

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

МЕХАНИКА

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ

ИРКУТСК 2001

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

Механика: Лабораторный практикум по физике. Под ред. проф.
А.Д. Афанасьева. – Иркутск: Иркутский ун-т, 2001. –108 с.

Пособие содержит описания 11 лабораторных работ по курсу общей физики,
раздел механика. Описания лабораторных работ предназначены для
студентов физических специальностей вузов.

© Иркутский государственный
университет, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лабораторная работа 0-1 Физические измерения и обработка результатов (Афанасьев А.Д., Левиант В.М.)	4
Динамика твердого тела	
Лабораторная работа 1-1 Определение ускорения свободного падения с помощью маятников (Дорохова В.В, Роскин О.В., Щербаченко Л.А.)	24
Лабораторная работа 1-2 Изучение вращательного движения твердого тела. (Кузнецова Г.А.) .	32
Лабораторная работа 1-3 Изучение моментов инерции твердых тел пра- вильной геометрической Формы (Роскин О.В., Щербаченко Л.А.)	47
Лабораторная работа 1-4 Трение качения (Дорохова В.В., Ловцов С.В.)	56
Деформация твердого тела	
Лабораторная работа 1-5 Определение модуля сдвига статическим методом (Ловцов С.В., Тимощенко Г.Т.) .	62
Лабораторная работа 1-6 Изучение напряженно-деформированного состояния твердого тела (Дорохова В.В., Ловцов С.В.).	70
Законы сохранения	
Лабораторная работа 1-7 Упругие столкновения (Заирова Г.М., Кузнецова Г.А.)	78
Лабораторная работа 1-8 Неупругие столкновения (Дорохова В.В., Заирова Г.М.)	86
Колебания и волны	
Лабораторная работа 1-9 Изучение собственных колебаний струны методом резонанса (Заирова Г.М., Кузнецова Г.А.).....	92
Лабораторная работа 1-10 Определение скорости звука и модуля Юнга в твердых телах (Заирова Г.М., Кузнецова Г.А.)..	100

Лабораторная работа 0-1

ФИЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Введение

Физика - экспериментальная наука. Она основывается на экспериментально установленных фактах. Факты остаются, а их интерпретация может со временем меняться. Факты устанавливаются из наблюдений и опытов, которые в свою очередь приобретают особую ценность, когда они выражают физические величины числами, которые порождаются измерениями.

Измерением называют процесс сравнения параметров измеряемого объекта с такими же параметрами эталонного объекта (измерительного прибора). Следует различать два способа измерения. *Прямое* - при котором непосредственно измеряются требуемые параметры, например, линейные размеры тела, вес, сопротивление и т.д. *Косвенное* - при котором требуемую величину вычисляют по формуле содержащей непосредственно измеренные величины.

Ясно, что по самому своему определению измерение (сравнение) не дает точного, истинного значения измеряемой величины, которое обозначим через x - измерение всегда осуществляется с *ошибками* (погрешностями). В свою очередь точность измерений зависит от способов контроля и обработки ошибок.

Контроль ошибок, помимо методов стандартизации измерительных приборов, включает, также, классификацию ошибок. Различают три типа ошибок, возникающих при измерениях: грубые ошибки или промахи, систематические и случайные.

Промахи - ошибки, сделанные вследствие неверной записи результата измерения, неправильно прочитанного показания прибора и т.д. Их источником, как правило, является невнимание, неаккуратность экспериментатора.

Систематические ошибки вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном проведении одних и тех же измерений. Их величина одинакова во всех измерениях, проводящихся одним и тем же методом с помощью одних и тех же измерительных приборов. Причиной возникновения систематических ошибок может служить, например, неисправный измерительный прибор, которым производятся измерения.

Случайные - ошибки возникающие вследствие причин, действие которых неодинаково в каждом измерении и не может быть учтено. Их величина различна даже для измерений, выполненных одинаковым образом.

Данная разработка посвящена описанию статистических методов обработки случайных ошибок, решению вопроса о точности измерений и оценке истинных значений измеряемых величин.

