной шкалы микроскопа. Измерения проводят несколько раз.

Примечание. Ввиду большой зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры, необходимо указать температуру, при которой производились наблюдения.

4. Результаты измерений и вычислений заносят в таблицу 3.

Таблица 3

Номер опыта	$T, K$	$h, m$	$r, m$	$s, H/m$	$s = \bar{s} \pm \Delta s, H/m$
1					
2					
3					
4					
5					

Проводят статистическую обработку результатов по методу Стьюдента при  $\alpha=0.95$ .

#### **ЗАДАЧА 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ОТРЫВА КОЛЬЦА**

##### **Приборы и принадлежности**

Аналитические весы, набор жидкостей, разновес, стеклянная кювета, металлическое кольцо.

##### **Описание установки и вывод рабочей формулы метода**

Экспериментальная установка представляет собой аналитические весы А, у которых на одно коромысло, кроме чашки, подвешено горизонтально

тонкое алюминиевое кольцо. Под кольцо на штативе со столиком помещается сосуд с исследуемой жидкостью В.

Если подвести сосуд под кольцо так, чтобы оно нижним основанием лишь слегка коснулось поверхности жидкости, кольцо как бы прилипнет. При этом жидкость начнет подниматься по стенкам кольца, а само кольцо втянется внутрь жидкости. Для отрыва кольца от

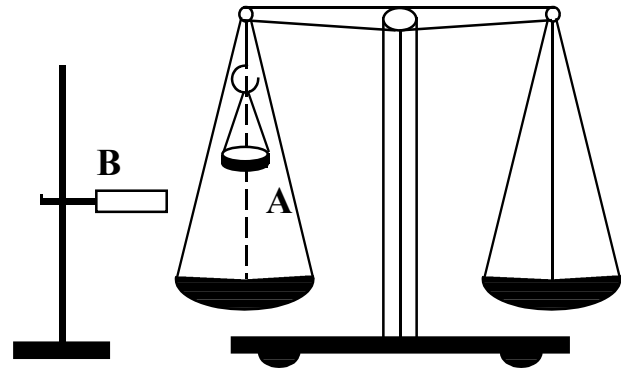


Рис. 10. Экспериментальная установка

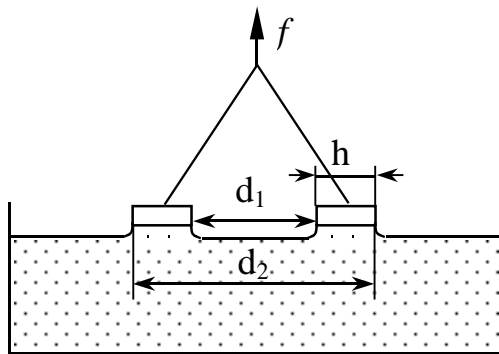


Рис. 11. Взаимодействие кольца и жидкости

определить  $\sigma$ :

$$S = \frac{f}{2p(d_2 - h)}. \quad (15)$$

Итак, эксперимент сводится к определению силы  $f$ , диаметра кольца  $d_2$  и его толщины  $h$ .

### Порядок выполнения работы

1. Измеряют штангенциркулем внешний диаметр кольца  $d_2$  и определяют толщину стенок кольца  $h$ .
2. Подвешивают кольцо на левое коромысло весов и уравнивают их с помощью разновеса.
3. Подводят под кольцо кюветку с исследуемой жидкостью так, чтобы оно только коснулось поверхности жидкости.

4. Осторожно нагружают правую чашку весов разновесами до тех пор, пока кольцо не оторвется от поверхности жидкости. Вес разновесок равен при этом силе поверхностного натяжения  $f$ .

Внимание! Рекомендуется класть разновесы на предварительно арретированные весы.

Опыт повторяют 3 – 5 раз.

5. По формуле (15) определяют коэффициент поверхностного натяжения жидкости  $\sigma$ .

6. Результаты измерений и вычислений заносят в таблицу 4

Таблица 4

№ опыта	$d_2$ , м	$h$ , м	$f$ , Н	$s$ , Н/м	$Ds$ , Н/м	$s = \bar{s} \pm \Delta s$ , Н/м
1						
2						
3						
4						
5						

Проводят статистическую обработку результатов по методу Стьюдента при  $\alpha=0,95$ .

### ЗАДАЧА 5. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $s$ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Цель задачи: сопоставить результаты определения коэффициента поверхностного натяжения различными методами и сравнить их точность.

Результаты проведенных исследований представить в виде таблицы 5.

Таблица 5

№ метода	$\bar{s}$ , Н/м	$\Delta s$ , Н/м	$\frac{\Delta s}{\bar{s}} \cdot 100\%$
1			
2			
3			
4			

Провести обсуждение полученных результатов с указанием причин, снижающих точность каждого из проведенных методов определения коэффициента поверхностного натяжения.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Начертите кривые взаимодействий  $f(r)$  и  $U(r)$  и объясните ход этих зависимостей.
1. Запишите формулу для потенциала Леннарда – Джонса и объясните ее содержание.
2. При каком соотношении кинетической и потенциальной энергий состояние системы является газом?
3. Объясните механизм возникновения сил поверхностного натяжения.
4. Почему при отсутствии внешних сил капля жидкости принимает форму шара?
5. Дайте определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости и запишите формулу для  $\sigma$ .
6. Запишите формулу Лапласа и объясните причину поднятия (опускания) жидкости в капилляре.
7. При каких условиях отрывается капля жидкости, вытекающей из трубки?
8. Получите формулу для определения  $\sigma$  методом сравнения.
9. Объясните принцип действия экспериментальной установки Штейна для определения  $\sigma$ . Каково назначение широкого сосуда Д?
10. Запишите условие отрыва кольца от поверхности жидкости.
11. Приведите примеры проявления сил поверхностного натяжения в природе.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев А. Н. Молекулярная физика. -М.: 1983.
2. Кикоин А. К., Кикоин И. К. Молекулярная физика. –М.: 1976.
3. Адам К. К. Физика и химия поверхностей. -М.: 1979.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
5. Ширяева С.О., Григорьев О.А. О влиянии эффекта релаксации поверхностного натяжения на спектр движений жидкости с заряженной свободной поверхностью // ЖТФ, 2000, Т.70, Вып.6.
6. Логинов Б. В., Треногий В. А. Задача со свободной границей для уравнения Лапласа, капиллярно-гравитационные волны в

пространстве, бифуркация и симметрия. Дифференциальные уравнения. Беларусь, -Минск, 1998, Т. 34, № 8.

7. Лапшин В.Б., Сидоренко А.В. Взаимодействие гравитационно-капиллярных структур в поверхностном слое океана. «Исследовано в России» // Электронный многопредметный научный журнал, МФТИ, 1998, С. 1561-1570.  
<http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/135.pdf>



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-4

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗОНДА

#### Цель работы

Познакомиться с явлением поверхностного натяжения и освоить методику измерения коэффициента поверхностного натяжения методом электрического зонда.

#### Задача работы

Измерить длину капиллярно-гравитационных волн и рассчитать коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

#### ВВЕДЕНИЕ

Поверхность жидкости, соприкасающейся с другой средой, например, с ее собственным паром, находится в особых условиях по сравнению с основной массой жидкости. Это объясняется тем, что молекулы пограничного слоя жидкости, в отличие от молекул в глубине, имеют неоднородное окружение - плотность пара меньше плотности жидкости. Вследствие этого сила притяжения, испытываемая молекулой пограничного слоя со стороны молекул жидкости больше, чем со стороны молекул пара, и результирующая сила, действующая на молекулу, направлена внутрь жидкости.

Представим себе, что поверхность жидкости по тем или иным причинам увеличивается (растягивается) на бесконечно малую величину  $dS$ , тогда необходимая для этого работа

$$dA = -\sigma dS.$$

Знак минус указывает на то, что увеличение поверхности сопровождается отрицательной работой. Коэффициент  $\sigma$  является основной величиной, характеризующей свойства поверхности жидкости, и называется *коэффициентом поверхностного натяжения*. Изменение площади поверхности  $dS$  повлечет за собой изменение потенциальной энергии поверхностного слоя

$$dU = -s dS .$$

С другой стороны, работа при изотермическом процессе, как известно, равна изменению свободной энергии  $F$  поверхности:

$$dA = -dF .$$

Значит, избыточная потенциальная энергия поверхности жидкости, является свободной энергией поверхности и, следовательно, коэффициент поверхностного натяжения жидкости  $s$  можно определить как свободную энергию единицы площади этой поверхности в соответствии с формулой

$$s = \frac{dF}{dS} .$$

Если жидкость вывести из состояния равновесия, то сила тяжести и силы поверхностного натяжения будут стремиться возвратить ее в исходное состояние. Сила тяжести стремится совместить поверхность жидкости с горизонтальной плоскостью, силы же поверхностного натяжения стремятся сократить площадь поверхности жидкости. В результате на поверхности жидкости возникают капиллярно-гравитационные волны.

Рассмотрим капиллярно-гравитационные волны малой амплитуды. Так называются волны, амплитуда колебаний которых мала по сравнению с длиной волны. Будем считать также жидкость глубокой, т.е. глубина жидкости значительно больше длины волны ( $h \gg l$ ).

В настоящей работе коэффициент поверхностного натяжения определяется путем измерения скорости распространения плоской волны по поверхности жидкости. Волны возбуждаются вибратором (рис.1). На конце вибратора находится широкая и тонкая вертикальная пластинка П, касающаяся поверхности жидкости.

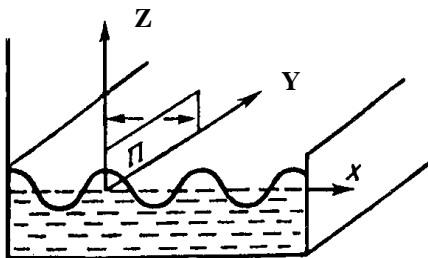


Рис. 1. Волна на поверхности жидкости

Пластинка вибратора колеблется, вызывая на поверхности волны, распространяющиеся вдоль оси  $x$ . Если пластинка достаточно широкая, а амплитуда волны  $a$  мала по сравнению с ее длиной  $\lambda$ , возникающие волны можно считать плоскими и гармоническими:

$$z = a \sin(\omega t - kx),$$

где  $a$  – амплитуда волны,  $\omega$  – угловая частота колебаний,  $k$  –

модуль волнового вектора или волновое число, определяемое через длину волны  $l$  как  $k=2\pi/l$ .

Скорость распространения гребня волны  $c$  называется фазовой скоростью. Распространение волны отнюдь не связано с аналогичным перемещением частиц жидкости. Очевидно, что при прохождении волны через фиксированную точку пространства, частицы поверхности жидкости совершают колебательные движения вверх и вниз. Можно показать также, что при прохождении волны частицы совершают круговые движения в направлении распространения волны. Например, если смотреть с моста на небольшой предмет, плавающий на поверхности водоема, можно заметить, что при прохождении волны он совершает колебательные движения в горизонтальной плоскости. Сложение двух периодических колебаний, осуществляемых во взаимно ортогональных направлениях, дает вращательное движение частиц жидкости. На гребне волны частицы движутся в направлении распространения волны, во впадине - в

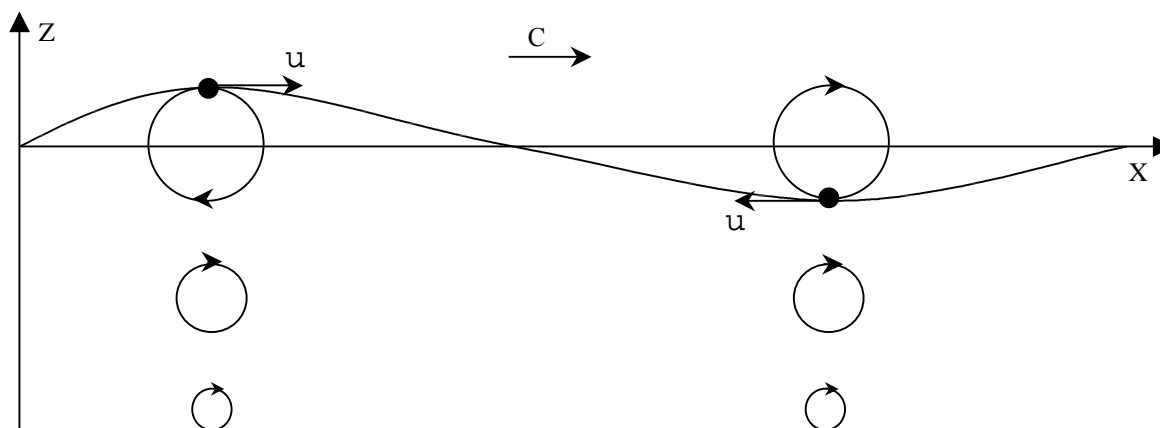


Рис.2. Круговые траектории движения частиц жидкости в неподвижной системе координат на разной глубине

противоположном направлении. Решение уравнений гидродинамики приводит к следующим строгим данным о характере движения частиц жидкости [3]. В плоской синусоидальной волне, бегущей по поверхности глубокой жидкости, каждая частица жидкости движется по окружности, расположенной в вертикальной плоскости, проходящей через направление распространения волны. Радиус окружности для волн с малой (по сравнению с длиной волны) амплитудой равен на поверхности жидкости амплитуде волны ( $r=a$ ) и экспоненциально убывает при удалении от поверхности жидкости (рис.2).

Найдем выражение для скорости капиллярно-гравитационных волн. Для этого рассмотрим движение частиц в системе отсчета, равномерно движущейся с фазовой скоростью волны  $c$  в направлении распространения волны. В этой системе волна будет неподвижной, а движение частиц будет складываться из равномерно поступательного со скоростью  $c$  и равномерного вращения по окружности радиуса  $r$ . Так как радиус  $r$  предполагается малым по сравнению с длиной волны  $l$ , то можно пренебречь горизонтальными колебаниями частиц. Движение частиц на поверхности жидкости описывается уравнениями:

$$x=ct, z=r \cdot \sin \frac{2\pi ct}{l},$$

где  $c$  - скорость распространения волн в направлении оси  $x$ ,  $r$  - амплитуда волны,  $l$  - длина волны. Траектория движения частиц поверхности находится отсюда исключением времени  $t$ , что дает

$$z = r \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (1)$$

Таким образом, наблюдатель, движущийся вместе с волной, видит частицы, проносящиеся по поверхности застывшей синусоидальной волны в сторону противоположную реальному движению волны. Частицы расположенные не на поверхности, а в глубине жидкости также движутся по синусоидам. Но для них амплитуда синусоиды меньше - она убывает с глубиной.

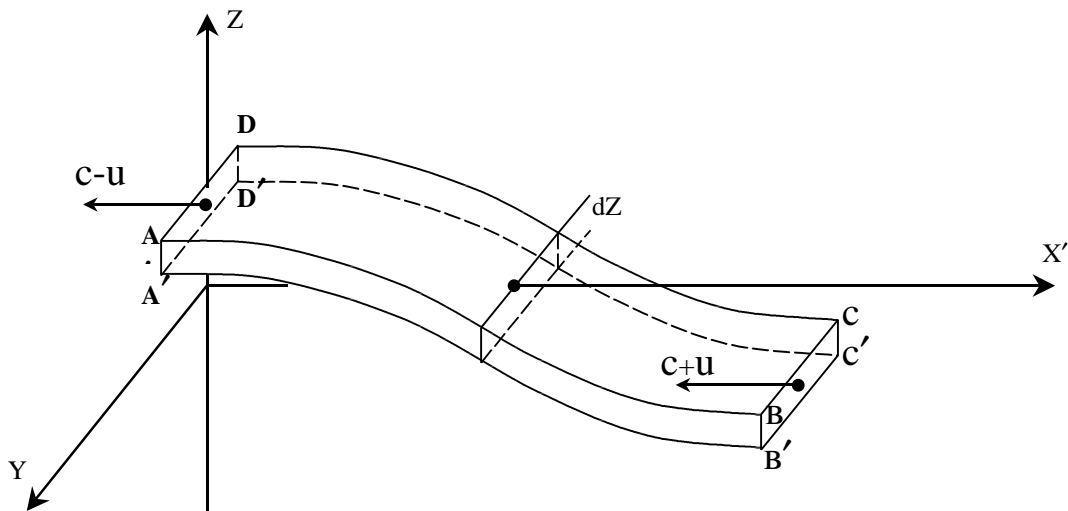


Рис. 3. Трубка тока частиц жидкости в системе отсчета волны

На рис. 3 верхняя поверхность ABCD – это поверхность жидкости, а A'B'C'D' – бесконечно близкая к ней поверхность в глубине жидкости. Пространство между поверхностями ABCD и A'B'C'D' представляет собой трубку тока частиц жидкости (рис.3). Применим к ней уравнение Бернулли, выражающее закон сохранения энергии для движущейся жидкости. Если  $u$  - скорость движения частиц жидкости по окружности, то на гребне волны в точке А, где поступательное и вращательное движения вычитаются, полная скорость частиц по окружности будет  $c-u$ , а в точке В, где они складываются,  $c+u$ . То есть, в каждой трубке тока существует стационарное ламинарное движение жидкости с плавным изменением скорости и давления. Разность высот точек А и В равна  $h=2r$ . Поэтому по уравнению Бернулли следует, что

$$P_A + \frac{r(c-u)^2}{2} + 2rgr = P_B + \frac{r(c+u)^2}{2}$$

или

$$2rcu = 2rgr + (P_A - P_B), \quad (2)$$

где  $\Gamma$  - плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения. Очевидно, линейная скорость вращения частицы по окружности есть

$$u = \frac{2pr}{T} = \frac{2prc}{l}. \quad (3)$$

Давление жидкости в точках А и В можно вычислить по формулам

$$P_A = P_0 + P_L, \quad P_B = P_0 - P_L,$$

где  $P_0$  – атмосферное давление,  $P_L$  – лапласовское давление или давление под искривленной поверхностью жидкости, т.е.

$$P_A = P_m + s \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad P_B = P_0 - s \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (4)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны двух взаимно-перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости. Одним сечением является прямая линия, направленная вдоль оси  $z$ , т.е.  $R_1 = \infty$ . Для вычисления  $R_2$  используем результат математического анализа, согласно которому кривизна плоской кривой  $z=z(x)$ , соприкасающейся с окружностью в данной точке, определяется как

$$k = \frac{z''}{[1 + (z')^2]^{3/2}}.$$

Дифференцируя функцию  $z=z(x)$  и учитывая, что в точках А и В ее первые производные равны нулю (рис. 2), получаем

$$k = \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{4p^2 r}{l^2}.$$

Радиус кривизны поверхности связан с кривизной выражением  $k=1/R^2$ . Таким образом, мы получаем окончательное выражение

$$R_2 = \frac{l^2}{4p^2 r}. \quad (5)$$

Из (2) с учетом (3), (4), (5) получаем выражение для скорости распространения капиллярно–гравитационных волн по поверхности жидкости

$$c = \sqrt{\frac{gl}{2p} + \frac{2ps}{lr}}. \quad (6)$$

Как видим, фазовая скорость зависит от длины волны. Зависимость скорости от длины волны называется дисперсией.

Далее, можно рассмотреть два предельных случая. У длинных волн вклад сил поверхностного натяжения в образование волны на поверхности жидкости много меньше вклада силы тяжести, т.е. выполняется неравенство

$$\frac{gl}{2p} \gg \frac{2ps}{lr},$$

откуда

$$l \gg 2p \sqrt{\frac{s}{rg}}.$$

Такие волны называются гравитационными. Их фазовая скорость  $c = \sqrt{\frac{gl}{2p}}$ .

В данной работе реализуется противоположный предельный случай, когда

$$l \ll 2p \sqrt{\frac{s}{rg}}. \quad (7)$$

В этом случае, наоборот, действие силы тяжести несущественно. Такие волны называются капиллярными. Скорость их распространения равна

$$c = \sqrt{\frac{2ps}{rl}}.$$

При заданной частоте колебаний вибратора  $\nu$  измеряется длина капиллярных волн. В предлагаемой работе удобно измерять величину  $l/2$ . Тогда коэффициент поверхностного натяжения оказывается равным

$$S = \frac{4rn^2(l/2)^3}{p} \quad (8)$$

## ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

На рис. 4 изображена установка для измерения длины капиллярных волн зондовым методом. От генератора 1 подается сигнал высокой частоты (120 кГц) на электрод 2 – противозонд, помещенный в ванну с водой. Электрод 3, называемый зондом, представляет собой тонкий стержень из нихрома, который может перемещаться в вертикальном и горизонтальном направлениях при помощи микрометрических винтов 5 и 6. Зонд, касаясь поверхности жидкости, принимает высокочастотный сигнал от противозонда. Высокочастотный сигнал называется несущим, он необходим для повышения точности измерения, поскольку переменный ток не вызывает поляризации электродов. Сопротивление цепи противозонд – вода – зонд существенно зависит от площади контакта тонкого зонда с водой. Небольшое изменение глубины погружения зонда ведет к сильному изменению тока.

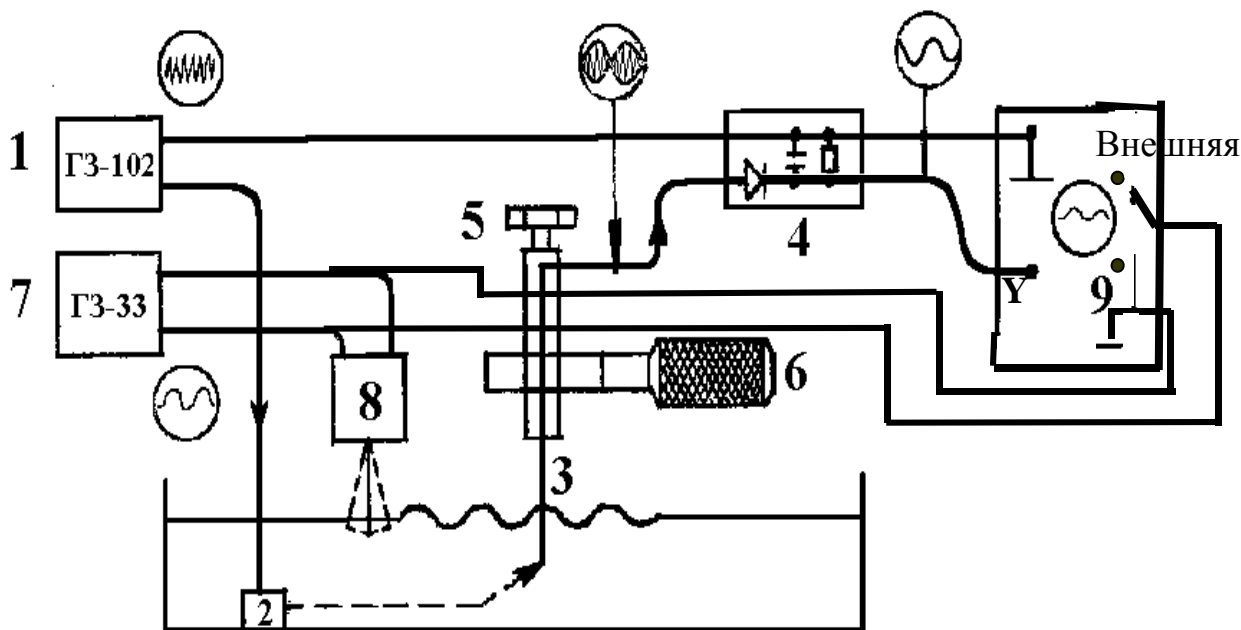


Рис. 4. Схема экспериментальной установки

Если по поверхности жидкости, бежит волна, то в точке  $x$  расположения зонда уровень жидкости периодически меняется. Синхронно с изменением уровня жидкости меняется сопротивление контакта жидкость - зонд и ток в цепи зонда. При малой амплитуде волны колебания тока близко к гармоническому, т.е.  $i \sim z(x, t)$ .