Результат измерения и математическое ожидание результата

Если отдельные наблюдения дают несколько отличные друг от друга результаты, то мы имеем дело с ситуацией, когда случайная погрешность играет существенную роль. Наличие случайно действующих факторов приводит к тому, что результаты отдельных наблюдений представляют собой случайные величины, колеблющиеся вокруг, некоторого среднего значения. За результат измерения принимают среднее арифметическое результатов наблюдений, в которые предварительно введены поправки для исключения систематических погрешностей, т.е.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1)$$

где x_i - результат наблюдения; n - конечное число наблюдений. Формула (1) определяет так называемое выборочное среднее значение случайной величины. Чем больше произведено наблюдений, тем более устойчив и менее подвержен влиянию случайных факторов средний результат, так как положительные и отрицательные погрешности отдельных наблюдений в какой-то степени компенсируют друг друга. Если вообразить, что число результатов наблюдений бесконечно, то тогда средний, результат будет абсолютно устойчивый, т.е. выразится вполне определенным, не случайным числом. Это число называют математическим ожиданием результата. В математической статистике его называют генеральным средним значением случайной величины.

Итак, *математическим ожиданием* результата измерений называется среднее значение бесконечно большого числа результатов наблюдений. Обозначим его буквой M .

Совпадает ли M с истинным значением измеряемой величины? Поскольку математическое ожидание - это результат, освобожденный от случайных погрешностей, и поскольку существуют еще систематические погрешности, то мы приходим к выводу, что $M \approx x_{ист}$. А на какую величину они отличаются? На величину систематической погрешности, если таковая присутствует.

Теперь можно дать еще одно определение систематической погрешности: систематической погрешностью $\Delta x_{сист}$ называется разность между математическим ожиданием результата и истинным значением измеряемой величины, т.е.

$$\Delta x_{сист} = M - x \quad (2)$$

Среднее значение конечного числа измерений \bar{x} отличается от математического ожидания измеряемой величины. Разность между ними и есть случайная погрешность среднего арифметического результатов измерений:

$$\Delta x_{случ} = \bar{x} - M \quad (3)$$

Случайной погрешностью наблюдения называется разность между результатом наблюдения и математическим ожиданием результата:

$$\Delta x_i = x_i - M .$$

Абсолютная и относительная ошибки

Допустим, что мы сделали n прямых измерений некоторой физической величины, истинное значение которой (нам неизвестное) обозначено через x . Через x_1, x_2, \dots, x_n обозначим результаты отдельных измерений. Для абсолютной ошибки i -го измерения имеем:

$$\Delta x = x - x_i ,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда результаты измерений можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \Delta x_1 \\ x_2 &= x - \Delta x_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= x - \Delta x_n \end{aligned} \quad (4)$$

Естественно, что абсолютные ошибки $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Используем понятия среднего арифметического (1), просуммируем левые и правые части равенств (4) и, деля на n , после перестановки членов получим:

$$x = \bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i . \quad (5)$$

В основе статистической обработки результатов измерений лежит предположение, что при большом числе измерений случайные ошибки одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто. Более строго это можно записать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0 . \quad (6)$$

Однако результаты измерений удобнее характеризовать не абсолютной величиной ошибки Δx_i , а ее отношением к измеряемой величине $\Delta x_i / x$, которое называют *относительной ошибкой* и обычно выражают в процентах:

$$e_{i \text{ отн}} = \frac{\Delta x_i}{x} \cdot 100 \% . \quad (7)$$

Удобство такого представления связано главным образом с тем обстоятельством, что в большинстве приложений именно эта величина играет существенную роль, позволяя сделать первичную оценку результатов наблюдений. Действительно, если мы измеряем с точностью 1 см какую-либо длину, то в случае, когда речь идет об измерении длины карандаша, это будет скверная точность (около 10%), если же с этой точностью определять расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга, то это будет чрезмерно высокая точность ($\approx 1.6 \cdot 10^{-5} \%$), в которой нет необходимости.

Функция распределения случайной величины

Допустим, что сделано n измерений x_i ; $i = 1, \dots, n$ и сделаны они одним и тем же методом и с одинаковой степенью тщательности. Такие измерения называются *равноточными*.

Результаты измерений можно перегруппировать с учетом повторов и записать в виде $n_l x_l$, $l < n$, здесь x_l - неповторяющиеся значения измеренной величины, n_l - целые положительные числа, показывающие сколько раз в серии из n измерений получилось значение x_l , $\sum_l n_l = n$ а, $x_i = M + \Delta x_i$, Δx_i - отклонения от среднеарифметического, которые принимают как положительные, так и отрицательные значения. Используя частоты n_l , можно ввести *взвешенное среднее*, которое в данном случае совпадает с \bar{x} .