Волна на поверхности воды создается вибратором 8, который управляется генератором низкой частоты 7. В результате наложения двух сигналов, высокой частоты от генератора 1 и низкой частоты от генератора 7, высокочастотный сигнал 120 кГц будет промодулирован низкочастотным сигналом, создаваемым волновым процессом на поверхности жидкости. При этом на выходе зонда 3 получается амплитудно-модулированный сигнал, который поступает на вход детектора 4. Детектор выделяет из поступающего на его вход суммарного сигнала низкочастотную составляющую (колебания поверхности жидкости), которые регистрируются осциллографом. Осциллограф регистрирует напряжение, пропорциональное изменению тока в цепи:  $U = iR$

## РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ

### Первый способ измерения

Волны на поверхности жидкости можно регистрировать с помощью фигур Лиссажу. Для этого следует включить в сеть генератор ГЗ-33, прогреть пять минут. Ручкой регулировки частоты установить нужную частоту колебания вибратора. Ручкой «выходное напряжение» установить такое напряжение на вибраторе, чтобы не было турбулентности на поверхности воды, например, при частоте 30 Гц это примерно 15 В. Переключить ручку осциллографа «Развертка» в положение «0», что означает подачу сигнала на вход «X» осциллографа от звукового генератора ГЗ-33, задающего частоту колебания жидкости в кювете. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одной и той же частоты (частоты генератора ГЗ-33 и частоты сигнала, снимаемого с зонда) даст на экране осциллографа эллипс (рис.5,б). Будем смещать зонд по горизонтали до тех пор, пока эллипс не выродится в прямую (рис. 5,а или 5,в).

Записать отсчет  $x_i$  по микрометрическому винту 6. Смещать зонд по горизонтали до тех пор, пока на экране опять не появится прямая с отрицательным углом наклона (рис.5), что соответствует изменению



разности фаз взаимно перпендикулярных колебаний на  $\pi$  или смещению зонда по горизонтали на  $l/2$ . Записать отсчет  $x_2$ .

Расчет вести по формуле (8). Опыт повторить три раза при трех различных частотах колебания вибратора в интервале от 30 до 60 Гц.

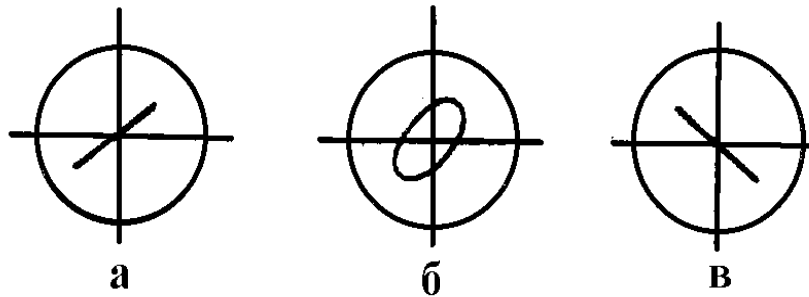


Рис. 5. Фигуры Лиссажу на экране осциллографа

### Второй способ измерения

Включить генератор ГЗ-33. Ручкой регулировки частоты установить

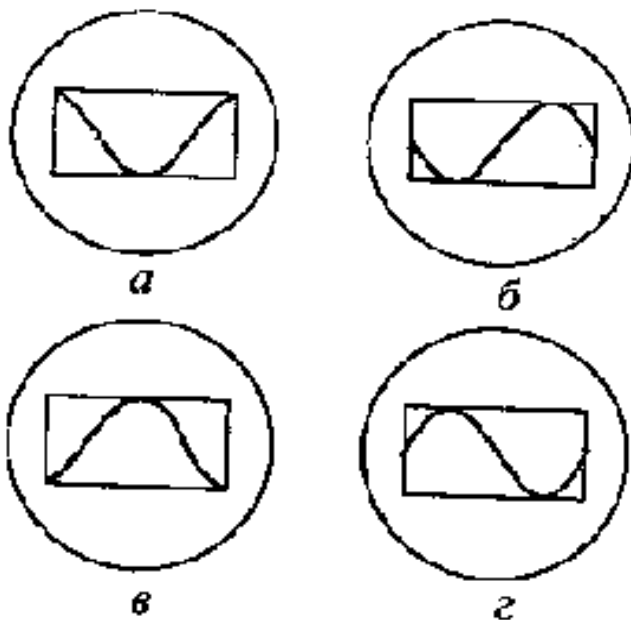


Рис. 6. Осциллограммы тока в цепи.

нужную частоту колебания вибратора.

Ручкой «входное напряжение» вновь установить такое напряжение на вибраторе, чтобы не было турбулентности на поверхность воды.

Тумблер осциллографа включается в положение «Сеть».

Клемма «Синхронизация внешняя» соединена с выходом звукового генератора. Через 1-2 минуты на экране должна появиться

горизонтальная полоса развертки.

Ручками «смещение по оси У и Х»

сместить развертку в центр экрана. Отвести зонд в самое крайнее (дальнее от вибратора) положение, соответствующее  $\sim 30$  мм по показаниям микрометрического винта 6. Вертикальным микрометрическим винтом 5 опустить зонд до соприкосновения с поверхностью жидкости. В момент соприкосновения конца зонда с поверхностью жидкости на экране осциллографа должен появиться сигнал, близкий по форме к синусоидальному.

С помощью горизонтального микрометрического винта поставить зонд в положение, при котором картина на экране соответствовала бы рис.б,а или б,б. Ручкой "смещение по оси X" совместить максимум кривой с центральной вертикальной рисккой, нанесенной на сетке экрана осциллографа. Это состояние схемы будет исходным. Записать отсчет  $x_1$ , соответствующий исходному состоянию. После этого сместить зонд к вибратору так, чтобы с вертикальной рисккой в середине экрана совмещался не максимум, а минимум (рис. б,в или б,г), что соответствует смещению зонда на  $l/2$ . Записать отсчет  $x_2$  по микрометрическому винту. Перемещение зонда производить плавно. Небольшие колебания рабочего стола и схемы ведут к искажениям картины, видимой на экране.

Повторить опыт 3 раза, каждый раз возвращая микрометрический винт в исходное состояние. По полученным данным рассчитать среднее значение  $l/2$ . Значение коэффициента поверхностного натяжения вычислить по формуле 7. Измерения провести при трех различных частотах в интервале от 30 до 60 Гц.

Сравнить результаты двух методов регистрации сигнала, оценив погрешность измерения по Стюденту.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Зависит ли коэффициент поверхностного натяжения от частоты возбуждаемых колебаний?
2. Какой вид имеет временная зависимость напряжения на электроде. Как изменится вид этого сигнала при погружении электрода?
3. Как зависит коэффициент поверхностного натяжения от температуры?
4. Можно ли применить данный метод измерений в таких жидкостях как ртуть, керосин?

5. Найти выражение для максимальной скорости поверхностных волн.
6. Какие волны называются капиллярными?
7. Получить формулу фазовой скорости распространения капиллярно-гравитационных волн.
8. При выполнении какого условия волны являются капиллярными?
9. Почему длинные волны являются гравитационными, короткие – капиллярными?

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. -М.: Высшая школа, 1987.
2. Хайкин С.Э. Физические основы механики. -М.: Физматгиз.1963 г.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. -М.: Наука, 1993, Т.2.
4. Булкин П.С. , Попова И.И. Общий физический практикум, -М. Изд-во МГУ, 1988.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-5

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА И ЭФФЕКТИВНОГО ДИАМЕТРА МОЛЕКУЛ ГАЗА

#### Цель работы

Познакомиться с явлением внутреннего трения в газах и основными газокинетическими характеристиками молекул.

#### Задача работы

Экспериментальное определение длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха по явлению внутреннего трения.

#### ТЕОРИЯ

В молекулярной физике мы часто имеем дело с такими физическими явлениями, как диффузия, теплопроводность, внутреннее трение. Теория этих явлений основана на понятиях средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул газа. Рассмотрим эти понятия.

Известно, что средняя скорость молекул газа при комнатной температуре сравнима со скоростью оружейной пули. Это означает, что запах пахучего вещества должен распространяться мгновенно. Однако на практике это не наблюдается. Медленность диффузии немецкий физик теоретик Рудольф Клаузиус объяснил столкновением молекул. Молекула не все время движется по прямой. Сталкиваясь с другими молекулами, она меняет направление движения, перемещаясь в результате по зигзагообразной траектории, как показано на рис.1. За время между двумя последовательными соударениями молекула проходит путь  $x$ , который называется длиной свободного пробега. Длина свободного пробега величина случайная, иной раз молекуле удастся пролететь между соударениями большое расстояние, в другой раз этот путь может оказаться весьма малым.

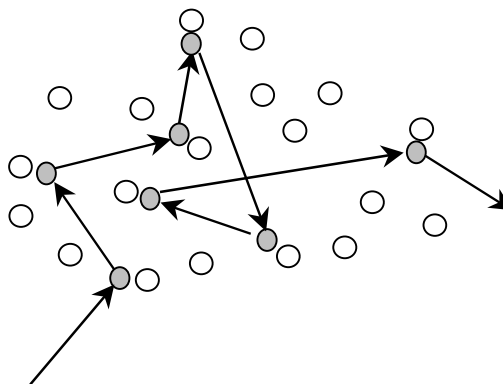


Рис.1.Траектория молекулы

Поэтому важным кинематическим параметром является среднее расстояние, проходимое молекулой между столкновениями, которое называется *средней длиной свободного пробега*. Обозначим ее  $\lambda$ . Можно ожидать, что чем больше плотность газа и чем больше размеры молекул, тем короче средняя длина свободного пробега.

Выясним теперь, почему так происходит на примере идеального газа. Если бы частицы газа представляли материальные точки, они никогда бы не сталкивались друг с другом. Поэтому при рассмотрении столкновений молекул в газе, их представляют в виде твердых шаров некоторого радиуса  $r$ . Столкновения между молекулами происходят всякий раз, когда центры двух молекул окажутся на расстоянии не больше, чем  $2r$  друг от друга. На рис. 2 как раз изображен цилиндр радиусом  $2r$ . Штриховая прямая представляет собой путь, по которому следовала бы одна из молекул, если бы она не испытывала столкновений. Столкновение произойдет, если центр другой молекулы окажется внутри этого цилиндра. Безусловно, как только произойдет столкновение, направление движения частицы изменится и вместе с ним изменится наш воображаемый цилиндр, но для упрощения вычислений мы не будем менять вид цилиндра. Предположим, что данная молекула - одна из многих, движущихся в газе со скоростью  $\bar{V}$ .

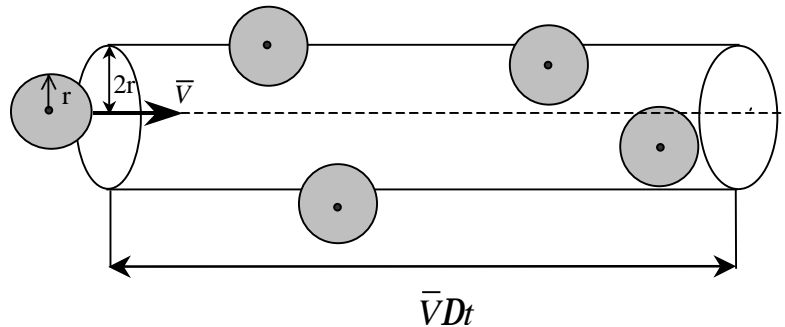


Рис.2. Столкновения частиц

Представим себе на мгновение, что другие молекулы не движутся и, что концентрация молекул равна  $n$ . Тогда число молекул, центры которых лежат внутри цилиндра, определится как концентрация  $n$  умноженная на объем этого цилиндра. Это число будет равно также и числу произошедших столкновений, обозначим его  $z$ . За промежуток времени  $\Delta t$  молекула пройдет расстояние  $\bar{V} \cdot \Delta t$ , в этом случае, объем цилиндра равен  $\pi (2r)^2 \bar{V} \Delta t$ . Таким образом, число столкновений  $z$  за время  $\Delta t$  равно  $n \pi (2r)^2 \bar{V} \Delta t$ . Мы определили *среднюю длину свободного пробега*  $l$ , как среднее расстояние

между столкновениями; это расстояние равно расстоянию, пройденному за время  $\Delta t$ , деленному на число столкновений, произошедших за время  $\Delta t$ :

$$\lambda = \frac{\bar{V} \cdot \Delta t}{n \cdot \pi (2r)^2 \cdot \bar{V} \Delta t} \quad (1)$$

Однако выражение (1) является не совсем точным, поскольку мы предположили, что остальные молекулы неподвижны. В действительности они движутся, и число столкновений за время  $\Delta t$  должно зависеть от *относительной* скорости сталкивающихся молекул, а не от  $\bar{V}$ . Следовательно, число столкновений в секунду равно  $n \pi (2r)^2 \bar{V}_{\text{отн}} \Delta t$ , где  $\bar{V}_{\text{отн}}$  – средняя относительная скорость сталкивающихся молекул. Максвелл, используя функцию распределения молекул по скоростям, показал, что  $\bar{V}_{\text{отн}} = \sqrt{2} \bar{V}$  [1]\*.

Следовательно, средняя длина свободного пробега в уравнении (1) принимает вид:

$$l = \frac{1}{4p r^2 n \sqrt{2}} \quad (2)$$

Как видно, из последнего выражения средняя длина свободного пробега зависит от концентрации молекул газа. Если воспользоваться основным уравнением молекулярно кинетической теории идеального газа и записать  $n = P/kT$ , то из выражения

$$l = \frac{1}{4p r^2 \sqrt{2}} \frac{kT}{P} \quad (3)$$

следует, что при постоянной температуре  $l$  обратно пропорциональна давлению газа:  $l \sim 1/P$ . Это позволяет очень просто оценивать порядки величин свободного пробега для различных давлений. Так, при давлении воздуха 133 Па, она имеет порядок  $10^{-2}$  см, а при 1.33 Па она имеет порядок 1 см.

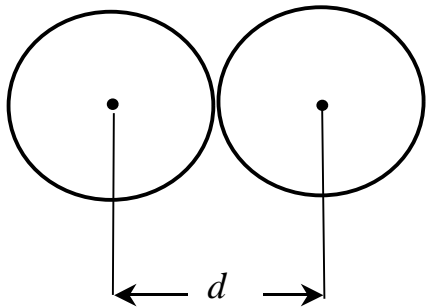


Рис.3. Эффективный диаметр молекулы

Выше мы отмечали, что молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется *эффективным диаметром* молекулы  $d$  (рис. 3.).

Величина  $\sigma = \pi d^2$  также является важной характеристикой при изучении кинематического

\* Доказательство этого выражения приводится в Приложении.

движения частиц и называется *эффективным сечением* молекулы. Тогда выражение (3) может быть представлено в форме  $l = \frac{kT}{s\sqrt{2}P}$ . Откуда

$$s = \frac{kT}{l\sqrt{2}P}. \quad (4)$$

При нормальных условиях  $n \sim 10^{25}$ , средняя длина свободного пробега молекул воздуха равна  $10^{-6}$  м, в то время как диаметр молекул  $N_2$  и  $O_2$  имеет порядок приблизительно  $10^{-10}$  м. Рассматриваются только парные столкновения. Случаи, когда в реальных газах сближаются и начинают взаимодействовать три и больше молекулы, маловероятны и по этой причине не принимаются во внимание. Хотя эффективное сечение  $\sigma$  представлено здесь в геометрическом смысле, оно несколько уменьшается с повышением температуры. Объяснение этому было дано Сезерлендом [2]:  $\sigma = \sigma_0(1 + C/T)$ , где  $C$  – постоянная, называемая постоянной Сезерленда, имеет размерность температуры. Он использовал модель твердых шаров, но учел силы притяжения, с которыми молекулы действуют друг на друга в промежутках между столкновениями. С ростом температуры молекула несколько меньше времени находится в поле влияния другой молекулы и пролетает мимо нее без «захвата», что и приводит к увеличению длины свободного пробега молекул. Поэтому эффективное сечение у одних и тех же частиц для различных процессов может быть различным.

При очень низких плотностях газа (когда состояние газа можно рассматривать как вакуум) понятие средней длины свободного пробега теряет смысл, поскольку молекулы чаще сталкиваются со стенками сосуда, чем между собою. Например, в кубическом сосуде с ребром 20 см, наполненном воздухом под давлением  $133 \cdot 10^{-7}$  Па, длина свободного пробега молекул приблизительно 700 м. Это означает, что происходит значительно больше столкновений молекул со стенками сосуда, чем между собой. Заметим, что число молекул в сосуде при этом составляет  $10^{12}$ . Последнее замечание важно при описании явлений переноса в вакууме, но в данной работе они рассматриваться не будут.

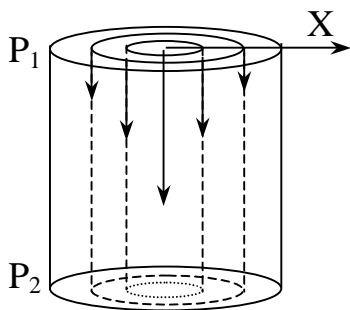


Рис. 4. Механизм возникновения вязкости

Одним из способов определения длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул газа является определение этих характеристик с использованием явления внутреннего трения. Представим себе, что газ протекает



по трубе цилиндрического сечения. Скорости отдельных слоев в потоке различны: с наибольшей скоростью движется слой газа в средней части капилляра, а по мере приближения к стенкам скорость убывает, у самой стенки имеется слой газа с нулевой скоростью, так как молекулы газа абсорбируются поверхностью (прилипают к ней) (рис.4). Таким образом, поперек направления движения наблюдается градиент скорости движущихся слоев газа. Для поддержания движения газа по трубе необходимо создать разность давлений на ее концах. Однако в результате теплового движения молекулы перемещаясь из более быстрого слоя в более медленный и обратно, переносят при этом импульс и при столкновениях друг с другом обмениваются импульсами. В результате скорость направленного движения быстро движущегося слоя уменьшается, а медленно движущегося слоя – увеличивается. На границе раздела слоев возникают силы внутреннего трения. Необходимо помнить, что силы вязкости являются тангенциальными силами, т.е. направлены вдоль поверхности соприкасающихся слоев.

Тогда поток импульса через единицу площади  $\Delta S$  границы раздела двух слоев газа, определяется величиной градиента скорости  $\frac{du}{dx}$ . Согласно

закону Ньютона этот поток импульса  $K$  равен  $K = \frac{f_{mp}}{\Delta S} = -\eta \frac{du}{dx}$ , где  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения или динамической вязкости. Знак «минус» означает, что поток импульса и вектор градиента скорости направлены в противоположные стороны. Величина  $\eta$  определяется соотношением

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{V} \rho, \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега молекул,  $\bar{V}$  – средняя скорость молекул.

Коэффициент внутреннего трения  $\eta$ , как показывает молекулярно – кинетическая теория, в широких пределах от давления не зависит, так как плотность газа пропорциональна давлению, а длина свободного пробега обратно пропорциональна ему. Единицей динамической вязкости в СИ является Па с (Пуаз) т.е. это вязкость такого газа, у которого при площади соприкосновения слоев  $1 \text{ м}^2$  при градиенте скорости  $1 \text{ м/с}$  возникает сила внутреннего трения, равная  $1 \text{ Н}$  ( $1 \text{ Пз} = 0,1 \text{ Н с/м}^2$ ).

При увеличении скорости или поперечных размеров потока характер течения существенным образом изменяется – возникает энергичное перемешивание жидкости. Такое течение называется турбулентным. Ламинарным или турбулентным является движение жидкости или газа в



зависимости от того, насколько значительную роль играют силы трения. Английский ученый Рейнольдс установил критерий (число Рейнольдса  $Re$ ), по которому ламинарное течение переходит в турбулентное. Число  $Re$  характеризует относительную роль сил вязкости, т.к. оно характеризует отношение кинетической энергии движения элемента жидкости к потере ее, обусловленной работой сил вязкости. Таким образом, число Рейнольдса определяет относительную роль инерции и вязкости жидкости при течении. Чем меньше число Рейнольдса, тем большую роль играют силы вязкости в движении жидкости или газа. При значениях числа  $Re < 1000$  – течение, как правило, носит ламинарный характер. При бóльших значениях числа Рейнольдса течение приобретает турбулентный характер, заметим, что турбулентность в гладких трубах наступает при значении  $Re_{кр} \sim 1160$ .

Итак, в данной задаче требуется определить газокинетические характеристики молекул воздуха: длину свободного пробега и эффективный диаметр по коэффициенту внутреннего трения в газах. При ламинарном течении газа по капилляру (т.е. течении, при котором различные слои газа текут хотя и с разными скоростями, но параллельно друг другу) справедлива формула Пуазейля [3]. Объем газа, протекающего при стационарном течении через капилляр за время  $t$ :

$$V = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta P t, \quad (6)$$

где  $r$  - радиус капилляра,  $l$  - его длина,  $\Delta P$  - разность давлений на концах капилляра. Откуда следует выражение для коэффициента вязкости:

$$\eta = \frac{\pi r^4}{8lV} \Delta P t, \quad (7)$$

Исходя из выражения (5), можно определить среднее значение длины свободного пробега, т.е.

$$\lambda = \frac{3\eta}{\rho} \sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{P\mu}{RT}, \quad (8)$$

где  $P$  - давление воздуха в помещении, определяемое по барометру,  $T$  - температура воздуха в градусах Кельвина.

Из выражения (4) можно найти эффективное сечение, а затем и эффективный диаметр молекул воздуха.

## ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Лабораторная установка, представленная на рис.5, состоит из сосуда с краном 1, в верхней части которого находится пробка. В пробку вставляется капилляр 5, через который протекает газ. В данной работе изучаются газокинетические параметры воздуха, который протекает именно через этот капилляр. Разность давлений на концах капилляра измеряется водяным манометром 2.

Если открыть кран 4, то вследствие избыточного давления столба жидкости над краном  $\rho gh$  вода начнет вытекать из него непрерывной струей, при этом давление воздуха в сосуде понижается. Вскоре вода начнет вытекать каплями, что означает, что давление

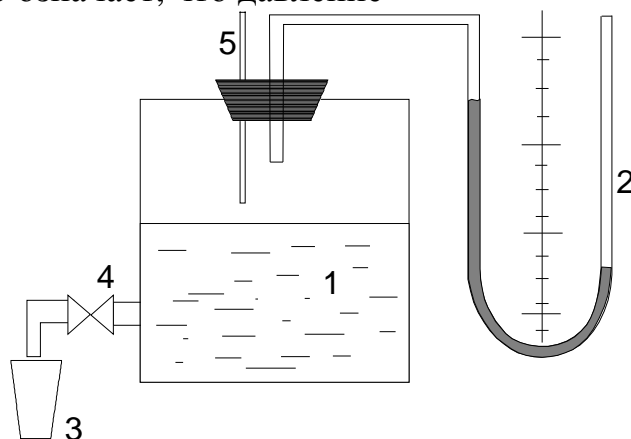


Рис. 5. Схема лабораторной

столба жидкости и воздуха в сосуде стало меньше атмосферного давления. Однако отрыв капли все же будет соответствовать моменту, когда давление столба жидкости и воздуха над ним на величину  $\Delta P$  станет больше атмосферного. Со временем этот процесс станет стационарным. Разность уровней жидкости в коленах манометра перестанет расти, что говорит о том, что на концах капилляра устанавливается постоянная разность давлений  $\Delta P$ . Эта разность давлений соответствует выражению (7). Скорость вытекания жидкости из сосуда лимитируется скоростью натекания воздуха через капилляр. Зная параметры капилляра, и экспериментально определив скорость вытекания воды, можно рассчитать газокинетические параметры воздуха по формулам (4, 6, 7, 8).