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_l n_l x_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (8)$$

Точность измерений всегда ограничена ценой деления измерительного прибора, поэтому можно ввести минимальный интервал значений $d x$ измеряемой величины¹, через который ведется отсчёт. Тогда вся совокупность измерений может быть представлена в виде

$$n_0 M ; n_1 (M + d x); \dots n_k (M + k d x); \\ n_{-1} (M - d x); \dots, n_{-m} (M - m d x).$$

¹ Если за c обозначить цену деления шкалы измерительного прибора, то $d x$ можно написать $d x = \frac{c}{2}$.

Гистограмма распределения ошибок

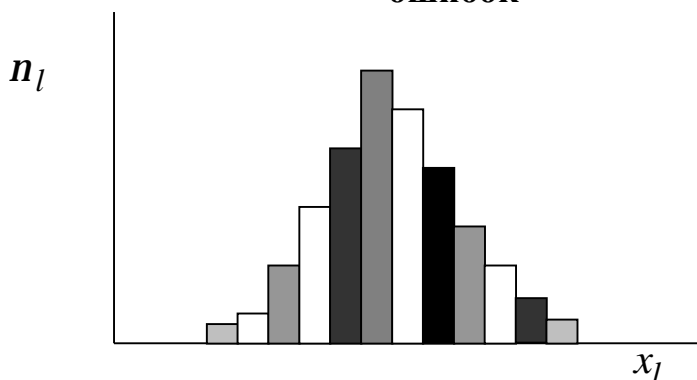


Рис. 1

Здесь мы использовали группировку результатов измерений в окрестности M .

Отложив по оси абсцисс величину x_l , а по оси ординат значения n_l ($l = 1, 2, \dots, n$), мы получим ступенчатую кривую, называемую *гистограммой* (рис.1).

Если увеличивать число измерений n , а интервал d x стремиться к нулю, то гистограмма переходит в пределе в непрерывную кривую, которая называется кривой распределения ошибок. Необходимость такого шага можно оправдать тем, что для возникающего в этом пределе распределения существует методика анализа для оценок погрешностей результатов наблюдений.

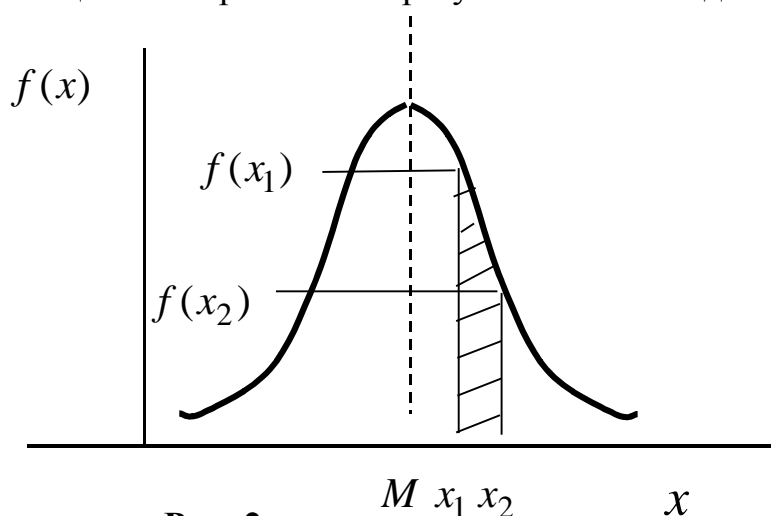


Рис. 2

Кривая распределения ошибок выражает зависимость плотности вероятности $f(x)$ от величины погрешности (рис. 2). Описывающая его формула Гаусса может быть выведена на основании следующих предположений: ошибки измерений могут принимать непрерывный ряд значений; при

большом числе измерений ошибки одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто; маленькие ошибки встречаются реже, чем большие. Эти довольно естественные на первый взгляд предположения приводят к нормальному или Гауссовому закону распределения ошибок, описываемому функцией:

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2s^2}}, \quad (9)$$

где $e = 2,71$ - основание натуральных логарифмов, s^2 - дисперсия, через которую определяется *квадратичное отклонение* или, следуя Гауссу, *средняя*

ошибка S (см. ниже), M - математическое ожидание или среднее значение переменной x . Графики функции (9) при $M = 1,5$ и при двух значениях средней ошибки $S = 0,2$ (более острый график) и $S = 0,4$ в некоторых условных единицах приведены на рис. 3.