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Подставив измерительный стакан 5 (рис.5), открыть кран 4 и дождаться, когда установится стационарный процесс (вода начнет вытекать каплями). В этот момент оценить разность уровней жидкости в коленях манометра  $\Delta h$ . Рассчитать разность давлений на концах капилляра по разности уровней жидкости в манометре:  $\Delta P = \rho_l g h$ , где  $\rho_l$  - плотность воды при температуре опыта.
2. Подставить другой пустой мерный стаканчик под кран (масса которого предварительно определена) засечь время  $t$ , за которое объем жидкости составит примерно  $50 \text{ см}^3$ . Для точного определения объема жидкость рекомендуется взвесить. Температуру воздуха, атмосферное давление, плотность воды и воздуха при условиях эксперимента внести в таблицу 1.

**Таблица 1**

Параметры установки и условия проведения опыта

г, мм	l, мм	T, К	P, кг/м <sup>3</sup>	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup> (вода)	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup> (воздух)

3. Рассчитать значения  $h$ ,  $l$ ,  $s$  по формулам (7, 8, 4). Опыт повторить три раза. Вычислить погрешности измерений при доверительной вероятности  $\alpha = 0.95$ .
4. Вычислить скорость  $U_{\text{ср}}$ . скорость потока (среднюю по сечению капилляра):

$$U_{\text{ср}} = (V/t) \pi r^2,$$

где  $r$  - радиус капилляра,  $V$ -объем воздуха, прошедшего через капилляр, равный объему воды, вытекшей за время  $t$ .

5. Рассчитать число Рейнольдса по формуле:

$$Re = \rho U_{\text{ср}} r / \eta,$$

где  $\rho$  - плотность воздуха в условиях опыта. Убедиться, что эксперимент проходил при ламинарном течении.

6. Записать окончательные результаты измеряемых величин  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$ . Оценить величины погрешностей измерения при  $\alpha = 0.95$ .

**Таблица 2**

Экспериментальные результаты

№	$\Delta h$ , мм	V, мл	$\Delta P$ , Па	T, с	$U_{\text{ср}}$ , мл/с	$\eta$ , Па с	$\lambda$ , м	$\sigma$ , м <sup>2</sup>

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение понятия «средняя длина свободного пробега» молекул. Получите математическое выражение длины свободного пробега молекул газа. Как зависит эта величина от давления и температуры газа?
2. Что понимается под эффективным сечением молекул газа. Зависит ли эта величина от температуры газа?
3. Чему равна средняя относительная скорость молекул газа? Дайте математический вывод этого соотношения.
4. В чем суть явления внутреннего трения в газах. Запишите закон Ньютона.
5. Как определяется величина коэффициента вязкости, в каких единицах он измеряется?
6. Запишите формулу Пуазейля и поясните ее смысл.
7. Что характеризует число Рейнольдса?
8. В чем суть экспериментального метода определения средней длины свободного пробега молекул газа?
9. Объясните условие отрыва капель от крана. Какую роль при этом играет уровень воды в сосуде?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. -М.: Высшая школа, 1987.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. -М.: Наука, 1990. Т. 2,
3. Хайкин Э.С. Физические основы механики. -М.: Наука, 1971.
4. Основы физики. Курс общей физики. Квантовая и статистическая физика / Под. ред. Ю.М. Ципенюка. -М.: Физ.-мат. лит., 2001. Т.2.

### Вычисление относительной скорости

Фактически в газе все молекулы движутся с различными скоростями, причем скорости молекул подчиняются распределению Максвелла. Для того, чтобы учесть этот факт, оценим величину  $\bar{V}_{отн}$  относительной скорости двух молекул, движущихся со скоростями  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$ . Эту задачу удобнее решать в системе центра масс.

Обозначим  $m_1$  и  $m_2$  массы молекул первого и второго сорта газа,  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  – радиусы-векторы первой и второй молекул.  $\mathbf{r}$  – расстояние между молекулами,  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор центра масс (рис. 1).

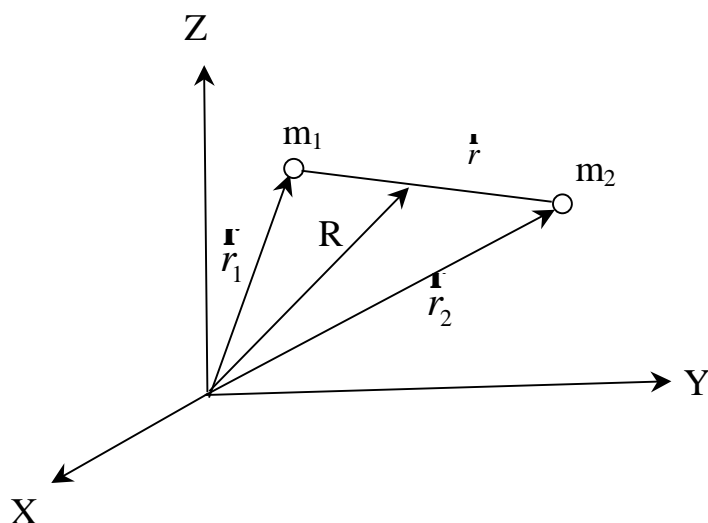


Рис. 1. Система координат

Тогда в выбранной системе координат

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (1)$$

Дифференцируя эти равенства, получим

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{V}_{отн}, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{V}_{отн}, \quad (2)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{V}}$  - скорость центра масс системы двух частиц,  $\dot{\mathbf{V}}_{отн}$  – относительная скорость этих молекул. Как видно из выражения (2), преобразование

линейное и Якобиан преобразования  $\frac{\partial(\dot{\mathbf{V}}_1, \dot{\mathbf{V}}_2)}{\partial(\dot{\mathbf{V}}, \dot{\mathbf{V}}_{отн})} = 1$  (доказать), следовательно

$$d\dot{\mathbf{V}}_1 d\dot{\mathbf{V}}_2 = d\dot{\mathbf{V}} d\dot{\mathbf{V}}_{отн} . \quad (3)$$

С учетом теоремы умножения вероятности независимых событий, функция распределения молекул по скоростям есть произведение функций Максвелла

$$f = f_1 f_2 = \left( \frac{m_1}{2pkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_1 V_1^2}{2kT}} \left( \frac{m_2}{2pkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_2 V_2^2}{2kT}} . \quad (4)$$

Соответственно в новых координатах (2) показатель степени запишется:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{M V^2}{2} + \frac{m V_{отн}^2}{2}, \text{ где } M = m_1 + m_2 \text{ – масса системы;}$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ – приведенная масса}$$

$$f(V, V_{отн}) = \left( \frac{M}{2pkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{M V^2}{2kT}} \left( \frac{m}{2pkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m V_{отн}^2}{2kT}} .$$

Таким образом, вероятность того, что система двух частиц имеет скорость в «объеме» пространства скоростей  $d^3\dot{\mathbf{V}}$  и  $d^3\dot{\mathbf{V}}_{отн}$  равна

$$f(V, V_{отн}) d^3\dot{\mathbf{V}} d^3\dot{\mathbf{V}}_{отн} = \left( \frac{M}{2pkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{M V^2}{2kT}} d^3\dot{\mathbf{V}} \left( \frac{m}{2pkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m V_{отн}^2}{2kT}} d^3\dot{\mathbf{V}}_{отн} .$$

Очевидно, что

$$\left( \frac{M}{2pkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{M V^2}{2kT}} d^3\dot{\mathbf{V}} \text{ - вероятность для скорости всей системы, а}$$

$$\left( \frac{m}{2pkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m V_{отн}^2}{2kT}} d^3\dot{\mathbf{V}}_{отн} \text{ - вероятность для относительной скорости молекул.}$$

Тогда искомая средняя относительная скорость равна

$$\bar{V}_{отн} = \int V_{отн} \left( \frac{m}{2pkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mV_{отн}^2}{2kT}} d^3V_{отн} = 4p \left( \frac{m}{2pkT} \right)^{3/2} \int_0^\infty V^3 e^{-\frac{mV^2}{2kT}} dV = \sqrt{\frac{8kT}{pm}} .$$

В случае молекул с одинаковыми массами  $m_1 = m_2$  и  $m = \frac{m_1}{2}$ , поэтому

$$\bar{V}_{отн} = \sqrt{\frac{16kT}{pm_1}} = \sqrt{2}\bar{V}_1 .$$

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-6

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ

#### Цель работы

Изучить явление внутреннего трения в жидкостях.

#### Задача работы

Определить коэффициенты внутреннего трения жидкостей методами вискозиметрии и Стокса.

#### ТЕОРИЯ

Для наиболее общей характеристики свойств тел пользуются понятием *агрегатных состояний* – газообразного, жидкого и твердого.

Благодаря большой разреженности вещества в газообразном состоянии его молекулы находятся сравнительно далеко друг от друга: на расстояниях, больших по сравнению с их собственными размерами. В газах молекулы не связаны между собой стационарными, устойчивыми связями. Молекулы постоянно изменяют относительные взаимные положения. Поэтому взаимодействие между молекулами газа играет второстепенную роль; большую часть времени молекулы движутся как свободные, лишь сравнительно редко испытывая столкновения друг с другом.

В жидкостях же молекулы сближены на расстояния, сравнимые с их собственными размерами, они плотно заполняют занимаемое жидкостью пространство и сравнительно медленно меняют взаимное положение. В течение сравнительно продолжительных промежутков времени группы молекул могут образовывать агрегаты молекул. Эти агрегаты молекул по своим свойствам напоминают твердое тело, т.е. молекулы жидкостей находятся в сильном постоянном взаимодействии.

В обычных условиях жидкости и газы настолько отличаются друг от друга по своей плотности, что различить их не представляет никакой трудности. Тем не менее, различие между этими двумя состояниями вещества в действительности не принципиальное, а лишь количественное – в количественной величине плотности и связанной с этим разнице в интенсивности взаимодействия молекул. Отсутствие принципиального отличия между ними в особенности ясно проявляется в том, что переход между состояниями, которые мы называем жидким и газообразным, может



быть, в принципе, произведен вполне непрерывным образом, так что мы ни в какой момент не смогли бы указать, где кончилось одно состояние и началось другое.

Количественный характер имеет также и различие между жидкостями и так называемыми *аморфными* (не кристаллическими) *твердыми телами*; к последним относятся стекло, различные смолы (например, канифоль) и т.п. и здесь отсутствие принципиальной разницы ясно проявляется в возможности непрерывного перехода из одного состояния в другое. В этом случае такой переход осуществляется путем простого нагревания. Так, твердое стекло при нагревании постепенно размягчается, становясь, в конце концов, вполне жидким; этот процесс совершенно непрерывен и в нем не существует никакого определенного «момента перехода». По своей плотности аморфное тело отличается от получающейся из него жидкости лишь незначительно. Основным количественным различием между ними является разница по величине их вязкости, т. е. в их «текучести».

Общим свойством газов, жидкостей и аморфных твердых тел является беспорядочность распределения молекул в них. Эта беспорядочность обуславливает собой изотропию этих тел – одинаковость этих свойств по всем направлениям. Свойство изотропии принципиально отличает эти тела от анизотропных *кристаллических твердых тел*, в которых атомы расположены строго упорядоченным образом.

Таким образом, из трех обычных состояний вещества (твердое, жидкое, газообразное) жидкости по своей структуре и межмолекулярным силам имеют как свойства газа, так и свойства твердых тел. Они занимают промежуточное положение.

В жидкостях, как и в газах, наблюдаются явления диффузии, теплопроводности и вязкости. Однако механизм этих процессов в жидкостях иной, чем в газах. Явления переноса в газах определяются длиной свободного пробега молекул. Поэтому выражения для всех коэффициентов переноса содержат в качестве множителя длину свободного пробега молекул. В жидкостях, как и в очень плотных газах, понятие длины свободного пробега теряет смысл, так как среднее расстояние между молекулами сравнимо с размерами самих молекул. Молекулы жидкости могут лишь совершать малые колебания в пределах, ограниченных молекулярными расстояниями. Однако время от времени колеблющаяся молекула может получить от соседних молекул избыточную энергию, достаточную для того, чтобы совершить скачок на некоторое расстояние. Такие колебания, сменяющиеся скачками, представляют тепловое движение молекул жидкости. Ежесекундно молекула жидкости успевает переменить место

около  $10^8$  раз, совершив между двумя последовательными переходами  $10^3 \div 10^5$  колебаний.

Рассматривая протекающие в газах процессы, мы использовали понятие идеального газа. Идеальная жидкость, т.е. жидкость без трения, является абстракцией. Всем реальным жидкостям и газам в большей или меньшей степени присуща вязкость или внутреннее трение. Вязкость проявляется в том, что возникшее в жидкости или газе движение после прекращения действия причин, его вызвавших, постепенно прекращается.

Состояние движения жидкости можно определить, указав для каждой точки пространства вектор скорости  $\dot{\mathbf{u}}$  как функцию времени. Величина и направление вектора  $\dot{\mathbf{u}}$  в каждой точке могут меняться со временем. Если вектор скорости в каждой точке пространства остается постоянным, то течение называется установившимся или стационарным. При стационарном течении любая частица жидкости проходит данную точку пространства с одним и тем же значением  $\dot{\mathbf{u}}$ .

Наблюдается два вида течения жидкости (или газа). Если жидкость как бы разделена на слои, которые скользят друг относительно друга, не перемешиваясь, то течение называется ламинарным. Если в такой поток ввести подкрашенную струйку, то она сохранится, не размываясь по всей длине потока, так как в ламинарном потоке частицы жидкости не переходят из одного слоя в другой. Ламинарное течение стационарно.

При увеличении скорости потока может наблюдаться перемешивание слоев жидкости. Такое движение называется турбулентным. При турбулентном течении скорость частиц в каждом данном месте все время изменяется беспорядочным образом – течение нестационарное. Если в турбулентный поток ввести окрашенную струйку, то уже на небольшом расстоянии от места ее введения окрашенная жидкость равномерно распределится по всему сечению потока.

Для выяснения закономерностей, которым подчиняются силы внутреннего трения, рассмотрим следующий опыт. Погрузим в жидкость две параллельные друг другу пластины (рис. 1). Пусть линейные размеры пластин значительно превосходят расстояние между пластинами ( $d$ ). Нижнюю пластину закрепим на месте. Верхнюю пластину приведем в движение с некоторой скоростью  $u_0$  относительно нижней. Для перемещения верхней пластины с постоянной скоростью  $u_0$  необходимо действовать на неё с вполне определенной, постоянной по величине силой  $f$ . Поскольку верхняя пластина движется равномерно со скоростью  $u_0$ , без ускорения, действие этой силы уравнивается равной ей по величине

противоположно направленной силой, которая, очевидно, есть сила трения, действующая на пластину при её движении в жидкости. Обозначим ее  $f_{mp}$ .

Варьируя скорость пластины  $u_0$ , площадь пластин  $S$  и расстояние между ними  $d$ , можно получить, что

$$f_{mp} = -h \frac{u_0}{d} S, \quad (1)$$

где  $h$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от природы и состояния (например, температуры) жидкости и называемый *коэффициентом внутреннего трения* или *коэффициентом вязкости*, или просто вязкостью жидкости (газа).

Нижняя пластина при движении верхней также оказывается подверженной действию силы  $f'_{mp}$ , равной по величине  $f_{mp}$ . Для того чтобы нижняя пластина оставалась неподвижной, силу  $f'_{mp}$  необходимо уравновесить с помощью силы  $f'$ .

Таким образом, при движении двух погруженных в жидкость пластин друг относительно друга между ними возникает взаимодействие, характеризуемое силой (1). Воздействие пластин друг на друга осуществляется, очевидно, через жидкость, заключенную между пластинами, передаваясь от одного слоя жидкости к другому. Если в любом месте зазора провести мысленно плоскость, параллельную пластинам (см. пунктирную линию на рис. 1), то можно утверждать, что часть жидкости, лежащая над этой плоскостью, действует на часть жидкости, лежащую под плоскостью, с силой  $f_{mp}$ , причем величина  $f_{mp}$  и  $f'_{mp}$  определяется формулой (1). Таким образом, формула (1) определяет не только силу трения, действующую на пластины, но и силу трения между соприкасающимися частями жидкости.

Если исследовать скорость частиц жидкости в разных слоях, то оказывается, что она изменяется в направлении  $z$ , перпендикулярном к пластинам (рис. 1), по линейному закону

$$u(z) = \frac{u_0}{d} z. \quad (2)$$

Частицы жидкости, непосредственно соприкасающиеся с пластинами, как бы прилипают к ним и имеют такую же скорость, как и сами пластины. Согласно формуле (2)

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_0}{d}. \quad (3)$$

Используя равенство (3), формуле (1) для силы внутреннего трения можно придать вид

$$f_{mp} = -h \frac{du}{dz} S. \quad (4)$$

Величина  $\frac{du}{dz}$  показывает, как быстро изменяется скорость в направлении оси  $z$ , и называется градиентом скорости (точнее, это – модуль градиента скорости; сам градиент – вектор).

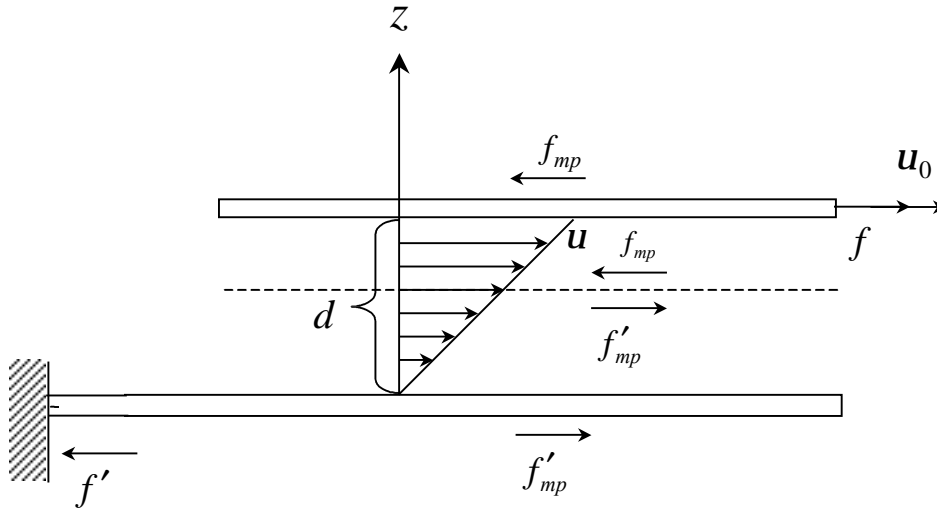


Рис.1. Градиент скорости течения жидкости

Формула (4) была нами получена для случая, когда скорость изменяется по линейному закону (в этом случае градиент скорости является постоянным). Оказывается, что эта формула остается справедливой и для любого другого закона изменения скорости при переходе от слоя к слою. В этом случае для определения силы трения между двумя граничащими друг с другом слоями нужно брать значение градиента  $\frac{du}{dz}$  в том месте, где проходит воображаемая поверхность раздела слоев. Так, например, при движении жидкости в круглой трубе скорость равна нулю у стенок трубы, максимальна на оси трубы и, как можно показать, при не слишком больших скоростях течения изменяется вдоль любого радиуса по закону

$$u = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (5)$$

где  $R$  - радиус трубы,  $u_0$  - скорость на оси трубы,  $u$  - скорость на расстоянии  $r$  от оси трубы (рис. 2). Проведем в жидкости мысленно цилиндрическую поверхность радиуса  $r$ . Части жидкости, лежащие по разные стороны от

этой поверхности, действуют друг на друга, с силой, величина которой в расчете на единицу поверхности равна

$$f = -h \frac{du}{dr} = -h \frac{2u_0 r}{R^2}, \quad (6)$$

т.е. возрастает пропорционально расстоянию поверхности раздела от оси трубы.

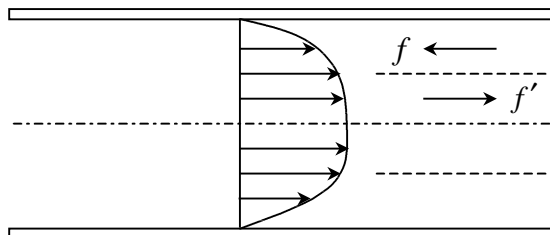


Рис. 2. Рис.1. Градиент скорости течения жидкости в трубе

Коэффициент пропорциональности  $h$  (эта) характеризует вязкость жидкости и называется коэффициентом динамической вязкости или просто вязкостью жидкости.

Из формулы (4) следует, что  $h$ - коэффициент динамической вязкости – будет численно равен силе внутреннего трения, возникающей на каждой единице поверхности соприкосновения двух слоев, движущихся один относительно другого с градиентом скорости, равным единице.

Единицей вязкости СИ является такая вязкость, при которой градиент скорости, равный  $1\text{ м/с}$  на  $1\text{ м}$ , приводит к возникновению силы внутреннего трения в  $1\text{ н}$  на  $1\text{ м}^2$  поверхности касания слоев. Эта единица обозначается  $\frac{\text{н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$

или *Па·с*. (в системе СГС коэффициент вязкости измеряется в Пуазах по имени французского ученого Пуазейля,  $1\text{ Пз} = 0,1\text{ Н с/м}^2$ ).

Динамическая вязкость жидкостей существенно зависит от температуры: с понижением температуры она увеличивается. Однако П.Л. Капицей было открыто, что жидкий гелий при температуре, близкой к абсолютному нулю (около  $-273\text{ }^{\circ}\text{С}$ ), переходит в особое состояние сверхтекучести, при котором вязкость резко падает, и становится меньше  $10^{-13}\text{ Па} \cdot \text{с}$ , т. е. практически равна нулю. Это значит, что жидкий гелий может свободно протекать через самые тонкие капилляры, щели и отверстия, непроницаемые даже для газа.

Динамическая вязкость обычно не очень вязких жидкостей имеет порядок  $10^{-3}\text{ Па} \cdot \text{с}$ , у вязких жидкостей она возрастает в тысячи раз. Например, динамическая вязкость воды при  $20^{\circ}\text{С}$  равна  $1,002 \cdot 10^{-3}\text{ Па} \cdot \text{с}$ , бензина –  $0,648 \cdot 10^{-3}\text{ Па} \cdot \text{с}$ , спирта  $1,2 \cdot 10^{-3}\text{ Па} \cdot \text{с}$ , глицерина  $1480 \cdot 10^{-3}\text{ Па} \cdot \text{с}$ .

Напомним, что вязкость газов при этой температуре и атмосферном давлении имеет порядок  $10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

Если ввести понятие касательного напряжения ( $s$ )

$$s = \frac{F}{S}, \quad (7)$$

то выражение (4) примет вид

$$s = -h \frac{du}{dz}. \quad (8)$$

Преобразуем уравнение (8):

$$s = -h \frac{du}{dz} = h \frac{d}{dz} \left( -\frac{dx}{dt} \right) = h \frac{d}{dt} \left( -\frac{dx}{dz} \right).$$

Из рис. 1 видно, что  $-\frac{dx}{dz} = g$ , откуда

$$\frac{s}{h} = \frac{dg}{dt}. \quad (9)$$

Таким образом, скорость сдвига пропорциональна касательному напряжению и обратно пропорциональна коэффициенту вязкости жидкости.

Для многих жидкостей коэффициент вязкости  $h$  зависит только от температуры и давления. Эти жидкости называются ньютоновскими. Уравнение (9), устанавливающее связь между напряжением и скоростью сдвига, называется реологическим уравнением. График зависимости между скоростью сдвига и напряжением называется реологической кривой (рис.3).

Для ньютоновских жидкостей реологическая кривая имеет вид прямой, проходящей через начало координат. Тангенс угла наклона ее равен коэффициенту вязкости жидкости (рис. 3, кривая 1). Жидкости, для которых реологическая кривая не является прямой линией, проходящей через начало координат (рис. 3, кривые 2, 3), не являются ньютоновскими.

Вязкость ньютоновских жидкостей при постоянной температуре и давлении не остается постоянной, а зависит от скорости сдвига, от времени действия напряжения.

Кроме динамической вязкости каждая жидкость может быть охарактеризована величиной кинематической вязкости. Отношение динамической вязкости  $h$  к плотности жидкости  $r$  называется коэффициентом кинематической вязкости  $n = \frac{h}{r}$ . Коэффициент

кинематической вязкости измеряется в  $\frac{\text{м}}{\text{с}}$  или в Стоксах –  $1 \text{ Ст} = 10^{-4} \text{ м/с}$ .

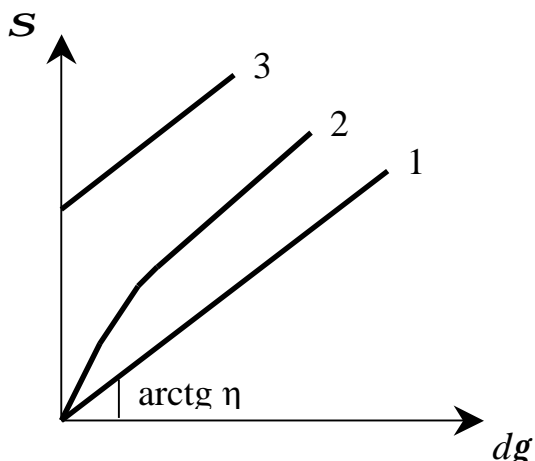


Рис. 3. Реологические кривые

Внутреннее трение является причиной того, что при протекании жидкости или газа через трубу требуется некоторая разность давлений. Эта разность давлений должна быть тем больше, чем больше коэффициент внутреннего трения.

Зависимость между объемом  $V$  жидкости (или газа), протекающей в единицу времени через сечение трубы, и разностью давлений  $\Delta P$  на концах трубы устанавливается известной формулой Пуазейля:

$$V = \frac{pR^4 \Delta P}{8hl} t, \quad (10)$$

где  $l$  - длина трубы,  $R$  - ее радиус. Пользуясь этой формулой, можно, измерив объем жидкости  $V$ , протекающей через трубу за время  $\Delta t$  и разность давлений на ее концах, определить коэффициент вязкости жидкости.

Рассмотрим некоторые экспериментальные методы определения коэффициента внутреннего трения жидкостей.

### МЕТОД ВИСКОЗИМЕТРИИ

Как уже отмечалось, коэффициент вязкости жидкости можно определить, если измерить течение газа через трубу известных геометрических размеров, пользуясь формулой Пуазейля (10). Для такого опыта необходима труба, в которой течение жидкости будет ламинарным. При определенном значении скорости в жидкости начинают появляться вихри, что вызвано появлением составляющих скорости, перпендикулярных к оси трубы (для вихревого или *турбулентного* течения формула Пуазейля не справедлива). Одним из методов определения измерения коэффициента вязкости, основанным на использовании формулы Пуазейля, является метод капиллярного вискозиметра.

### ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Формулой (9) удобно пользоваться для относительного определения коэффициента вязкости. Пусть через один и тот же капилляр протекают



одинаковые объемы двух различных жидкостей ( $V_1 = V_2$ ). Тогда объемы первой и второй жидкостей, как следует из формулы Пуазейля, будут равны:

$$V_1 = \frac{\rho R^4 t_1 \Delta p}{8 h_1 l}; \quad (11)$$

$$V_2 = \frac{\rho R^4 t_2 \Delta p}{8 h_2 l}. \quad (12)$$

Поделив уравнение (11) на (12), получим

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{t_1 \Delta p_1}{t_2 \Delta p_2}. \quad (13)$$

Если жидкость вытекает под действием силы тяжести, то разность давлений равна гидростатическому давлению, т. е.

$$\Delta p_1 = r_1 g h, \quad \Delta p_2 = r_2 g h, \quad (14)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – плотность жидкости при температуре опыта. Подставляя (14) в (13), получим

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1 t_1}{r_2 t_2}; \quad h_1 = h_2 \frac{r_1 t_1}{r_2 t_2}. \quad (15)$$

## ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Вискозиметр, исследуемые жидкости, секундомер.

### ОПИСАНИЕ ВИСКОЗИМЕТРА.

Капиллярный вискозиметр (рис. 4) представляет собой U-образную

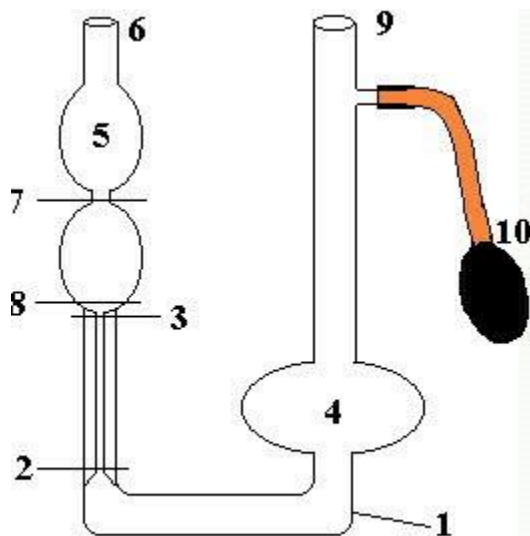


Рис. 4. Капиллярный вискозиметр



трубку, укрепленную вертикально. Участок трубы 2-3 выполнен в виде узкого канала; правое колено содержит шарообразное расширение 4; левое колено содержит двойное расширение 5, переходящее в верхней части в трубку 6. Метки 7-8 около верхнего расширения ограничивают определенный объем жидкости. Жидкость наливается в колено до заполнения почти всего шарообразного расширения 4. На трубку надета груша 10, при помощи которой жидкость засасывается в резервуар 5 выше метки 7.

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Вискозиметр промывают испытуемой жидкостью. Укрепляют его в штативе и наливают испытуемую жидкость в колено 9 до метки 8.

Осторожно с помощью резиновой груши всасывают жидкость выше метки 7 в резервуар 5.

Определяют время истечения жидкости  $t_1$  (в момент, когда мениск проходит через метку 7, включают секундомер, а при прохождении мениска через метку 8 секундомер выключают). Время истечения жидкости измеряется 5 раз. Аналогичные опыты проделывают с водой. Время истечения воды  $t_2$ . Значения  $r_1, r_2, h_2$  берутся из справочников. Результаты расчетов по формуле (15) и экспериментальные измерения заносят в таблицу 1

Таблица 1

$r_1, \frac{кг}{м^3}$	$r_2, \frac{кг}{м^3}$	$h_1, Па \cdot с$	$t, ^\circ C$	$t_1, с$	$t_2, с$	$h_2, Па \cdot с$	$\Delta h_2, Па \cdot с$
-----------------------	-----------------------	-------------------	---------------	----------	----------	-------------------	--------------------------

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ГЛИЦЕРИНА ПО МЕТОДУ СТОКСА. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

На твердый шарик, падающий в жидкости, действуют три силы: сила тяжести, сила Архимеда и сила трения шарика о жидкость. Эти силы равны соответственно  $mg, rgh, 6\pi rhu_0$ .

Обозначим скорость шарика относительно жидкости через  $u_0$ . Молекулы жидкости в слое, прилегающем к шарика, движутся со скоростью  $u_0$ . Распределение жидкостей в соседних слоях, увлекаемых силами

внутреннего трения, должно иметь вид, изображенный на рис. 5. В непосредственной близости от поверхности шара эта скорость равна  $u_0$ , а по мере удаления уменьшается и практически становится равной нулю на некотором расстоянии  $L$  от поверхности шарика. Очевидно, что чем больше радиус шара, тем большая масса жидкости вовлекается в движение, и  $L$  должно быть пропорционально  $r$ :

$$L = kr. \quad (16)$$

Величина коэффициента пропорциональности несколько различна для передней и задней частей тела, поэтому под градиентом скорости следует понимать среднее значение градиента скорости на поверхности шара

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_0 - u}{L} = \frac{u_0}{kr}. \quad (17)$$

Полная сила трения, испытываемая движущимся шариком

$$F_{mp} = -h \frac{\Delta u}{\Delta x} S = -h \frac{u_0}{kr} \cdot 4\pi r^2 = -4 \frac{p}{k} h r u_0, \quad (18)$$

где  $S = 4\pi r^2$ .

Согласно Стоксу, величина  $k$  для шара равна  $\frac{2}{3}$ . Следовательно,

$$F_{mp} = -6\pi r h u_0, \quad (19)$$

т. е. сила трения прямо пропорциональна вязкости жидкости, радиусу шара и скорости его движения. Выражение (19) носит название закона Стокса:

$$m \frac{du}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1 g - 6\pi r h u_0. \quad (20)$$

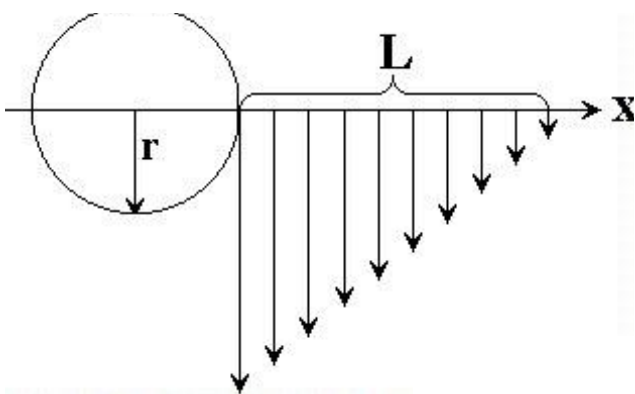


Рис. 5. Поле сил

В случае падения шарика в жидкости, все три силы будут направлены по вертикали. Если шарик движется равномерно, то такое движение шарика называется установившимся. Физически это означает, что сила трения и сила Архимеда уравниваются силой тяжести, т. е. движение происходит по инерции с постоянной скоростью. Тогда уравнение (18) можно переписать:

$$6\pi hr u_0 = \frac{4}{3} \pi r^3 g (r - r_1). \quad (21)$$

Последнее выражение позволяет определить коэффициент внутреннего трения в жидкости, в которой движется шарик. Так как жидкость всегда находится в каком-то сосуде, имеющем стенки, то учет наличия стенок несколько изменит выражение для коэффициента вязкости. Для жидкости, находящейся в цилиндре с радиусом  $R$ , коэффициент вязкости равен:

$$h = \frac{2}{9} g r^2 \frac{r - r_1}{u_0 (1 + 2,4 r/R)}. \quad (22)$$

### ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Стеклянный цилиндр с исследуемой жидкостью плотностью  $r_1$ , микрометр, штангенциркуль, секундомер, шарики из материала, плотность которого  $r$ .

### ОПИСАНИЕ ПРИБОРА

Прибор состоит из стеклянного цилиндра, наполненного исследуемой жидкостью и имеющего две горизонтальные метки, расположенные на расстоянии  $L$  друг от друга. Верхняя метка должна быть ниже уровня жидкости на 5-8 см (рис. 6).

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Для определения коэффициента внутреннего трения используются шарики, диаметр которых определяется микрометром.

Желательно расположить прибор так, чтобы глаз наблюдателя находился на уровне верхней метки. При опускании шарика в жидкость необходимо учесть, что: 1) траектория его движения должна проходить как можно ближе к оси цилиндра, 2) движение шарика в жидкости должно

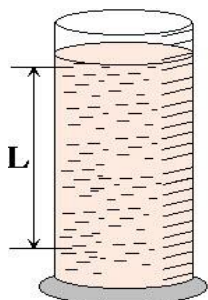


Рис. 6. Стеклянный цилиндр

начинаться с нулевой начальной скоростью. Прежде чем включать секундомер, необходимо выждать установления равномерной скорости движения шарика. В момент прохождения шарика мимо верхней метки включают секундомер; в момент прохождения шарика через нижнюю метку – выключают. Считая движение шарика между метками равномерным,

получают скорость его движения  $u = \frac{L}{t}$ . Внутренний радиус цилиндрического сосуда  $R$  определяют штангенциркулем, опыт с разными шариками повторяют 10 раз.

Измерение диаметра шариков нужно производить непосредственно перед опусканием каждого из них в жидкость, во избежание несоответствия в результатах скорости шариков их диаметрам.

Примечание. Во время опыта цилиндр с исследуемой жидкостью должен быть хорошо освещен, но лампу не следует ставить близко к сосуду во избежание нагрева исследуемой жидкости.

Результаты экспериментальных измерений и расчетов по формуле (22) занести в таблицу 2:

Таблица 2

$\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\rho_1, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$g, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$R, \text{м}$	$r, \text{м}$	$L, \text{м}$	$t, \text{с}$	$h, \text{Па} \cdot \text{с}$
--------------------------------------	--	----------------------------------	---------------	---------------	---------------	---------------	-------------------------------

Оценить погрешность эксперимента.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключается явление внутреннего трения в жидкости?
2. Что понимается под коэффициентами кинематической и динамической вязкости жидкостей?
3. Как изменяется коэффициент вязкости от температуры?
4. Какое движение жидкости называется ламинарным?
5. Какие силы действуют на шарик, движущийся в жидкости?
6. Какая кривая называется реологической, каков ее смысл?
7. Какие жидкости называются ньютоновскими?
8. Преобразовав путем разделения переменных и интегрированием формулу 3, проанализировать зависимость скорости слоев жидкости от координаты  $z$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кикоин А. К., Кикоин И. К. Молекулярная физика. -М.: 1976.
2. Матвеев А. А. Молекулярная физика. -М.: 1982.
3. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. -М.: Наука, 1976.

4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.2. Термодинамика и молекулярная физика. -М.: Наука, 1990.
5. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. -М.: Высшая школа, 1987.
6. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Яковлев И.А.. Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика / Под редакцией Сивухина Д.В. -М.: Наука, 1988.
7. Булкин П.С., Попова И.И. Общий физический практикум. Молекулярная физика / Под редакцией Матвеева А.Н. и Киселева Д.Ф. -М.: Изд-во Моск. Ун-т. 1988.
8. Савельев И.В. Курс общей физики. -М.: Наука, 1986. Т.1.
9. Трофимова Т.И. Курс физики. -М.: Высшая школа, 2001.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-7

## ИЗУЧЕНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ПЕРВОГО РОДА

### Цель работы

Изучение явления фазового перехода первого рода.

### Задача работы

Определение температуры и удельной теплоты плавления металлов, оценить приращение энтропии в ходе фазового перехода.

## ТЕОРИЯ

Испарение жидкости или плавление твердого тела относится к категории процессов, которые называются в физике фазовыми переходами или превращениями. Состояния вещества, между которыми происходит фазовый переход, называются его фазами. Характерной особенностью этих переходов является их скачкообразность. Например, при охлаждении воды ниже комнатной температуры, её тепловое состояние меняется постепенным образом, понижение температуры на десять-пятнадцать градусов к каким-

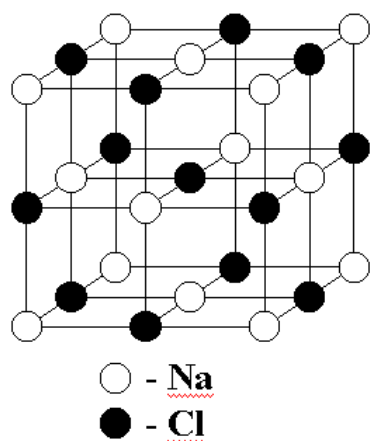


Рис.1.  
Кристаллическая  
решетка NaCl

либо видимым изменениям не приводит, и вдруг, при охлаждении на ничтожную долю градуса, вода переходит в совершенно иное состояние, состояние льда. Вода и лёд – две фазы одного и того же вещества.

Фазовые переходы бывают двух типов - первого и второго рода. К фазовым переходам первого рода относятся изменение агрегатного состояния вещества: процессы плавления и кристаллизации, испарения и конденсации, сублимации или возгонки<sup>1</sup>, при этом скачком изменяется плотность, внутренняя энергия, энтропия.

<sup>1</sup> Сублимацией называется превращение твёрдого тела в газообразное состояние, минуя жидкую фазу.

Следует заметить, что твердым считается кристаллическое состояние, т.е. состояние в котором атомы располагаются в узлах кристаллической решетки. На рис.1 изображена кристаллическая решетка каменной соли  $NaCl$ . Как видно из рисунка, кристалл, благодаря пространственной периодичности структуры, состоит как бы из повторяющихся частей.

В кристалле размером 1 мм повторяющееся расположение атомов встречается сотни тысяч раз. Поэтому к такому расположению атомов применяется термин “дальний порядок”. Большинство твердых тел – являются кристаллическими телами. В обычных условиях они состоят из сросшихся зерен размером порядка 0,001 мм. В таком зернышке отчетливо выражен дальний порядок.

Однако в природе встречаются твердые вещества со сложным молекулярным строением, например, стекла, смолы, пластики, которые не имеют периодической структуры. Это аморфные твердые тела, которые на самом деле являются жидкостями с аномально большой вязкостью. Такие тела приобретают свойство текучести не скачком, а путём постепенного уменьшения вязкости, которое вызывается повышением температуры. Аморфные твердые тела противопоставляются кристаллам, которые имеют форму правильного многогранника. Следует подчеркнуть, что кристалличность не обязательно проявляется в особенностях их внешней формы, это структура решетки (кусочек металла не имеет правильной формы, но не является аморфным).

Каков же основной признак кристаллов? Этим признаком является наличие резко выраженной температуры плавления. Если подводить тепло к кристаллическому телу, то температура его будет повышаться до тех пор, пока не начнёт плавиться. После чего подъем температуры прекратится, и весь процесс плавления будет происходить при строго определённой постоянной температуре, называемой температурой плавления  $T_{пл}$ .

На рис.2 изображены схемы строения кварца и кварцевого стекла. Одно и тоже в химическом отношении вещество, но одно в кристаллическом, другое в аморфном виде. Характер окружения ближайшими соседями в обоих случаях одинаков, но в аморфном теле отсутствует дальний порядок; аморфное тело – это “испорченный кристалл”. Отсутствие дальнего порядка, характерного признака кристаллических тел, является непосредственной причиной отсутствия выраженной точки плавления. В точке плавления совершается переход, при котором дальний порядок исчезает и решетка распадается на легкоподвижные субмикроскопические области, имеющие то же расположение атомов, что и исходный кристалл, но статически

беспорядочно ориентированные друг относительно друга, остаётся лишь ближний порядок в расположении атомов.

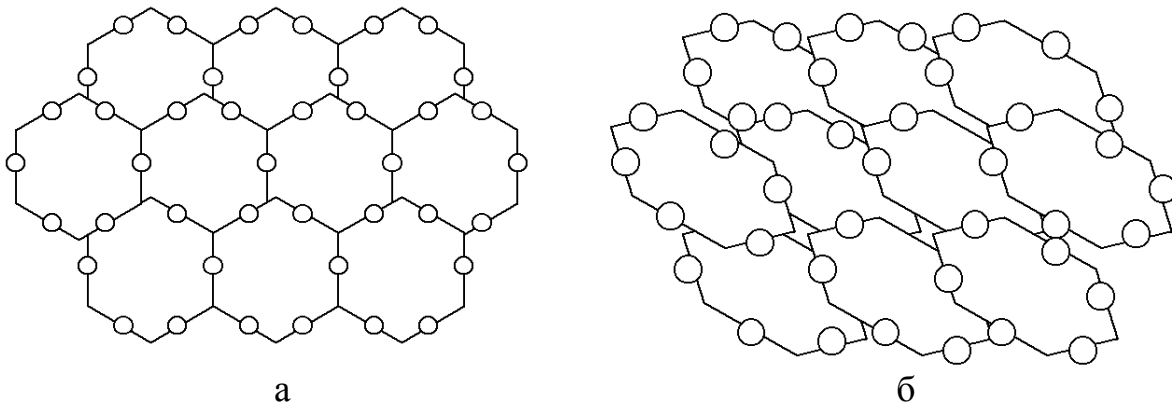


Рис.2. Схема строения кварца.  
а - кристаллический, б - аморфный кварц  
(рисунок соответствует упрощенной плоской модели)

В аморфных телах при повышении температуры характер расположения атомов не меняется, увеличивается их подвижность, атомы с увеличением температуры “выскальзывают” из своего окружения, меняя соседей. Наконец, число таких перемен в секунду становится таким же большим как для жидкости.

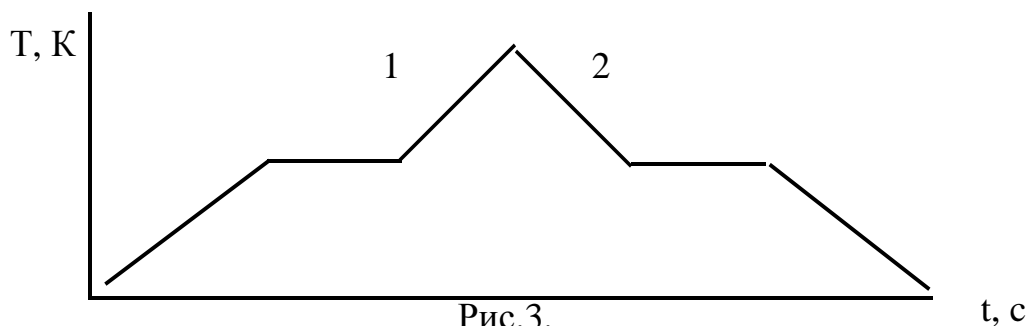
Выше мы говорили, что при всех агрегатных превращениях поглощается или выделяется энергия. Например, для превращения килограмма воды в пар необходимо затратить энергию  $2,3 \cdot 10^6$  Дж. Эта энергия необходима для преодоления сил притяжения, действующих между молекулами воды.

Металлы начинают плавиться только тогда, когда начинает разрушаться их кристаллическая решетка, на что также необходимо затрачивать энергию. Эта энергия называется скрытой теплотой плавления. Теплота плавления, отнесённая к массе вещества, называется удельной скрытой теплотой плавления. Например, для цинка она составляет  $1,11 \cdot 10^5$  Дж./кг, т.е. нужно количество теплоты 111 кДж./кг, чтобы при  $T_{пл} = 419,5^\circ\text{C}$  перевести 1 кг цинка из твердого состояния в жидкое. На рис.3 представлена кривая фазового перехода твердого тела – жидкость (1). Обратное превращение – кристаллизация (2) происходит при той же температуре и сопровождается поглощением того же количества энергии, что и при плавлении – скрытой теплоты кристаллизации. Скрытой теплоты перехода



называется потому, что подвод (поглощение) и отвод (выделение) этой теплоты не сопровождается таким эффектом, как повышение и понижение температуры. Несмотря на то, что мы продолжаем нагревать тело (кривая плавления 1), во время плавления температура не повышается, так же во время кристаллизации (кривая кристаллизации 2) температура не понижается, хотя мы продолжаем охлаждать жидкость. Переход жидкость - твердое тело сопровождается выделением энергии. Энергия взаимодействия микроскопических кристаллов становится значительно выше энергии тепловых колебаний, жидкость кристаллизуется. Однако новая фаза при таком переходе образуется не сразу во всем объеме, сначала образуются зародыши ее, которые затем растут, распространяясь на весь объем.

К числу фазовых превращений первого рода относятся и некоторые переходы твердого тела из одной кристаллической модификации в другую. Эти превращения называются полиморфными. Кристаллы различной модификации состоят из одного и того же вещества, и отличаются друг от друга лишь строением кристаллической решетки. Например, графит и алмаз



Кривые плавления (1) и кристаллизации (2) твердого тела.