Смысл кривой распределения (рис. 2) состоит в том, что вероятность при единичном измерении получить значение x , в интервале от x_1 до x_2

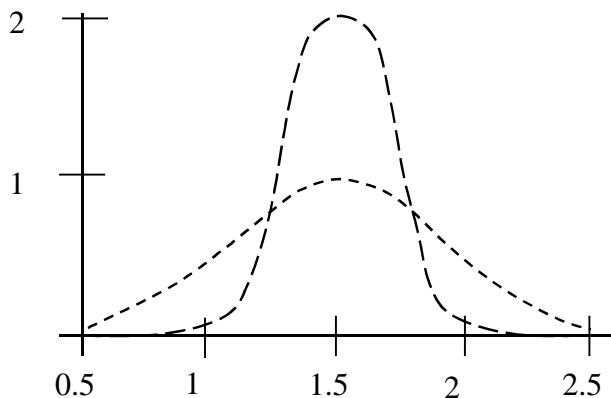


Рис.3

пропорциональна заштрихованной площади. Если же говорить точнее, то эта вероятность равна отношению заштрихованной площади ко всей площади, заключенной между кривой и осью абсцисс (площадь под всей кривой равна 1). Так как мы чаще имеем дело с конечным числом измерений, то вычисляется не S , а ее приближенное значение S , которое находится

в таком же отношении к S , как средний результат к математическому ожиданию: чем больше число наблюдений, тем меньше S может отличаться от S . Величину S называют выборочным средним квадратичным отклонением результата наблюдения. По определению:

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (10)$$

где n - число наблюдений, образующих данную выборку. Если $n \rightarrow \infty$, $S \rightarrow S$.

Как сказано выше, отношение площади заштрихованного участка, внутри которого находится случайная величина (рис. 2), ко всей площади, заключенной между осью абсцисс и кривой Гаусса, есть вероятность того, что погрешность случайной величины имеет значение от Δx_1 до Δx_2 . Если рассчитать вероятность появления погрешностей, заключенных в интервале от $-S$ до $+S$, то она окажется равной 0,68. Интервалу погрешностей от $-2S$ до $+2S$ будет соответствовать вероятность 0,95. Увеличение полуширины интервала значений погрешностей до $+3S$ приведет к повышению вероятности до 0,997 (рис.4). То есть при увеличении ширины интервала допустимых значений погрешностей вероятность их появления стремится к единице.

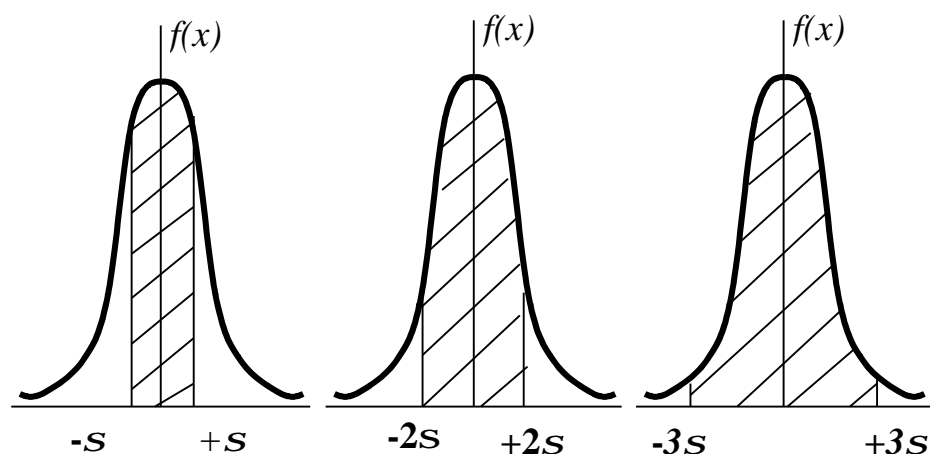


Рис. 4

Обозначив вероятность появления погрешностей в заданном интервале их значений через a , это можно записать в виде

$$a = \int_{\bar{x}-\Delta x}^{\bar{x}+\Delta x} f(x) dx,$$

где x - текущая переменная. То есть a означает вероятность того, что истинное значение случайной величины находится в интервале от $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$.