состоят из одного и того же элемента – углерода. Разные структуры означают и разные физические свойства. Алмаз по физическим свойствам очень не похож на графит. Графит имеет черный цвет, он совершенно непрозрачен, алмаз же прозрачен и бесцветен; графит не горит даже при очень высоких температурах (он плавится при 385 °С), алмаз же в струе кислорода сгорает при 720 °С. Другой пример – белое и серое олово. Белое олово – блестящий, легкий и очень пластичный металл, серое олово – хрупкое и легко превращается в порошок.

## ЗАДАЧА 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОТЫ ПЛАВЛЕНИЯ МЕТАЛЛОВ.

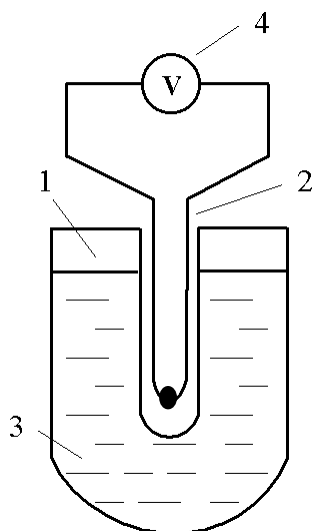


Рис. 4.

Схема экспериментальной установки.

1 – тигель, 2 – термопара, 3 – исследуемый образец, 4 – цифровой вольтметр.

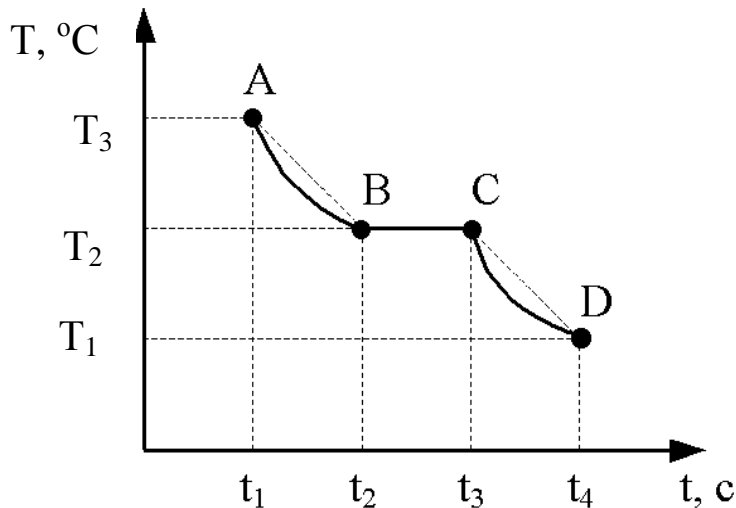


Рис. 5.

График зависимости температуры в тигле от времени

### ОБОРУДОВАНИЕ

Тигельная печь, тигли с металлом (оловом или индием), термопара, цифровой вольтметр (Рис.4).

Тигель представляет собой кварцевый сосуд, между стенками которого помещен исследуемый металл. В канал тигля помещена термопара, концы которой присоединены к цифровому вольтметру с пределом измерения около 15 мВ, с помощью которого производится запись термоЭДС в зависимости от времени  $e = f(t)$ .

Теплота плавления металла определяется методом наблюдений средних скоростей охлаждения металла до и после кристаллизации. Теплоту плавления металла вычисляют по графику зависимости температуры остывающего (или нагревающегося) металла от времени, получаемого экспериментально. Аналогичный график представлен на рис.5. Участок *AB*

соответствует остыванию жидкого металла, участок  $CD$  – охлаждению твердого металла.

## ВЫВОД РАБОЧЕЙ ФОРМУЛЫ

Заменяем график, изображенный на рис.5, идеализированным, соединив точки А и В, С и Д прямыми (пунктир на рис.5).

Пусть  $M$  – масса тигля, в котором плавится металл,  $Q$  – удельная теплоёмкость материала тигля (кварца),  $C_1$  – удельная теплоёмкость жидкого металла,  $m$  – масса металла. Величины  $T_1, T_2, T_3, t_1, t_2, t_3$  соответствуют температуре и времени точек А, В, С, D на рис. 5. Тогда скорость охлаждения металла до затвердевания равна:

$$q_1 = (CM + C_1m) \frac{T_1 - T_2}{t_1 - t_2}. \quad (1)$$

Скорость охлаждения после затвердевания:

$$q_2 = (CM + C_2m) \frac{T_2 - T_3}{t_4 - t_3}. \quad (2)$$

Скорость процесса кристаллизации можно представить в виде:

$$q_3 = \frac{Im}{t_4 - t_3}, \quad (3)$$

где  $\lambda$  - удельная теплота плавления (кристаллизации) данного металла.

Полагая

$$q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad t_1 - t_2 = t_2 - t_3 = t_3 - t_4, \quad (4)$$

подставляя (1), (2), (3) уравнения в (4), получим формулу для расчёта теплоты плавления:

$$I = \frac{(CM + C_1m)(T_1 - T_2) + (CM + C_2m)(T_2 - T_3)}{2m}. \quad (5)$$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Поместить тигель с исследуемым материалом в печь, закрыть крышку, присоединить термопару, включить печь в сеть.
2. Нагреть образец немного выше температуры плавления, что соответствует 13 мВ по вольтметру для олова и 12 мВ – для индия. Отключить печь, осторожно вынуть из неё тигель с металлом на теплоизолированную подставку.

3. Снять зависимость термоЭДС как функцию времени  $e=f(t)$  в процессе охлаждения и кристаллизации выбранного образца. Показания вольтметра регистрировать через 15 секунд (до 4 мВ для олова и 2 мВ для индия). Опыт проделать трижды.
4. Перевести значения термоЭДС в температуру (градусы шкалы Цельсия) по градуировочному графику термопары.
5. Построить график зависимости  $T = f(t)$ . Для нахождения точек А и D на оси абсцисс влево и вправо откладывая отрезки  $\Delta t$ , равные времени кристаллизации металла,  $\Delta t = t_3 - t_2$  (участок ВС на кривой).
6. По формуле /5/ рассчитать удельную теплоту плавления металла  $\lambda$  (для каждого из трёх опытов отдельно).
7. Оценить погрешность определения  $\lambda$  по методу Стьюдента.

## ЗАДАЧА 2. ЭНТРОПИЯ. ОЦЕНКА ПРИРАЩЕНИЯ ЭНТРОПИИ ПРИ ПЛАВЛЕНИИ МЕТАЛЛА

Энтропия интересная и необычная функция состояния термодинамической системы, это понятие непосредственно связано со вторым началом термодинамики. Энтропией называется функция состояния “S”, дифференциал которой в элементарном обратимом процессе равен отношению бесконечно малого количества теплоты  $\delta Q$ , сообщённого системе, к температуре, при которой этот переход произошёл:  $dS = \frac{dQ}{T}$ .

Однако все реальные процессы в природе необратимы. Для необратимых процессов изменение энтропии  $\Delta S > \frac{\Delta Q}{T}$ , т. е. при переходе системы из одного состояния в другое энтропия всегда возрастает. Каких-либо исключений из этого правила не обнаружено. Поэтому обобщённая формулировка второго начала термодинамики читается так: “полная энтропия произвольной системы вместе с её окружением в любых естественных процессах увеличивается, т. е.  $\Delta S > 0$ ”.

Рассмотрим процесс плавления металла. Процесс передачи тепла является необратимым, поэтому выражение второго начала термодинамики следует использовать в форме  $\Delta S > \frac{\Delta Q}{T}$ . Как же тогда вычислить величину приращения энтропии  $\Delta S = S_2 - S_1$  для реального необратимого процесса – плавления металла? Энтропия является функцией состояния, поэтому для

оценки  $\Delta S$  можно использовать выражение для какого-либо обратимого процесса, т. к. когда тела вошли в тепловой контакт, то начальное и конечное состояния каждого тела одинаковы.

Пусть тигель с металлом приведён в контакт с нагревателем (тепло передаётся от более нагретого тела при температуре  $T_1$  к менее нагретому телу – металлу с температурой  $T_2$ , причём  $T_1 > T_2$ ). Тогда количество теплоты  $|\Delta Q|$ , взятое у более нагретого тела – тигля, приведёт к уменьшению его

энтропии на  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = |\Delta Q| \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$ ; т. к.  $T_1 > T_2$ , то  $\Delta S > 0$ . Таким

образом, энтропия одного тела уменьшается, а другого увеличивается, но полное изменение энтропии является положительным.

Оценим это приращение количественно,

$$\Delta S > \frac{\Delta Q}{T}, \quad (6)$$

где  $\Delta Q = Q_1 + Q_2$

$$Q_1 = \int_T^{T_{пл}} cm dT, \quad Q_2 = lm,$$

$c, m$  – теплоёмкость и масса металла,

$T_{пл}$  – температура плавления металла,

$T_1$  – комнатная температура,

$\lambda$  - удельная теплота плавления металла.

Тогда

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_{пл}} \frac{cm dT}{T} + \frac{lm}{T_{пл}} = cm \ln \frac{T_{пл}}{T_1} + \frac{lm}{T_{пл}}. \quad (7)$$

Физический смысл понятия “энтропия” был раскрыт Больцманом в выражении  $S = k \ln W$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $W$  – количество микросостояний, соответствующих данному макросостоянию системы (стат. вес). Согласно этой интерпретации понятие энтропии связывается с более привычными понятиями “порядок” и “беспорядок”. Энтропию системы можно рассматривать как количественную меру беспорядка в системе. При этом второе начало термодинамики звучит так: “естественные процессы стремятся перевести систему в состояние с большим беспорядком”. Когда металл при плавлении превращается в жидкость, энтропия жидкого металла увеличивается. В твёрдом состоянии его структура более упорядочена, чем в жидком, где он может растекаться, т. е. упорядоченное расположение металла в кристаллической решётке сменилось неупорядоченным, в известной мере, случайным движением молекул в жидком состоянии. Таким

образом, процессы плавления металла сопровождаются приращением энтропии.

## **ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ**

Оценить приращение энтропии по формуле (7), исходя из экспериментальных результатов, полученных в задании 1 для олова или индия. Сделать выводы.

## **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Что называется переходом первого рода?
2. Что понимается под фазой вещества?
3. Являются ли различными фазами вещества твёрдое и жидкое стекло?
4. Чем отличаются кристаллические твёрдые тела от аморфных твёрдых тел?
5. Что происходит при плавлении твёрдых кристаллических тел и аморфных тел?
6. Что называется скрытой теплотой перехода? Почему при одних фазовых превращениях она поглощается, а при других выделяется?
7. В чём суть метода определения удельной теплоты плавления металлов?
8. Почему при кристаллизации температура остаётся постоянной, хотя мы продолжаем охлаждать металл?
9. Запишите математическое выражение второго начала термодинамики.
10. В чём заключается физический смысл понятия энтропии?
11. Как объяснить приращение энтропии при плавлении металла?

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Матвеев А. Н. Молекулярная физика. -М.: Высшая школа, 1987.
2. Сивухин Л. В. Общая физика. Т. 2. -М.: Наука, 1993.
3. Иверонова В. И. Физический практикум. Ч. 1. -М.: Высшая школа, 1968.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-8

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ УДЕЛЬНЫХ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ ВОЗДУХА

#### Цель работы

Ознакомиться с применением первого начала термодинамики к процессам в газах.

#### Задача работы

Определить отношение удельных теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и объеме методом Клемана-Дезорма.

#### ТЕОРИЯ

Теплоемкостью тела называется физическая величина, численно равная количеству теплоты, которое нужно подвести к телу или отнять от него для изменения его температуры на 1К. Теплоемкость, отнесенная к единице массы вещества, называется удельной теплоемкостью; теплоемкость, отнесенная к одному молю вещества, называется молярной. Обе эти величины являются характеристикой вещества, из которого состоит тело.

Из определения теплоемкости следует, что она выражается в Дж/К. Удельная теплоемкость измеряется в Дж/кг К, а молярная - в Дж/моль К. Между молярной теплоемкостью  $C$  и удельной  $c_{уд}$  существует очевидное соотношение  $C = c_{уд} \cdot \mu$ , где  $\mu$  - молярная масса вещества. Если моль вещества нагревается не на 1К, а на  $\Delta T$ , то количество затраченной теплоты равно  $Q = C \cdot \Delta T$ . Откуда  $c_{уд} = \frac{Q}{\mu \cdot \Delta T}$ .

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты, сообщаемое термодинамической системе, идет на изменение ее внутренней энергии и на совершение работы :

Если нагревание происходит в условиях, когда объем остается постоянным, то соответствующая теплоемкость называется теплоемкостью при постоянном объеме, или изохорической теплоемкостью, и обозначается :

Так как теплота при этом тратится лишь на изменение внутренней энергии (свойство идеального газа), то

откуда

Если же при нагревании остается неизменным давление, то теплоемкость называется теплоемкостью при постоянном давлении, или изобарической теплоемкостью, и обозначается :

откуда

Первое начало термодинамики принимает вид:

откуда



Из уравнения состояния идеального газа следует, что — , т.е. (уравнение Роберта Майера). Оно показывает, что больше на величину универсальной газовой постоянной . Величина отношения теплоемкостей газов / обозначается . Она зависит от сорта газа, т.е. числа степеней свободы (  $i$  ) молекул газа. В классической теории теплоемкостей — . Соответственно для одноатомных газов ( ), , для двухатомных ( ), , и для трех- и многоатомных газов с нелинейными жесткими молекулами ( ), . Величина играет важную роль в теории теплоемкостей газов. Она входит в уравнение Пуассона ( ). Зная , можно не прибегая к непосредственному измерению , которое порой затруднено, оценить эту величину.

Существует несколько способов измерения . В данной работе представлен способ оценки величины методом Клемана-Дезорма.

### ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Баллон с распределительным краном, U-образный манометр, насос секундомер. Схема установки предоставлена на рис.1.

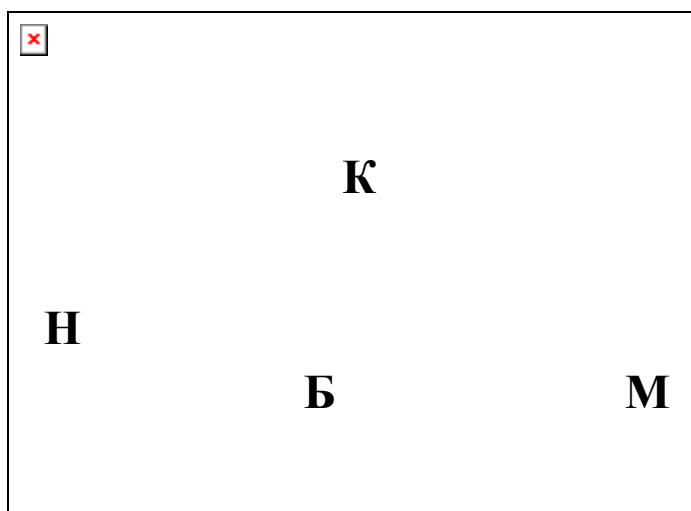


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Установка состоит из стеклянного баллона **Б**, который может быть соединен с помощью распределительного крана **К** либо с атмосферой, либо с насосом **Н** и манометром **М**. Водяной **U** -образный манометр измеряет разность между давлением в баллоне и атмосферным давлением в мм. водного столба.

Для определения отношения теплоемкостей  $g$  для газа, находящегося в баллоне, с ним проводят последовательность термодинамических процессов, представленных на  $P$ - $V$ -диаграмме рис.2. Обозначим через

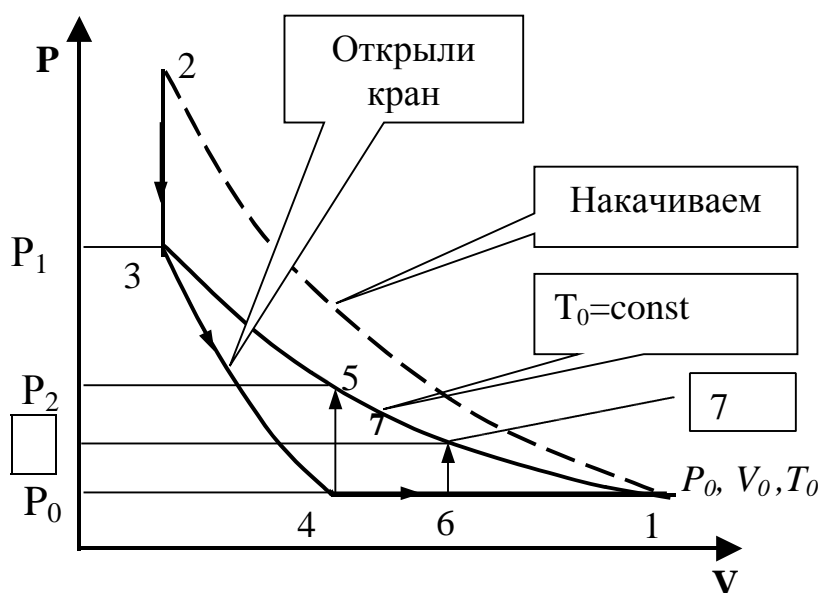


Рис. 2. Диаграмма процессов в газе

исходные величины термодинамических параметров газа в баллоне. Сначала в баллон накачивается воздух (процесс 1-2). При этом газ в баллоне сжимается и нагревается. После изохорического остывания до начальной комнатной температуры газ имеет некоторое давление (процесс 2-3). Затем краном соединяют баллон с атмосферой, и газ, адиабатически расширяясь, охлаждается (процесс 3-4), его давление падает до величины  $P_0$ , а температура - до величины  $T_0$ . В момент достижения давления  $P_0$  кран **К** перекрывается и газ изохорически нагревается до комнатной температуры

(процесс 4-5). В конечном состоянии давление газа , а температура равна .

Масса газа, находящегося в баллоне, в начальном состоянии выражается соотношением:

$$\text{---}$$

Нетрудно видеть, что в течение всех рассмотренных термодинамических процессов масса газа в баллоне больше или равна .

Назовем массу рабочей массой газа, эта масса остается все время в баллоне. Накачиваемый и выпускаемый из баллона газ служит лишь для сжатия и расширения рабочей массы газа.

Введем обозначения и . Тогда величина оценивается по формуле:

$$\text{---} \quad (2)$$

Вывод выражения ( 2 ) приводится в приложении.

Измерив значения и , можно было бы рассчитать величину . Однако при таком методе расчета необходимо выполнение следующих условий:

1. При адиабатическом расширении (процесс 3-4) кран баллона должен быть перекрыт в момент, когда давление в баллоне станет равным ;
2. Время выпуска газа должно быть достаточно мало, так, чтобы теплообменом с окружающим воздухом можно было пренебречь.

Практически эти условия выполнить трудно, что приводит к ошибкам в определении и , и следовательно в оценке .

После открытия крана (процесс 3 - 4) давление в баллоне со временем уменьшается по экспоненциальному закону и через 0.1 секунды отличается от не более чем на 1% .

Однако вручную открыть кран на 0,1 секунды трудно, практически время это оказывается значительно больше. Рассмотрим влияние времени, в течение которого после достижения давления кран **К** еще остается открытым, не влияет на результат опыта.

Предположим, что после достижения давления кран остается открытым еще некоторое время, за это время за счет теплообмена со стенками баллона и расширения газа происходит изобарический нагрев газа (процесс 4-6). После того как кран закрывается (точка 6) происходит изохорический нагрев газа (процесс 6-7), давление в баллоне достигает величины (точка 7). Точка 7 лежит на той же изотерме, что точки 3 и 5, но

Очевидно, что зависит от времени выхода газа из баллона, и значение, рассчитанное по формуле (2) будет иметь погрешность.

Рассмотрим детальнее процесс нагревания газа на участке 4-6. За счет теплопроводности через стенки баллона за время газ будет получать количество теплоты

где — . Здесь -температура газа в баллоне,  $t_0$  -температура окружающего воздуха,  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности стекла,  $\delta$  и  $S$  толщина и площадь стенок баллона соответственно(1).

Уравнение баланса энергии для газа, находящегося в баллоне, может быть записано в виде:

$$\dots \dots \dots (3)$$

Разделив переменные и подставив из уравнения Менделеева-Клапейрона, получим:

$$\dots \dots \dots \text{или} \dots \dots \dots$$

Последнее выражение можно представить:

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{dQ}{dT} + \frac{dQ}{dT},$$

его интегрирование дает:

$$\int \frac{dQ}{dT} = \int \frac{dQ}{dT} + \int \frac{dQ}{dT},$$

где  $\frac{dQ}{dT}$  — постоянная интегрирования.

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{dQ}{dT} + \frac{dQ}{dT}$$

откуда

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{dQ}{dT} + \frac{dQ}{dT} \quad (5)$$

Обозначим температуру газа в баллоне в момент  $t_4$  (точка 4) через  $T_4$ , а

через  $T_5$ , тогда постоянная интегрирования  $A$  будет равна  $\frac{dQ}{dT}$ .

Окончательно соотношение (5) примет вид:

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{dQ}{dT} + \frac{dQ}{dT}, \quad (6)$$

где учтено выражение (1) и то обстоятельство, что точки 3 и 7 лежат на одной изотерме.

После того как в момент времени  $t$  кран  $K$  перекрывается, нагрев газа в баллоне также продолжается, но уже изохорически. Давление газа в конце концов достигает величины  $p_7$ . Для изохорического процесса

$\frac{dQ}{dT}$  (участок 6-7) имеем:

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{dQ}{dT} \text{ или } \frac{dQ}{dT}. \quad (7)$$

С другой стороны из уравнения адиабаты (участок 3-4) имеем:

$$\frac{p_3}{p_4} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона, пренебрегая членами второго порядка малости:

$$\frac{p_3}{p_4} = 1 + \gamma \frac{V_3 - V_4}{V_4}$$

И учитывая, что  $p_3 = p_4 = p_0$  получим

$$1 = 1 + \gamma \frac{V_3 - V_4}{V_4} \quad (8)$$

Решая совместно уравнения (6),(7),(8) и снова пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим:

$$V_3 - V_4 = \frac{V_4}{\gamma} \quad (9)$$

Это уравнение учитывает как теплообмен с окружающей средой, так и уход части газа из баллона в процессе нагрева. Уравнение позволяет найти по измеренным при разных величинах значениями  $V_3$  и  $V_4$ .

Прологарифмируем выражение (9)

$$\ln \left( \frac{V_3 - V_4}{V_4} \right) = \ln \left( \frac{1}{\gamma} \right)$$

График зависимости  $\ln \left( \frac{V_3 - V_4}{V_4} \right)$  от  $t$  является линейной функцией. Если экстраполировать этот график по  $t = 0$ , то он будет отсекает на оси ординат отрезок

$$\ln \left( \frac{1}{\gamma} \right) \quad (10)$$

Потенцируя выражение (10) и преобразуя его, получим

## ХОД РАБОТЫ

Закрывать кран и накачать воздух в баллон (процесс 1-2) так, чтобы величина  $p$ , показываемая манометром, составляла 20-25 см водного столба. Выждать не менее 2 минут, пока температуры воздуха в баллоне и окружающем пространстве не станут одинаковыми (процесс 2-3). Измерить установившееся значение величины  $p$ . Повернув кран, соединить баллон с атмосферой и одновременно включить секундомер. Спустя  $t = 55$  секунд снова закрыть кран баллона (точка б). Через некоторое время (не менее 2 минут), необходимое для выравнивания температуры газа в баллоне и окружающей среде (процесс б-7) снова записать показание манометра  $p$ . Аналогично провести измерения для времени выдержки  $t = 50, 40, 30, 20, 15, 10$  и 5 секунд. Для каждого времени выдержки опыт повторить 2 раза.

## ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Используя полученные данные, необходимо построить график

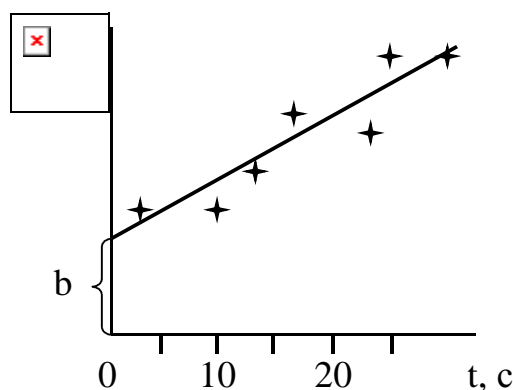


Рис. 3. График зависимости  $p$  от  $t$

зависимости  $\gamma$  от  $t$  и экстраполировать его до пересечения с осью ординат (рис.3). Величина отрезка «b», отсекаемая на отрезке ординат позволяет найти величину  $\gamma$  по формуле (11).

В данной работе зависимость  $\gamma$  от  $t$  и оценка величины статистически обрабатывается с помощью метода наименьших квадратов, который описан в приложении (возможно выполнение этой части программы в дисплейном классе на готовой программе).

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется теплоемкостью газа?
2. Какова размерность этой физической величины?
3. Что понимается под удельной и молярной теплоемкостями газа?
4. Как они связаны между собой? Какова связь между  $\gamma$  и  $f$  и числом степеней свободы молекул газа?
5. Получите уравнение Роберт Майера. Сколько степеней свободы имеют молекулы газов He, H<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub>?
6. Какие это степени свободы? В каком газе показатель адиабаты имеет наибольшее значение – N<sub>2</sub>, He, CH<sub>4</sub>?
7. Почему в данном эксперименте целесообразно использовать сосуд возможно большего диаметра?
8. Получите уравнение адиабаты в переменных  $P$  и  $T$ . Какие явления нарушают адиабатичность расширения газа?
9. Как повлияет на ход эксперимента наличие паров воды в воздухе?

### ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. -М.: Высшая школа, 1988.



2. Булкин П.С., Попова И.И. Общий физический практикум. -М.: МГУ, 1988.
3. Основы физики. Курс общей физики. Т.2. Квантовая и статистическая физика / Под. ред. Ю.М. Ципенюка. -М.: Физ.-мат. лит., 2001.

## Вывод формулы для оценки значения

Ранее были введены обозначения  $\alpha$  и  $\beta$  причем  $\alpha > \beta$  и  $\alpha + \beta = 1$  (см. рис.2). Запишем уравнение для адиабатического расширения газа (кривая 3-4):

$$p_3 V_3^\gamma = p_4 V_4^\gamma \quad \text{или} \quad \frac{p_3}{p_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^\gamma.$$

Воспользовавшись формулой бинома Ньютона и ограничиваясь двумя членами, получим:

$$\frac{p_3}{p_4} = 1 + \gamma \frac{V_4 - V_3}{V_3} + \dots$$

Учитывая, что 4 и 5 лежат на одной изохоре, т.е.  $\frac{p_4}{p_5} = \frac{V_4}{V_5}$ , можно записать:

$$p_4 V_4 = p_5 V_5.$$

Откуда

$$\frac{p_4}{p_5} = \frac{V_5}{V_4}. \quad (2)$$

## Обработка результатов измерений по методу наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов позволяет по экспериментальным точкам провести прямую (кривую), которая проходила бы как можно ближе к истинной функциональной зависимости. Теория вероятности показывает, что наилучшим приближением будет такая прямая (кривая) линия, для которой сумма квадратов расстояний по вертикали от точек до кривой будет минимальной.

Допустим, что полученная зависимость  $y = f(x)$  от  $t$  представлена точками, отличающимися от точного линейного поведения. Требуется провести прямую  $y = ax + b$ , имеющую вид  $y = ax + b$ , где  $x=t$ ,  $y=f(x)$ ; так, чтобы сумма средних квадратных отклонений была минимальной.

Минимум этой суммы находится методами математического анализа, а именно дифференцированием функционала по  $a$  и  $b$  с последующим присваиванием результата нулю. В результате для коэффициентов  $a$  и  $b$  получим:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \quad b = \bar{y} - a \bar{x}.$$

Теория дает возможность определить также среднеквадратичные ошибки  $\Delta a$  и  $\Delta b$

$$\Delta a = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}}, \quad \Delta b = \frac{\Delta y}{\sqrt{n}}.$$

\_\_\_\_\_ ,

здесь  $n$ -количество экспериментальных точек.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-9

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ СЛАБО ПРОВОДЯЩИХ ТЕПЛО

#### Цель работы

Изучение механизмов теплопроводности в твердых телах.

#### Задача работы

Изучить механизмы теплопроводности твердых тел и экспериментальным способом найти коэффициент теплопроводности предложенного образца.

#### ТЕОРИЯ

Процесс передачи тепла без переноса вещества называется теплопроводностью. В неравномерно нагретом теле передача тепла происходит от более нагретых к менее нагретым участкам.

С точки зрения молекулярно-кинетической теории вещества, температура служит мерой кинетической энергии молекул, а участки с различной температурой соответственно характеризуются различной кинетической энергией молекул. При столкновении молекул соприкасающихся слоев, происходит передача кинетической энергии от слоя к слою, тем самым температуры слоев стремятся к одному значению.

При стремлении толщины слоя к нулю изменение температуры от слоя к слою можно считать подчиняющимся линейному закону. В этом случае

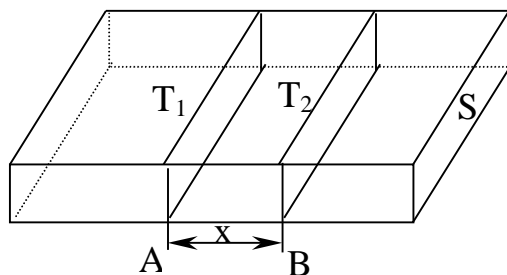


Рис. 1

количество тепла, передаваемое через слой вещества толщиной  $x$  за время  $dt$  (рис. 1), определяется зависимостью:

$$\text{---} \quad , \quad (1)$$

где  $T_1 - T_2$  – разность температур между сечениями А и В,  $S$  – площадь поперечного сечения. Уравнение (1)

называется уравнением Фурье. Величина  $\text{---}$  - характеризует изменение

температуры на единице длины нагретого тела в направлении передачи тепла, а в случае стремления  $x$  к нулю носит название градиента температуры. Коэффициент пропорциональности  $\chi$  - называется коэффициентом теплопроводности и численно равен количеству тепла, проходящему через единичную площадку, перпендикулярную потоку тепла, за единицу времени при градиенте температур, равном единице. В системе СИ  $\chi$  имеет размерность Дж/м<sup>2</sup>СЖ и строго говоря, зависит от температуры, но в ограниченных интервалах температур может считаться постоянным. Величина коэффициента теплопроводности для различных веществ варьируется в широких пределах. Так, например, коэффициент теплопроводности для *Al* равен 1340 Дж/м<sup>2</sup>СЖ, тогда как для кварца имеет значение 1,46 Дж/м<sup>2</sup>СЖ.

Такое разительное отличие в коэффициентах теплопроводности определяется механизмом передачи тепла. Так, для диэлектрических материалов передача тепла осуществляется за счет колебательных степеней свободы атомов решетки, формирующих волну, распространяющуюся со скоростью звука. Тогда как для проводников основную роль в переносе тепла играет электронный газ зоны проводимости.

Приближенно коэффициент теплопроводности твердого тела может быть рассчитан методами квантовой механики. Так, колебания решетки твердого тела, эффективно можно описать движением квазичастиц - фононами, распространяющимися в твердом теле со скоростью звука. Каждый фонon характеризуется собственной энергией, численно равной  $h\nu$ , где  $h$  - постоянная Планка,  $\nu$  - частота колебаний. Используя это представление, перенос тепла можно трактовать, поглощением энергии фононов атомами решетки, аналогично обычному газу, где в роли фононов выступают фотоны.

В металлах, помимо колебаний решетки, в переносе тепла принимают участие заряженные частицы - электроны. При высоких температурах величина электронной теплопроводности много больше решеточной. Этим объясняется высокая теплопроводность металлов по сравнению с неметаллами. При понижении температуры начинает преобладать решеточная теплопроводность, так как она растет с понижением температуры, а электронная не зависит от температуры. При дальнейшем понижении температуры (стремлении к нулю Кельвина) вновь начинает преобладать электронный механизм теплопроводности.

Расчет вышеуказанных механизмов теплопроводности для каждого конкретного вещества достаточно трудоемок, поэтому для нахождения  $\chi$  чаще всего используется экспериментальный метод. В основе которого, как

видно из уравнения (1), лежит измерение количества тепла, протекающего через единицу площади сечения исследуемого тела в единицу времени, и градиента температуры.

Основная трудность при таких измерениях заключается в том, что не все тепло передается через исследуемое тело путем теплопроводности, частично оно излучается через боковые поверхности в окружающую среду.

Данная работа демонстрирует один из методов определения коэффициента теплопроводности для слабо проводящих тепло материалов.

## МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ И ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Установка для определения коэффициента теплопроводности для слабопроводящих веществ состоит из толстого латунного диска *A*, установленного на подставке, исследуемой пластинки *Д*, которая кладется на латунный диск и прижимается сверху цилиндрической коробкой. Оба диска имеют специальные отверстия, в которые вставлены термометры  $T_1$  и  $T_2$  (рис.2).

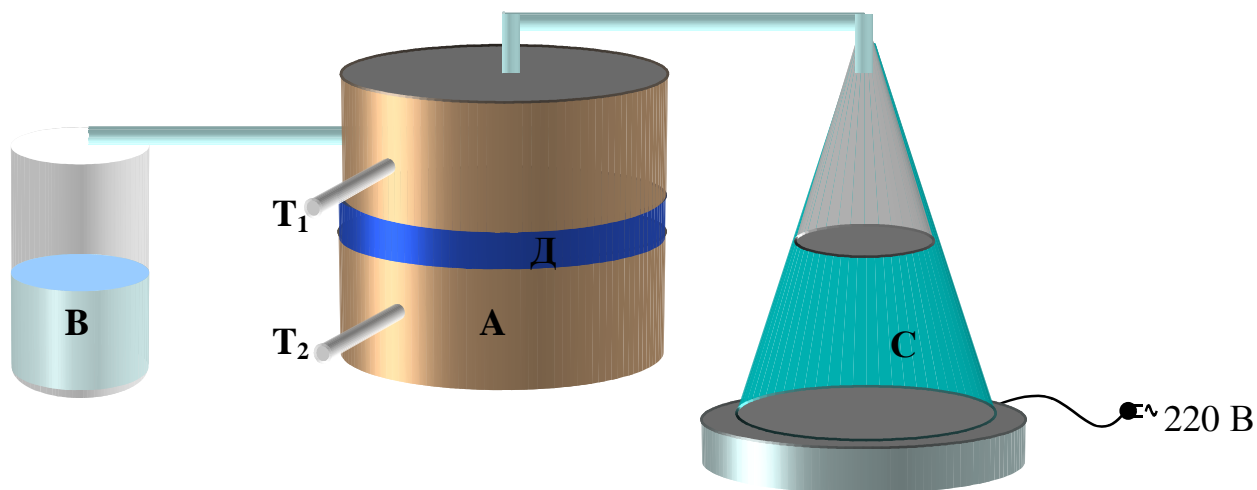


Рис. 2. Установка для определения коэффициента теплопроводности

В эту установку также входит колба с водой *C*, установленная на электроплитке. Образующийся пар пропускается через верхнюю коробку до тех пор, пока не будет достигнуто стационарное тепловое равновесие, т. е. до тех пор, пока скорость, с которой теплота передается нижней поверхности исследуемого диска, не станет равной скорости, с которой теплота подходит к нему через пластинку от дна латунной коробки. Снимая показания

термометров  $T_1$  и  $T_2$  в тепловом равновесии ( $T_1$  – средняя температура верхнего латунного диска,  $T_2$  – средняя температура нижнего латунного диска) и зная скорость охлаждения нижнего диска, мы можем определить коэффициент внутренней теплопроводности.

### ВЫВОД РАБОЧЕЙ ФОРМУЛЫ

Известны:

$m$  – масса латунного диска;

$c$  – удельная теплоемкость латуни;

$r$  – радиус латунного (исследуемого) диска;

$d$  – толщина латунного диска;

$d_1$  – толщина исследуемого диска (образца);

$n$  – скорость охлаждения нижнего латунного диска.

При достижении стационарного теплового равновесия количество тепла  $Q_1$ , излучаемого в единицу времени нижним латунным диском в окружающую среду, будет равно количеству тепла  $Q_2$ , передаваемому ему от верхней коробки через поперечное сечение исследуемого диска в единицу времени и определяемому уравнением Фурье:

$$Q_2 = cpr^2 \frac{T_1 - T_2}{d_1}, \quad (2)$$

где  $\chi$  - коэффициент теплопроводности,  $\pi r^2$  – площадь исследуемого диска,  $\frac{T_1 - T_2}{d_1}$  – градиент температур в исследуемом диске. В силу условия

равновесия  $Q_1 = Q_2$ , что позволяет определить  $Q_1$ . Количество тепла, теряемого всей поверхностью латунного диска в единицу времени, равно:

$$Q = mnc. \quad (3)$$

Площадь поверхности латунного диска вычисляется по формуле:

$$2pr^2 + 2prd = 2pr(r + d). \quad (4)$$

Тогда количество тепла, теряемого единицей поверхности диска в единицу времени (удельный тепловой поток), определяется следующим образом:

$$q = \frac{mnc}{2pr(r + d)}. \quad (5)$$



Если же исследуемый образец лежит на латунном диске и прижимается сверху цилиндрической коробкой, то площадь, с которой будет передаваться тепло в окружающее пространство, равна только сумме нижней и боковой поверхностей латунного диска:

$$\dots \quad (6)$$

отсюда легко получить, значение для  $Q_1$  :

$$\dots \quad (7)$$

Подставляя это значение  $Q_1$  в выражение (2) и разрешая полученное уравнение относительно  $\chi$ , получим:

$$\dots \quad (8)$$

## ХОД РАБОТЫ

**Задание 1.** Определение градиента температур в исследуемом диске.

Наполнить колбу водой на 2/3 ее объема и установить ее на электроплитке. На латунный диск положить исследуемый образец и прижать его сверху латунной коробкой, через которую пропустить пар от кипящей воды в колбе.

После установления теплового равновесия, снять отсчеты температур на обоих термометрах ( $T_1$  и  $T_2$ ), и рассчитать с их помощью градиент температуры ———.

**Задание 2.** Определение скорости охлаждения латунного диска.

Нагреть нижний диск на 4 – 5 градусов выше, чем при выполнении первого задания (исследуемый диск не используется при выполнении этого задания). Затем убрать верхнюю коробку и наблюдать процесс охлаждения нижнего диска, снимая отсчеты по термометру через равные промежутки времени до тех пор, пока температура последнего не упадет на 5 – 7 градусов. Используя графическое представление процесса охлаждения, где  $T$  – температура в градусах Цельсия,  $t$  – время в секундах,

рассчитать скорость охлаждения латунного диска  $n=(T(t+dt) - T(t))/dt$ .  
 Результаты эксперимента представить в виде таблицы:

Теплоемкость латуни	Масса латунного диска	T <sub>1</sub> , К	T <sub>2</sub> , К	d, м	d <sub>1</sub> , м	n, К/с	Дж/(мсК)	
							χ <sub>экс</sub>	χ <sub>табл</sub>
	818.6 г							

Используя полученные данные, и формулу (8), определить коэффициент теплопроводности.

**Задание 3.** Сравнить экспериментальное значение коэффициента теплопроводности с табличным значением, провести обсуждение полученных результатов.

Трижды повторив эксперимент, выполнить статистическую обработку полученных результатов по методу Стьюдента.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется коэффициентом теплопроводности?
2. Что такое стационарное тепловое состояние?
3. Объясните процесс теплопроводности с точки зрения молекулярно – кинетической теории.
4. Назовите способы передачи тепла, отличные от теплопроводности, и объясните их механизм.
5. Что называется градиентом температуры?
6. В каких единицах измеряется коэффициент теплопроводности?
7. Какие материалы обладают меньшей, а какие большей теплопроводностью и почему?
8. При выводе формулы для  $\chi$  подразумевалось, что направление потока тепла через исследуемый диск всюду перпендикулярно к его плоскости. Выполняется ли это условие?
9. Почему данный метод не применяется для определения теплопроводности металлов?

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кикоин К. И., Кикоин А. И. Молекулярная физика. -М.: Наука, 1972.
2. Иверонова В. И. Физический практикум. -М.: Наука, 1968, Т.1.
3. Кортнев А. В. и др. Практикум по физике. -М.: Высш. школа, 1967.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-10

### ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТОДОМ ОХЛАЖДЕНИЯ

#### Цель работы

Ознакомиться с классической и квантовой теорией теплоемкости Эйнштейна и Дебая.

#### Задача работы

Методом охлаждения получить графики зависимости теплоемкости алюминиевого и стального образцов от температуры.

#### ТЕОРИЯ

Теплоемкостью тела  $C$  называется отношение бесконечно малого изменения внутренней энергии этого тела  $dU$  к изменению его температуры  $dT$ :

$$C = \frac{dU}{dT}. \quad (1)$$

Внутренняя энергия совпадает с энергией покоя тела (системы) и включает в себя энергию всех внутренних движений в теле и энергию взаимодействия всех частиц, составляющих это тело, включая молекулы, атомы и ионы, электроны, а также нуклоны в ядрах. Заметим сразу, что потенциальные энергии электронных оболочек атомов и ионов, потенциальные и кинетические энергии нуклонов не играют существенной роли при обычных не очень высоких температурах, когда не идут процессы ионизации и возбуждения соответствующих частиц.

Различают удельную теплоемкость – теплоемкость единицы массы вещества (одного килограмма, грамма), молярную теплоемкость – теплоемкость одного моля вещества. Единицы измерения удельной теплоемкости – Дж/кг·К (внесистемная – кал/кг·К), молярной теплоемкости – Дж/моль·К (кал/моль·К).

Различают теплоемкость при постоянном давлении  $C_p$  и теплоемкость при постоянном объеме  $C_v$ . Для таких систем, как твердое тело и жидкость (в отличие от газа), изменение объема при нагревании относительно невелико и

разность  $C_p - C_v$  для одноатомных твердых веществ при  $100^\circ\text{C}$  составляет десятые, сотые и даже тысячные доли газовой постоянной  $R$ . Поэтому зависимостью теплоемкости от изменения объема при нагревании твердого тела обычно пренебрегают и говорят просто об удельной теплоемкости твердого тела  $C_v$ , связывая ее с изменением внутренней энергии единицы массы твердого тела при нагревании на один градус.

## КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОЕМКОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ (КРИСТАЛЛОВ)

Простейшей моделью кристалла является правильно построенная кристаллическая решетка, в узлах которой помещаются атомы, принимаемые за материальные точки. Атомы совершают тепловые колебания около положений равновесия. Если колебания малы, то их можно считать гармоническими. Энергия каждого атома складывается из кинетической и потенциальной. На каждую степень свободы приходится в среднем кинетическая энергия  $\frac{1}{2} kT$ . Из механики известно, что при гармонических колебаниях средние значения кинетической и потенциальной энергии одинаковы. Таким образом, среднее значение полной энергии, приходящейся на одну колебательную степень свободы, равно:

$$\overline{U} = \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = kT. \quad (2)$$

Рассчитаем теплоемкость кристаллической решетки на основе классических представлений. Для простоты будем считать, что все атомы одинаковы. Каждый атом обладает тремя колебательными степенями свободы, а потому на него приходится средняя энергия  $3kT$ . Умножив эту величину на число Авогадро  $N_a$ , найдем внутреннюю энергию твердого тела:

$$U = 3N_a \overline{U} = N_a 3kT = 3RT, \quad (3)$$

здесь учтено, что  $N_a \cdot k = R$ . Отсюда для молярной теплоемкости твердого тела получаем:

$$C_v = \frac{dU}{dT} = 3R \approx 24,9 \text{ Дж/моль}\cdot\text{град}. \quad (4)$$

Этот результат находится в согласии с экспериментально установленным в 1819 г. законом (правилом) П.Дюлонга и А.Пти: *молярная теплоемкость всех химически простых кристаллических твердых тел постоянна и равна  $3R$*  ( $R$  – универсальная газовая постоянная). Мы видим, что закон Дюлонга и Пти находит простое объяснение в классической теории теплоемкости. Он

сравнительно хорошо подтверждается на опыте для многих веществ при не слишком низких температурах.

Рассмотрим твердое тело, которое является химическим соединением, например, NaCl. Его кристаллическая решетка построена из атомов различных типов. Очевидно, молекулярная масса химического соединения равна сумме атомных масс всех атомов, из которых состоит молекула этого соединения. Согласно предыдущим рассуждениям, если в молекуле  $n$  атомов, то на молекулу приходится в среднем энергия  $3nkT$ . Молярная теплоемкость будет  $3nkN_a = 3nR$ , т.е. она в  $n$  раз больше, чем у того же вещества, если бы его молекулы были одноатомными. Иными словами, *молярная теплоемкость твердого соединения равна сумме молярных теплоемкостей элементарных веществ, из которых оно состоит*. Это правило было найдено эмпирически и называется *законом Джоуля и Коппа*. Джоуль высказал его 1844 г. Но только в 1864 г. закон был окончательно сформулирован и подтвержден множеством фактов, полученных Коппом. Следует заметить, что закон Джоуля и Коппа в приведенной выше формулировке обладает большей общностью, чем закон Дюлонга и Пти. Закон Дюлонга и Пти может нарушаться, т. е. атомные теплоемкости химических элементов, входящих в соединение, могут отличаться друг от друга, но закон Джоуля и Коппа остается при этом справедливым.

## НЕСОВЕРШЕНСТВО КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОЕМКОСТИ

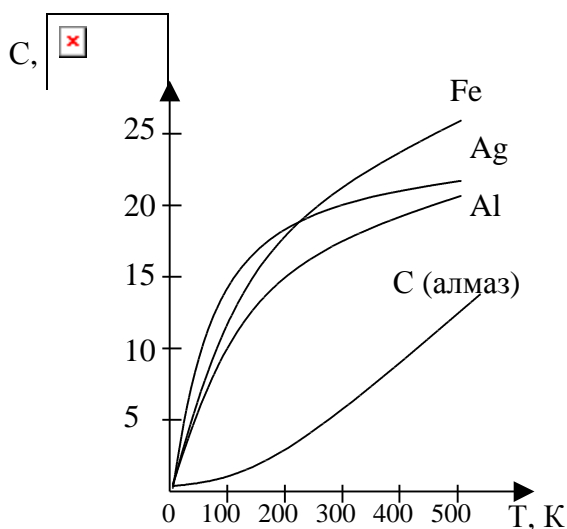


Рис. 1. Зависимость молярной теплоемкости от температуры

Многочисленные опыты по определению теплоемкости большого числа кристаллических твердых тел в широком диапазоне температур показали, что результаты, выражаемые формулами (3) и (4), являются весьма приближенными, а в некоторых случаях просто неверными. Из формул (3) и (4) следует, что молярная теплоемкость не зависит ни от температуры, ни от конкретных свойств кристаллов. Опыты же показали, что в действительности такая зависимость резко она проявляется при низких

температурах. При достаточно низких температурах теплоемкость всех твердых тел быстро уменьшается с понижением температуры. При температуре, стремящейся к абсолютному нулю, теплоемкость твердых тел также стремится к нулю. При высоких же температурах теплоемкость не зависит от температуры при ее дальнейшем возрастании (исключение составляет теплоемкость алмаза, но об этом речь пойдет ниже). Таким образом, опытные факты приводят к заключению, что явления всегда протекают так, что эффективный вклад в теплоемкость вносят не все, а только некоторые степени свободы. При понижении температуры некоторые степени свободы становятся малоэффективными и, наконец, совсем выпадают из игры. Про такие степени свободы говорят, что они "заморожены". Наоборот, при повышении температуры начинают появляться все новые и новые степени свободы, которые ранее были либо малоэффективны, либо совсем заморожены.

Причины несовершенства классической теории теплоемкости твердых тел состоят в следующем:

- в допущении равномерности распределения энергии по степеням свободы независимо от природы колеблющихся атомов и от частоты колебаний;
- в допущении, что колебания одних атомов твердого тела не влияют на колебания других соседних атомов.

Иными словами, недостатки классической теории теплоемкости твердого тела объясняют тем, что в ней не учитывается строение тела, а именно, различие внутренней структуры разных веществ, природа степеней свободы составляющих эти тела частиц.

Трудности классической теории теплоемкости твердых тел были преодолены после того, как теория теплоемкости была построена на квантовой основе.

## **КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОЕМКОСТИ ЭЙНШТЕЙНА**

Первоначальная квантовая теория теплоемкости твердых тел была развита А.Эйнштейном в 1905 г. В основе ее лежало предположение о том, что каждый атом, гармонически колеблющийся в узле кристаллической решетки, имеет три степени свободы, причем в кристалле, построенном из частиц одного сорта, все атомы колеблются независимо друг от друга с одинаковой частотой. Кроме того, А.Эйнштейн предположил, что энергия

атома, гармонически колеблющегося в узле решетки с частотой  $\nu$ , может принимать не любые, а только вполне определенные значения, кратные величине кванта энергии  $h\nu$ , где  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка. Энергия  $\varepsilon$ , приходящаяся на одну степень свободы атома, принимает значения:

$$\varepsilon = nh\nu \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (5)$$

Впоследствии выяснилось, что необходимо принимать во внимание так называемую нулевую энергию  $h\nu/2$ , которая сохраняется даже при абсолютном нуле температуры. Эта энергия не связана с тепловым движением атомов и не влияет на теплоемкость кристаллов. Наличие нулевой энергии сказывается на рассеянии рентгеновских лучей при низких температурах.

Частота атомных колебаний в кристаллах имеет величины порядка  $10^{13}$  с<sup>-1</sup>. Это соответствует кванту энергии  $h\nu$  порядка  $10^{-20}$  Дж, величина которого близка к средней энергии на одну колебательную степень свободы частицы, вычисленной по классической теории ( $\bar{\varepsilon} = kT$ ) при температуре порядка 300 К.

Внутренняя энергия моля твердого тела, состоящего из атомов, независимо колеблющихся с частотой  $\nu$ , может быть вычислена по формуле (3), где под  $\bar{\varepsilon}$  следует понимать среднюю энергию, приходящуюся на одну колебательную степень свободы атомов, имеющих одно из указанных в формуле (5) значений энергии.

Задача определения среднего значения энергии осциллятора была решена в 1900 г. М.Планком в его исследованиях по теории теплового излучения. Этот очень важный вопрос будет подробно рассмотрен при изучении раздела “Оптика”. Сейчас отметим только, что М.Планком была получена следующая формула для  $\bar{\varepsilon}$ :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{2} \left( 1 + \frac{3}{\pi} \frac{h\nu}{kT} \right) \quad (6)$$

Вывод формулы (6) можно найти в [2,3,4].

При высокой температуре, когда  $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ , показательная функция  $e^{-x}$  близка к единице, поэтому можно



воспользоваться следующей приближенной формулой, справедливой при  $x \ll 1$ :

Тогда формула (6) приводит к классическому результату:

$$\bar{\epsilon} = kT.$$

Получается, что при высоких температурах средняя энергия, приходящаяся на одну колебательную степень атома, не зависит от частоты его колебаний. В этих условиях теплоемкость твердого тела подчиняется закону Дюлонга и Пти (4).

Если  $kT \ll h\nu$  или  $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ , то и  $e^{-\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 - \frac{h\nu}{kT}$ . Поэтому в знаменателе формулы (6) можно пренебречь единицей, тогда средняя энергия

оказывается равной:  $\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{2}$ , т.е. очень быстро убывает с уменьшением температуры. Таким образом, квантовые представления позволяют объяснить известное положение термодинамики, согласно которому теплоемкость конденсированных систем стремится к нулю при  $T \rightarrow 0$ . Это положение называется третьим законом термодинамики или теоремой Нернста.

Рассмотрим несколько подробнее зависимость теплоемкости твердых тел, состоящих из одинаковых атомов, от температуры. Запишем внутреннюю энергию моля твердого тела по формулам (3) и (6) в виде:

$$U = \frac{3NkT}{2} \left( 1 - \frac{h\nu}{2kT} \right),$$

а теплоемкость

$$C_V = \frac{3Nk}{2} \left( 1 - \frac{h\nu}{2kT} \right). \quad (8)$$

Умножив числитель и знаменатель (8) на  $k$  и учтя, что  $\frac{h\nu}{kT} = \frac{h\nu}{kT}$ , получим:

(9)

Это и есть формула Эйнштейна. Проанализируем ее. Допустим, что; температура очень высока, т.е.  $T \gg \theta$ , тогда множитель в квадратных скобках выражения (9) с учетом (7) стремится к единице и, следовательно,  $\lim_{T \rightarrow \infty} C_V = 3R$ , что, в соответствии с опытом, доказывает справедливость закона Дюлонга и Пти при высоких температурах.

Из формулы (9) следует также (если раскрыть неопределенность), что при очень низких температурах  $\lim_{T \rightarrow 0} C_V = 0$ .

Итак, теория теплоемкости твердых тел Эйнштейна представляла собой крупный шаг вперед по сравнению с классической теорией. Она дает для молярной теплоемкости нуль при абсолютном нуле температуры и приводит к закону Дюлонга и Пти при высоких температурах. Более того, теория Эйнштейна показывает, что температура, при которой молярная теплоемкость достигает значения  $3R$ , зависит от частоты колебаний атомов.

Так как  $\theta$  и  $R$  величины постоянные, а для данного твердого тела  $\theta$  в теории Эйнштейна также считается величиной постоянной, то можно найти такую температуру  $T_0$ , при которой  $C_V = 3R$ . При этой температуре, различной для разных тел, молярные теплоемкости всех твердых тел будут одинаковы.

Действительно, внося  $T_0 = \theta / 3$  в (9), находим, что

Температура  $T_0$ , при которой молярная теплоемкость твердого тела становится равной  $2,78R$ , является характеристической температурой Эйнштейна. Например, для алмаза (легкие атомы С) характеристическая температура равна 1475 К, а для свинца (тяжелые атомы Pb) она равна 88 К.

Основным недостатком теории теплоемкости твердых тел Эйнштейна является расхождение ее с опытом в области низких температур. По формуле (9) при  $T \rightarrow 0$  теплоемкость слишком быстро стремится к нулю - приблизительно экспоненциально. Опыт показывает, что в действительности приближение теплоемкости к нулю идет по степенному закону  $C_V \sim T^3$ . При других температурах формула Эйнштейна также находится только в качественном, но не в количественном согласии с опытом. Эти расхождения связаны с упрощением расчета, в котором предполагается, что все

гармонические осцилляторы колеблются с одной и той же частотой. На самом деле кристаллическую решетку следует рассматривать как связанную систему взаимодействующих частиц. При вычислении теплоемкости тело можно рассматривать как систему гармонических осцилляторов, но с различными частотами. Задача сводится к вычислению этих частот, т.е. к отысканию так называемого спектра частот. Но это было указано еще самим Эйнштейном.

## **ПОНЯТИЕ О КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ДЕБАЯ ДЛЯ ТЕПЛОЕМКОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

В теории Дебая (1912 г.), далее развитой Борном, кристалл рассматривается как сплошное (непрерывное) упругое тело (атомы которого очень сильно связаны между собой), участвующее в колебаниях со всевозможными частотами. Тепловые колебания отождествляются с упругими стоячими волнам в теле. Простейшей аналогией таких колебаний являются колебания натянутой струны. Число возможных колебательных состояний принимается равным числу степеней свободы, причем берутся наиболее медленные, т.е. основные колебания. Частоты этих, так называемых нормальных колебаний, весьма различны, начиная от низких, в сотни герц, и кончая инфракрасными, порядка Гц. Суперпозиция этих колебаний с различными случайными амплитудами и фазами дает тепловое движение твердого тела. Величина энергии этого движения

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu} \epsilon_{\nu}^2$$

Вычисление нормальных частот является весьма трудной задачей. Результаты вычисления хорошо совпадают с опытом.

Из теории Дебая следует, что при очень низких температурах теплоемкость одноатомного твердого тела пропорциональна третьей степени абсолютной температуры:

$$C_v \propto T^3 \quad (10)$$

Это закон кубов Дебая, который хорошо объясняет ход теплоемкости вблизи абсолютного нуля. Внутренняя энергия твердого тела вблизи абсолютного нуля пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры ( $U \propto T^4$ ). При высоких температурах теория Дебая привела к результатам, совпадающим с классическими результатами (закон Дюлонга и Пти) (рис. 2).

Весьма важную роль в теории Дебая играет понятие характеристической температуры Дебая, начиная с которой теплоемкость

быстро убывает с понижением температуры. Это та температура, при которой энергия тепловых движений становится равной максимальной энергии осцилляторов: \_\_\_\_\_, отсюда:

При температурах, значительно меньших \_\_\_\_\_, теплоемкость убывает пропорционально кубу температуры ("закон \_\_\_\_\_"), что соответствует опытному данным. Температура Дебая \_\_\_\_\_ может считаться границей между высокими и низкими температурами. При температурах выше \_\_\_\_\_ теплоемкость следует классическому закону (см. рис. 2), ниже этой температуры для объяснения зависимости \_\_\_\_\_ необходимо использовать квантовые представления. С точки зрения квантовой теории теплоемкости тот факт, что некоторые вещества (алмаз, бор и др.) не подчиняются закону Дюлонга и Пти даже при комнатных температурах, объясняется именно тем, что у этих веществ характеристическая температура Дебая настолько высока, что комнатная температура должна считаться низкой температурой. Так, если для серебра \_\_\_\_\_ = 210 °С, для алюминия \_\_\_\_\_ 400 °С, для свинца \_\_\_\_\_ 90 °С, то характеристическая температура Дебая для алмаза равна 2000 °С. Вместе с тем, если температуру тела нормировать на температуру Дебая, то ход температурных зависимостей теплоемкости различных веществ, отнесенной к числу атомов в молекуле данного вещества  $n$ , весьма близок (рис. 2).

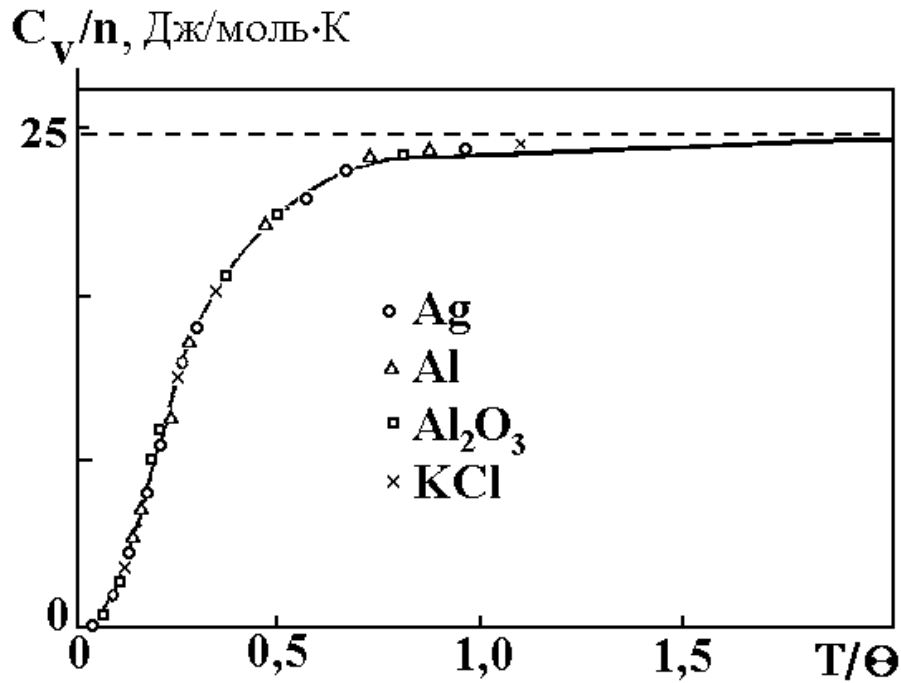


Рис. 2. Температурные зависимости теплоемкости различных веществ

В табл. 1 приведены численные значения температуры Дебая для некоторых простых и сложных кристаллических соединений.

Таблица.1

Значения характеристической температуры Дебая для некоторых типичных твердых тел, определенные по результатам измерений упругих постоянных и теплоемкости

Кристалл	$Q_D$ , К, определенная по упругим постоянным	$Q_D$ , К, определенная по теплоемкости при низких температурах
Алюминий	438	423
Свинец	135	102
NaCl	289	321
LiF	610	732

Выше были изложены основы квантовой теории теплоемкости твердых тел. Более строгое и полное изложение этой теории содержится в статистической физике и термодинамике.

Измерения теплоемкости и ее температурного хода играют большую роль в исследованиях твердых тел. Это связано с тем, что теплоемкость непосредственно определяется колебаниями атомов в кристаллической решетке. Ясно, что характер этих колебаний должен зависеть от структуры решетки, ее симметрии и т.д. Поэтому различные аномалии теплоемкости, наблюдаемые в веществе, могут дать информацию о характерных для него внутренних превращениях. Так, фазовый переход 2-го рода в кристалле, в результате которого происходит изменение структуры его решетки, мы можем обнаружить по скачкообразному изменению его теплоемкости.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

### Приборы и принадлежности

Печь с автотрансформатором ЛАТР, отградуированная термопара, милливольтметр (на 15-30 мВ), набор образцов (исследуемые алюминиевый и стальной, а также эталонный - медный), секундомер, график зависимости теплоемкости эталонного образца от температуры.

Для определения теплоемкости воспользуемся одним из методов определения теплоемкости металлов - методом охлаждения.

### ИЗМЕРЕНИЕ ТЕПЛОЕМКОСТИ МЕТОДОМ ОХЛАЖДЕНИЯ

Металлический образец, имеющий температуру более высокую, чем температура окружающей среды, попадая в эту среду, охлаждается. Количество теплоты  $Q$ , теряемой образцом металла за малый промежуток времени  $\Delta t$ , может быть записано в виде:

$$Q = -\rho V c \frac{dT}{dt} \Delta t, \quad (11)$$

где  $c$  - теплоемкость металла,  $\rho$  - его плотность,  $T$  - температура, которая принимается одинаковой во всех точках образца в силу малости размеров образца и большой теплопроводности металла. Интегрирование здесь ведется по всему объему образца.

Это же количество теплоты может быть выражено и по закону Ньютона, т.е. пропорционально площади  $S$ , с которой происходит отдача тепла и разности температур тела  $T$  и окружающей образец среды  $T_0$ :

$$Q = \dots, \quad (12)$$

где  $\dots$  - коэффициент теплоотдачи. Здесь интегрирование ведется по всей поверхности образца.

Сравнивая выражения (11) и (12), получаем:

$$\dots, \quad (13)$$

и учитывая, что величины  $\dots$ ,  $c$  и  $\dots$  не зависят от координат точек объема, а величины  $\dots$ ,  $T$  и  $T_0$  не зависят от координат точек поверхности образца, можно написать:

$$\dots, \quad (14)$$

где  $V$  - объем образца,  $S$  - его поверхность. Выражение (14) можно переписать в виде:

$$\dots, \quad (15)$$

где  $m = \dots$  - масса образца; знак минус показывает, что с увеличением времени температура образца убывает. Интегрирование выражения (15) дает:

$$\dots, \quad (16)$$

где  $\dots$  - максимальная температура образца.

При интегрировании выражения (15) сделано допущение, что величина  $\dots$  не зависит от температуры, что хорошо оправдывается при малых значениях разности ( $\dots$ ). Логарифмируя выражение (16), получим:

$$\dots. \quad (17)$$

Это уравнение является уравнением прямой линии, построенной в координатах  $\dots$  и  $t$ . Величина  $\dots$  представляет собой тангенс угла наклона этой прямой к оси времени. Получив экспериментально значения температуры образцов для ряда значений времени, нужно взять логарифмы от  $(T - T_0)$  и на миллиметровой бумаге построить график (см. для примера рис.3,а). На том же листе построить аналогичные графики еще для двух образцов.

Для каждого образца из этих графиков можно определить значения тангенсов углов наклона прямой к оси времени. Если затем взять их отношение для исследуемого и эталонного образцов при одной температуре, обозначив его через  $K$ , то очевидно, из (17):

$$K = \frac{C_1}{C_2} \frac{m_2}{m_1}, \quad (18)$$

где  $C_2$  - теплоемкость медного (эталонного) образца,  $C_1$  - теплоемкость исследуемого образца (стального или алюминиевого),  $m_2$  и  $m_1$ , соответственно, их массы.

Из (18)  $\frac{C_1}{C_2} = \frac{m_2}{m_1} K$ , (19)

Величины  $K$  и  $S$  принимаем одинаковыми для обоих образцов в одних и тех же интервалах температур.

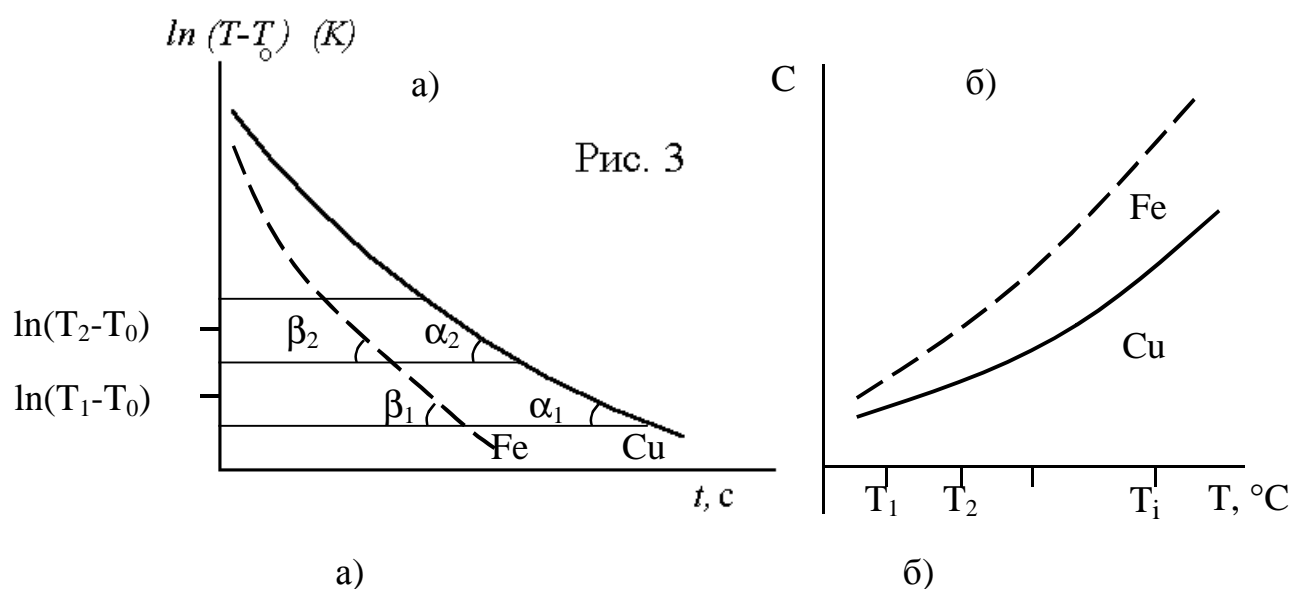


Рис. 3

По формуле (19) можно определить теплоемкость исследуемого образца при данной температуре, зная зависимость теплоемкости от температуры эталонного образца.

### ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Схема установки для измерения теплоемкости методом охлаждения изображена на рис. 4. На общей панели укреплены электропечь А, штатив В с термопарой, который может перемещаться по двум направляющим. Образец представляет собой цилиндр длиной до 30 мм и диаметром 5 мм с высверленным с одного конца каналом. В этот канал помещают термопару, концы которой подведены к милливольтметру. С помощью штатива образец



с термопарой помещается в печь. Температура образца отсчитывается прямо по шкале милливольтметра, который снабжен специальным (градуировочным) графиком перевода его показаний в значения температур с помощью термопары.

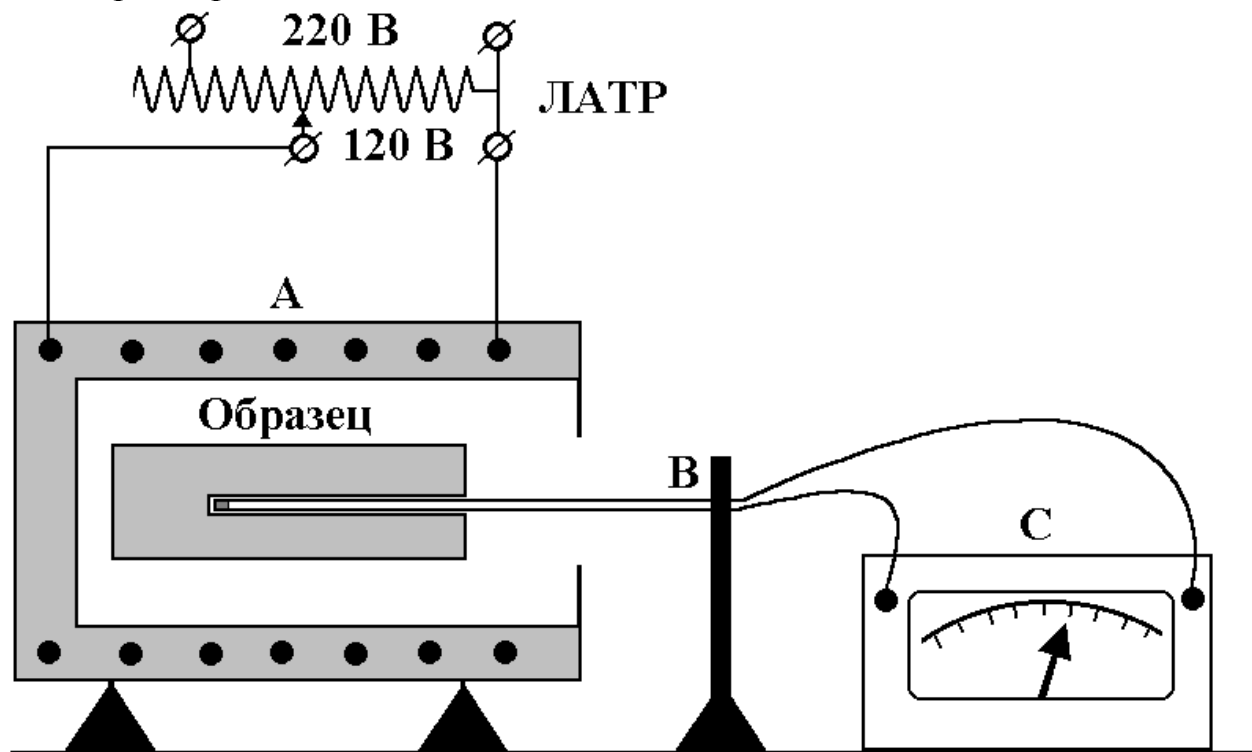


Рис. 4. Установка для измерения теплоемкости

### ХОД ЭКСПЕРИМЕНТА

1. Закрепляют образец в штативе с термопарой.
2. Вводят образец с термопарой в печь так, чтобы он полностью оказался внутри ее.
3. Включают ЛАТР в сеть, установив стрелку вольтметра на 120 В.
4. Когда образец нагреется до 20 мВ (по показаниям милливольтметра), печь выключают, и образец быстро выдвигают из печи как можно дальше от ее отверстия. Нагретый образец охлаждается в неподвижном воздухе, имеющем температуру  $T_0$  до температуры  $T$  (ниже  $100^\circ\text{C}$ ). С помощью секундомера через каждые 20 секунд производят запись температуры образца по показаниям милливольтметра (т. е. в милливольтгах).