Вероятность a носит название доверительной вероятности или коэффициента надежности. Интервал от $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$ называется доверительным интервалом. Обозначив коэффициент при s через b сказанное выше можно записать в виде

$$x = M \pm bs,$$

где Δx выражено в долях s $\Delta x = bs$.

Коэффициент b не обязательно должен быть целым числом. В таблице 1 приведена зависимость величины a от значений b .

Таблица 1.

b	0.5	1	1.5	1.6	1.8	1.9	2	2.5	3
a	0.38	0.68	0.87	0.89	0.91	0.94	0.95	0.988	0.997

Эта зависимость называется удвоенной функцией Лапласа. С помощью этих таблиц можно решать две задачи: 1) находить надежность того или иного доверительного интервала; 2) для заданной надежности находить доверительный интервал (пример 1, пример 2, см. ниже).

Таким образом, за истинное значение может быть принят *любой* результат отдельного измерения, попавший в доверительный интервал, определенный с заданной доверительной вероятностью a .

Однако, подчеркнем еще раз: речь идет о границах погрешности единичного опыта x_i , проведенного в данном эксперименте. Но n опытов проводилось для того, чтобы определить среднее значение \bar{x} .

Каково же отличие \bar{x} от истинного значения искомой величины?

В теории случайных погрешностей доказывается, что

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (11)$$

т.е. среднеквадратичное отклонение среднего арифметического $S_{\bar{x}}$ в \sqrt{n} раз меньше среднего квадратичного отклонения единичного измерения S .

Выражение (11) имеет фундаментальное значение в теории и практике измерений. Оно подтверждает принципиальную возможность уменьшения случайных погрешностей при увеличении числа опытов.

Как правило, на практике мы имеем дело с конечным числом измерений, поэтому при определении полуширины доверительного интервала Δx используем не величину S , а S (10). Очевидно, что этому доверительному интервалу будет соответствовать меньшая доверительная вероятность. Чтобы учесть это обстоятельство, вводится коэффициент Стьюдента (псевдоним английского математика Госсета) t_{an} - величина, аналогичная b . Он играет ту же роль, что и b , но для ограниченного числа измерений, для которых определена величина S . Он позволяет по заданной надежности найти полуширину доверительного интервала, выраженную в долях S .

Коэффициент t_{an} определяется количеством измерений и значением доверительной вероятности и обычно приводится в виде таблиц (см. приложение).

Таким образом, для вычисления измеряемой величины в случае конечного числа измерений имеем выражение

$$x = \bar{x} \pm \frac{t_{an} S}{\sqrt{n}} \quad (12)$$

Пример 1. При определении скорости звука методом, среднее квадратичное отклонение которого равно 3 м/с, получено значение V , равное 335 м/с. Пусть нам надо задать интервал возможных значений скорости звука с надежностью $a = 0,95$. По таблице находим, что соответствующее значение b будет равно 2. Тогда $bS = 2 \cdot 3 = 6$. Значит, с указанной надежностью $V = (335 \pm 6) \text{ м/с}$. Пусть нас теперь интересует вопрос: какова надежность утверждения, что $V = (335 \pm 4,5) \text{ м/с}$. Находим сначала $b : b = 4,5 : S = 4,5 : 3 = 1,5$. По таблице находим соответствующее значение $a = 0,87$.

Итак, если известна величина S , то по результату измерения можно указать доверительный интервал для математического ожидания и соответствующую доверительную вероятность. Поэтому S вполне характеризует точность метода измерения. Из двух методов измерения одной и той же величины более точным является метод с наименьшим значением S . Однако, средний результат является более точной оценкой математического ожидания, чем результат единичного измерения. Из формул (4) и (11) следует:

$$x = \bar{x} \pm bS_x = \bar{x} \pm \frac{bS}{\sqrt{n}} \quad (13)$$

Таким образом, если есть возможность, надо всегда производить наблюдения несколько раз и вычислять средний результат. При этом, не снижая доверительной вероятности, мы получим в \sqrt{n} раз более узкий доверительный интервал, чем для результата 'наблюдения.