**ВНИМАНИЕ!** Когда производят нагрев алюминиевого образца, его выдвигают из печи при 15 мВ на милливольтметре, так как температура его плавления намного ниже, чем у стали и меди, и он может расплавиться в печи. Работа требует большой аккуратности при выполнении эксперимента.

5. Результаты наблюдений занести в таблицу 2.

Таблица 2

Время $t, c$	Образец								
	Медный			Алюминиевый			Стальной		
	$\varepsilon,$ мВ	$(T-T_0), K$	$\ln(T-T_0)$	$\varepsilon,$ мВ	$(T-T_0), K$	$\ln(T-T_0)$	$\varepsilon,$ мВ	$(T-T_0) K$	$\ln(T-T_0)$

6. На миллиметровой бумаге в координатах  $\ln(T-T_0)$  строят кривые охлаждения для всех трех образцов (желательно на одном графике). Для построения кривых желательно использовать карандаши разного цвета.

7. Полученные графики охлаждения разбиваются вертикалями на такие участки, где они прямолинейны. Для каждого из таких участков определяется тангенс угла наклона к оси времени. Затем для одного и того же интервала температур находится отношение тангенсов угла наклона исследуемого и эталонного образцов (К). По формуле (19) определяется значение теплоемкости стального и алюминиевого образцов ( $C_1$ ). Значение теплоемкости меди ( $C_2$ ) для соответствующих температур берутся из графика зависимости  $C_2(T)$  для эталонного образца, который выдается дежурным лаборантом. Для перевода  $C_1$  из — в — можно воспользоваться отношением — — — — —. Массы образцов определяются взвешиванием. Результаты занести в таблицу 3.

Таблица 3

	Медь		Алюминий		Сталь	
$T, K$	$C_1, \text{—}$	$C_1, \text{—}$	$C_1, \text{—}$	$C_1, \text{—}$	$C_1, \text{—}$	$C_1, \text{—}$

8. По данным табл. 8 строят графики зависимости теплоемкости исследуемых образцов от температуры.
9. Проводят обсуждение полученных графиков.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется теплоемкостью тела?
2. В чем заключается суть классической теории теплоемкости твердых тел? Сформулируйте закон Дюлонга и Пти.
3. Каковы недостатки классической теории теплоемкости? Когда они проявляются?
4. Из каких положений исходит квантовая теория Эйнштейна?
5. Проанализируйте формулу теплоемкости Эйнштейна (19) при  $T \rightarrow \infty$  и  $T \rightarrow 0$ .
6. Какие усовершенствования внесены в теорию теплоемкости твердых тел Дебая? Для какого интервала температур справедлив закон кубов Дебая?
7. Каково физическое содержание понятия характеристической температуры Дебая?
8. Почему при комнатной температуре теплоемкость алмаза не подчиняется закону Дюлонга и Пти?
9. На чем основано экспериментальное определение теплоемкости металлов методом охлаждения?
10. Какую роль в эксперименте выполняет медный образец?
11. Каков ожидаемый ход графической зависимости теплоемкости исследуемых образцов от температуры?

### ЛИТЕРАТУРА

1. Иверонова В.И. Физический практикум. Механика и молекулярная физика. -М.: Наука, 1967.
2. Кикоин А.К. Кикоин И.К. Молекулярная физика. -М.: Наука, 1976.
3. Матвеев А. Н.. Молекулярная физика. -М.; Высшая школа, 1987.
4. Сивухин Д.В.. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. -М.: Наука, 1993, Т. 2.
5. Блэйкмор Дж. Физика твердого тела. -М.: Мир, 1988.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. -М.: Наука, 1986.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2-11

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ГАЗОВ

### Цель работы

Изучение процессов переноса в воздухе, рассматриваются теоретические аспекты явления теплопроводности.

### Задача работы

Осваивается методика измерений коэффициента теплопроводности методом цилиндрического слоя.

### ТЕОРИЯ

Беспорядочные движения частиц газа обуславливают процессы диффузии, теплопроводности, внутреннего трения и т.д. Все эти явления имеют много общего и объединяются общим названием явления переноса. В настоящей работе изучается явление теплопроводности в воздухе.

Известно три способа передачи тепла: конвекция, теплопроводность, излучение. В первых двух случаях в процессе передачи тепла участвует вещество. Процесс конвекции обусловлен разностью удельных весов нагретых и холодных слоев газа. Теплопроводность - процесс переноса тепла, отличительной чертой которого является атомно-молекулярный характер передачи энергии. Сталкиваясь молекулы передают друг другу “эстафетным способом” кинетическую энергию. Процесс теплопроводности наблюдается в системе при наличии градиента температуры.

Предположим, что в некотором объеме газа (рис. 1), в положительном направлении оси  $Z$  существует градиент температуры  $\frac{dT}{dz}$ . Тогда в противоположном направлении, в область более низких температур, будет наблюдаться поток тепла, который по закону Фурье пропорционален градиенту температуры:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dz} \quad (1)$$

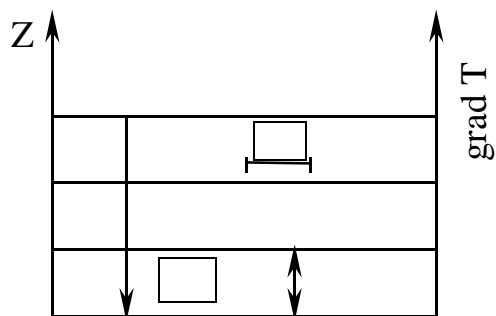


Рис.1

$\square$  - величина площадки, через которую определяется поток тепла,  $\chi$  - коэффициент теплопроводности газов. Знак “минус” подчеркивает, что поток энергии и вектор градиента температуры направлены в противоположные стороны. Величина коэффициента теплопроводности согласно молекулярно-кинетической теории определяется:

$$\chi = -\frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda c_v \text{grad } T \quad (2)$$

где  $\rho$  - плотность газа,  $\bar{v}$  - средняя скорость теплового движения,  $\lambda$  - средняя длина свободного пробега,  $c_v$  - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Если в уравнении (1) градиент температуры -  $\square$

принять равным 1, то размерность коэффициента теплопроводности будет  $[вт/мК]$ . Из выражения (2) следует, что  $\chi$  не зависит от давления, так как плотность газа пропорциональна, а длина свободного пробега обратно-пропорциональна давлению газа  $\square$ ,  $\square$  [1]. Независимость коэффициента теплопроводности от давления осуществляется не всегда. Так для давлений, при которых длина свободного пробега молекул становится соизмерима с размерами сосуда, содержащего газ, или больше этой величины, т.е.  $\square \geq l$ , эта зависимость нарушается. В этом случае столкновения между молекулами самого газа перестают играть главную роль, существенными становятся только столкновения молекул со стенками сосуда, в котором заключен газ. Молекула, столкнувшись с горячей стенкой, получает от нее кинетическую энергию и переносит ее к более холодной стенке, не испытывая промежуточных столкновений. Ясно, что в таком случае перенос тепла будет происходить тем медленнее, чем меньше носителей тепла, то есть, чем больше разрежен газ. Такой перенос формально может быть описан прежней формулой 4, но величину  $\lambda$  следует заменить величиной  $l$  - расстоянием между стенками сосуда [2]. Процесс передачи тепла в этом случае носит название «теплопередача».

Для воздуха при  $20^0$  С длина свободного пробега молекул выражается эмпирической формулой [3]:

$$\lambda = \square$$

где  $P$ - давление газа. Пользуясь этим соотношением, можно оценить то давление, при котором длина свободного пробега становится сравнима с размерами эмпирического объема.

Таким образом, независимость коэффициента теплопроводности от плотности газа имеет место лишь до тех пор, пока длина свободного пробега мала по сравнению с размерами сосуда. Когда  $\lambda$  и  $l$  становятся соизмеримы друг с другом, при уменьшении плотности газа, коэффициент  $\kappa$  начинает убывать. Это убывание идет по линейному закону: коэффициент  $\kappa$  становится пропорционален плотности газа, при низком давлении теплопроводность очень мала. На этом принципе основано устройство сосудов Дюара, в которых теплоизоляция между стенками сосудов достигается с помощью вакуума.

В тоже время величина  $\kappa$  при любом давлении зависит от температуры, так как средняя скорость молекул, входящая в уравнение (2) зависит от температуры  .

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для изучения явления теплопроводности рассмотрим систему, состоящую из двух цилиндров с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  (рис.2,а). Температуры цилиндров соответственно равны  $T_1$  и  $T_2$  поддерживаются с помощью внешнего источника тепла постоянными. Внутренний цилиндр может быть, в частности, просто проволокой, по которой пропускается электрический ток и она служит нагревателем, т.е.  $T_1 > T_2$  (рис. 2,б). Поток тепла направлен от более нагретой внутренней поверхности к внешней. В случае стационарного

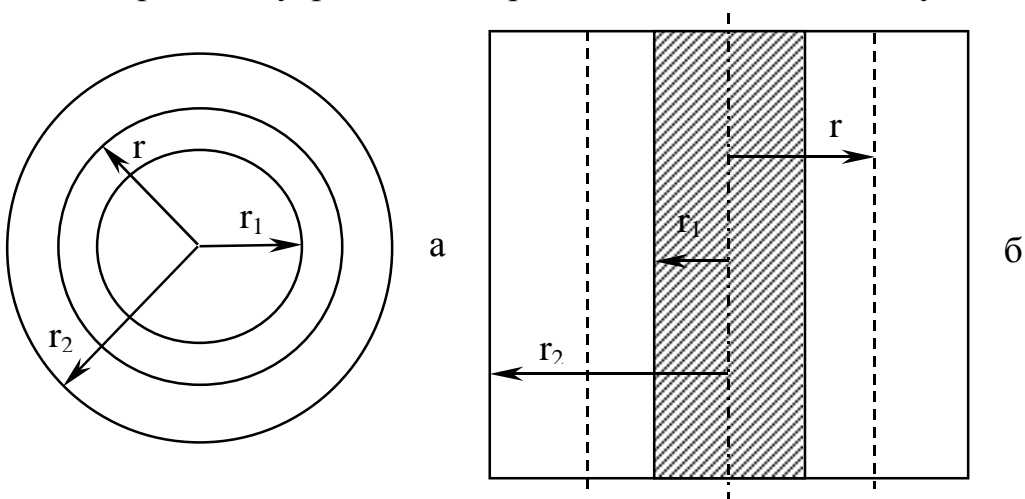


Рис. 2. Система из двух цилиндров

потока распределение температур между цилиндрами будет постоянно во времени.

Используя соотношение (1), получим, что поток тепла  $Q$  в единицу времени через цилиндрическую поверхность высотой  $h$  и радиусом  $r$  выражается формулой:

$$Q = \dots$$

Интегрируя это выражение при значениях температур внутреннего и внешнего цилиндров  $T_1$  и  $T_2$ , получим:

$$Q = \dots$$

В стационарном состоянии поток тепла  $Q$  можно принять равным мощности нагревателя  $W$  и тогда коэффициент теплопроводности имеет вид:

$$\lambda = \dots$$

(3)

На практике все температуры мы определяем по шкале Цельсия, которая с абсолютной температурой связана соотношением  $t = T - 273^{\circ}\text{C}$ . Следовательно, разность температур  $T_1 - T_2$  в выражении (3) может быть подставлена в (3) в градусах Цельсия  $t_1 - t_2$  (как она и определяется в эксперименте).

Таким образом, для определения величины коэффициента теплопроводности надо определить: количество тепла, переносимого от внутренней поверхности к внешней, разность температур между внутренним и внешним цилиндром, размеры системы. Все эти величины находятся из эксперимента.

Следует иметь в виду, что полученные значения будут несколько завышены, так как в процессе теплопроводности определенную роль могут играть процессы излучения и конвекции. Влияние конвекции на полученные экспериментальные результаты можно оценить, определяя коэффициент теплопроводности при разных давлениях воздуха. Известно, что с увеличением давления интенсивность конвекционного переноса тепла растет. Если в результате эксперимента обнаружится тенденция роста коэффициента теплопроводности с увеличением давления, то ее можно объяснить наличием конвективных потоков. Роль теплового излучения может быть оценена с помощью закона Стефана – Больцмана, по которому с единицы поверхности абсолютно черного тела излучается энергия  $W = \sigma T^4$ , где  $T$  – абсолютная

температура тела, а . Полная энергия, передаваемая при излучении от одного цилиндра к другому, не превышает

$$\text{,} \quad (4)$$

где  $S$  – площадь поверхности внутреннего цилиндра.

### ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Для измерения коэффициента теплопроводности воздуха используется измерительная труба 1, по оси которой натянута тонкая металлическая проволока (рис. 3). По проволоке пропускается электрический ток  $I$  от источника 2. Температура стенок внешнего цилиндра определяется температурой воды, циркулирующей через рубашку 3, и измеряется термометром 4.

Сила тока, протекающего по проволоке, измеряется амперметром 5, напряжение  $U$  на концах проволоки измеряется цифровым вольтметром 2. Произведение  равно мощности  $W$  подводимого тока. Температура проволоки находится по ее электрическому сопротивлению по закону Ома

. В области используемых температур сопротивление меняется по закону  $R = R_0(1 + at)$ , где  $R$  и  $R_0$  сопротивление при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ ;  $a$  – температурный коэффициент сопротивления материала проволоки (для данной проволоки  $a = \text{$ ).

Обозначим сопротивление проволоки в начале опыта до ее нагревания  $R_1$ . Температура проволоки  $t_1$  при этом принимается равной температуре проточной воды в рубашке. После увеличения силы тока, соответствующая

температура  $t_2$  определяется .

Величина разности температур между проволокой и наружным цилиндром выразится соотношением:

$$\text{.$$



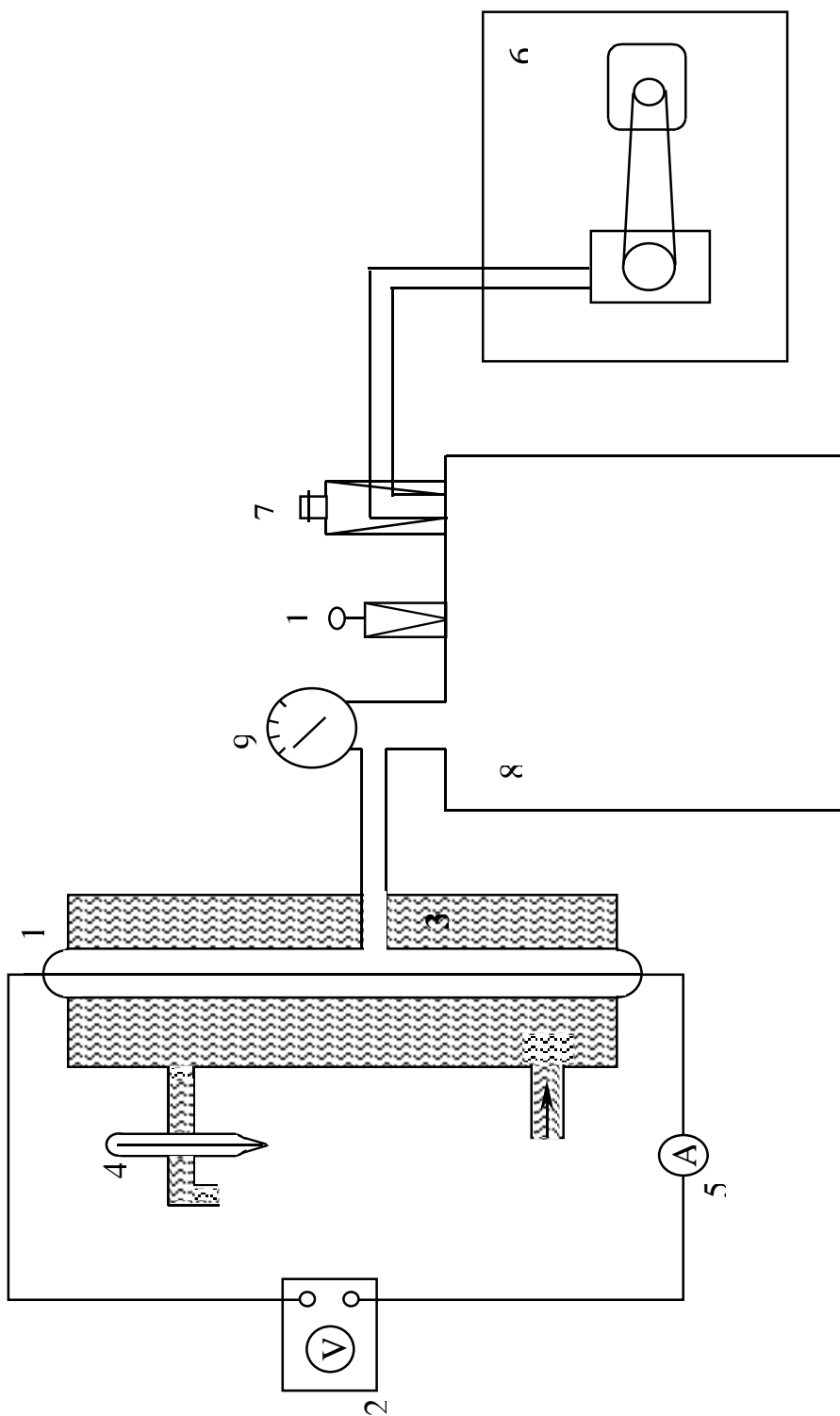


Рис. 3. Схема эксперимента

Для выяснения влияния давления на величину коэффициента теплопроводности в установке предусмотрена возможность откачки воздуха с помощью электрического насоса 6. Электрический насос с помощью вакуумного шланга соединен с краном 7, который установлен на вакуумном баллоне 8 – форбаллон. Форбаллон служит для увеличения объема откачиваемого пространства, что необходимо для плавной работы насоса. На крышке форбаллона установлен вакуумметр 9. Для измерения давления в системе необходимо показания вакуумметра вычесть из величины атмосферного давления. При откачке воздуха из измерительной системы необходимо: включить насос, открыть кран 7.

Для напуска воздуха в систему на крышке форбаллона имеется натекатель 10. Откачав воздух до требуемого значения с помощью натекателя добиться того, чтобы стрелка вакуумметра остановилась на требуемом значении давления.

После окончания измерений, прежде чем выключить электрический насос, следует перекрыть кран 7, а затем уже выключить насос.

### **ВНИМАНИЕ!**

**Указанная последовательность операции при выключении насоса строго необходима, иначе масло, находящееся в насосе неизбежно попадет в форбаллон.**

### **ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА**

1. Перед началом эксперимента необходимо обеспечить водяное охлаждение измерительной трубы. Температуру воды, протекающей через рубашку, измерить термометром; для установления постоянной температуры в рубашке водяного охлаждения рекомендуется начать измерения не ранее чем через 10 минут.

2. Собрать цепь по схеме (рис. 4). В качестве источника питания

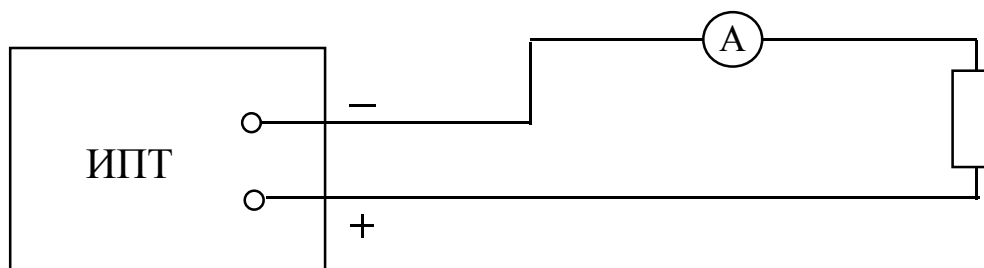


Рис. 4. Схема установки

используется прибор Б5-3, в качестве амперметра – прибор В7-22А. На приборе В7-22А нажать кнопки “мА” и “2000”, включить источник питания и амперметр в сеть.

3. Сначала провести измерение начального сопротивления проволоки  $R_1$ . Через проволоку пропускается малый ток (0.05 А), при котором температура проволоки практически не отличается от температуры стенок трубки. Напряжение измеряется цифровым вольтметром и начальное сопротивление определяется по закону Ома.

4. Для проведения дальнейших измерений установить при помощи источника питания путем подбора напряжения требуемый ток ( $I=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  А), величина которого контролируется по амперметру. При переходе к каждому новому значению тока нужно выждать несколько минут до установления устойчивого значения напряжения. При токе нагрева  $I=0.6$  А производятся измерения при различных давлениях воздуха в измерительной трубе ( $P = 200, 400, 600$  мм. рт. ст.).

5. Рассчитать зависимость температуры проволоки от мощности нагрева  $W$ , построить ее график. Результаты занести в таблицу:

$I, \text{А}$	$U, \text{В}$	$R, \text{Ом}$	$t, ^\circ\text{С}$	$W, \text{Вт}$
0.2				
0.4				
0.6				
0.8				

6. Определить величину коэффициента теплопроводности при различных температурах. Результаты занести в таблицу:

$W, \text{Вт}$	$r_1, \text{м}$	$r_2, \text{м}$	$l, \text{м}$	$T_1 - T_2, ^\circ\text{С}$	$c, \text{Вт/м К}$

7. Определить величину коэффициента теплопроводности при различных давлениях, при какой-то одной температуре тока, проходящего через проволоку.

8. Оценить величину мощности излучения проволоки по закону Стефана–Больцмана.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите три механизма передачи тепла. В чем их физическая суть?
2. Каковы выражение и размерность коэффициента теплопроводности?
3. Как выводится размерность коэффициента теплопроводности?
4. Каков физический смысл коэффициента теплопроводности?
5. Как зависит  $\chi$  от давления газа и от градиента температуры газа?
6. На каком принципе устроен сосуд Дьюара?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев А. Н. Молекулярная физика -М.: Высшая. школа, 1987.
2. Сивухин Л. В. Общий курс физики: Термодинамика и молекулярная физика -М.: Наука, 1990.
3. Булкин П.С. Общий физический практикум, Молекулярная физика -М.: МГУ, 1988.
4. Бекнев В.С., Епифанов В.М., Леонтьев А.И. и др. Газовая динамика. Механика жидкости и газа / Под общ.ред. А.И. Леонтьева -М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
5. Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М. и др. / Под ред. Луканина В.Н. Теплотехника. -М.: Высш. шк., 1999.

## МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Составители:

Афанасьев Александр Диомидович  
Дорохова Виктория Вольфовна  
Заирова Галина Матвеевна  
Кузнецова Галина Анатольевна  
Климушкин Дмитрий Юрьевич  
Левиант Владимир Маркович  
Ловцов Сергей Владимирович  
Мартынович Евгений Федорович  
Щербаченко Лия Авенировна

Научный редактор - проф. А.Д. Афанасьев

Редактор Э.А. Хребтова

ЛР № 020592 от 09.07.97

Подписано в печать 28.01.03 Формат 60x90 1/16.

Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. - печ. л. 10.

Тираж 170 экз. План 2003. Поз. \_\_\_\_\_. Зак. \_\_\_\_\_.

Редакционно-издательский отдел  
Иркутского государственного университета  
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36