Пример. 2. Измеряя 4 раза скорость звука тем же методом, что и в предыдущем примере, получили следующие значения V (v м/с): 335; 339; 336; 334. Среднее из них 336. Задаемся надежностью $a = 0,95$, для которой $b = 2$. Отсюда

$$V = \bar{V} \pm \frac{2S}{\sqrt{4}} = (336 \pm 3) \text{ м/с}$$

Итак, получив результат измерения, мы должны указать интервал возможных значений Δx , (доверительный интервал) и надежность этого интервала. Эта задача может быть решена двумя путями: 1) задаются границы доверительного интервала, затем определяется надежность этих границ; 2) задается надежность, а затем определяется величина интервала, соответствующего этой надежности.

На практике чаще всего пользуются вторым способом. Для этого по таблице находят значение b - полуширину интервала, выраженную в долях S . Так как значение S нам неизвестно, а известно только S , то мы не можем пользоваться таблицей. Но существуют таблицы, позволяющие по заданной надежности найти полуширину интервала, выраженную в долях S . Эта величина обозначается буквой t и носит название *коэффициента Стьюдента* или t - критерия. Найдя t , мы можем, согласно формуле (12), утверждать, что

$$M_x \equiv x = \bar{x} \pm \frac{t a n}{\sqrt{n}} \quad (14)$$

Значение t зависит не только от доверительной вероятности a , но и от числа опытов n , использованных при расчете S . Это связано с тем, что с ростом n уменьшается возможное различие между S и S , а значение t приближается к значению b , соответствующему данной надежности.

Значения t в зависимости от a и n приводятся в виде таблиц.

Закон сложения случайных погрешностей (случайные погрешности косвенных измерений)

Пусть Y величина, значение которой необходимо измерить, является функцией

$$Y = \Phi(x, y, z, \dots),$$

непосредственно измеряемых переменных x, y, z, \dots , для которых известны функции распределения (9).

Анализ ошибок возникающих при косвенных измерениях, когда интересующая нас величина зависит от одной или нескольких непосредственно измеряемых величин, может быть проведен, по крайней мере, двумя способами.

Первый способ напрямую связан с методами изложенными выше. Необходимо вычислить значение Y в каждой измеренной точке, т.е. получить набор значений Y_i , для которых построить гистограмму, найти распределение и т.д.

Второй способ хотя и содержит неточности, но они тем меньше чем большее число измерений проведено. Он основан на представлении

$$x = M_x + \Delta x, y = M_y + \Delta y, \dots \quad (15)$$

и на разложении

$$Y = \Phi(M_x, M_y, \dots) + \Phi'_x \Delta x + \Phi'_y \Delta y + \dots, \quad (16)$$

в котором оставлены только члены линейные по абсолютным ошибкам независимых переменных. Здесь M_A - среднее значение величины A , а Φ'_A - производная от $\Phi(x, y, \dots)$ по соответствующему аргументу. Из (16) нетрудно получить среднее значение переменной Y .

$$M_Y = \Phi(M_x, M_y, \dots) \quad (17)$$

и среднюю ошибку

$$s_Y = \sqrt{\Phi'^2_x s_x^2 + \Phi'^2_y s_y^2 + \dots} \quad (18)$$

Если ошибки измерений малы по сравнению с измеряемой величиной, то оба способа дают почти тождественные результаты, хотя второй способ представляется менее трудоемким. Кроме того, если результаты измерений независимых переменных распределены по нормальному закону, что всегда предполагается, то для средних значений M_x, M_y, \dots справедлива формула (14).

Примеры:

1.

$Y = x \cdot y \cdot z$ то, вычисляя производные Φ'_A по соответствующим аргументам, получим:

$$S_Y^2 = (x \cdot y \cdot S_z)^2 + (y \cdot z \cdot S_x)^2 + (z \cdot x \cdot S_y)^2$$

Аналогично вычисляются дисперсии для большего числа сомножителей.

2.

Для функции $Y = \frac{x}{z}$; по аналогии с предыдущем находим

$$S_Y^2 = \frac{S_x^2}{z^2} + \left(\frac{x}{z}\right)^2 S_z^2$$

Порядок выполнения работы

Цель работы: изучение принципа работы нониуса, использование штангенциркуля и микрометра для определения линейных размеров тел; определение доверительного интервала результатов измерений; использование полученных данных для расчета электрического сопротивления проводника цилиндрической формы.

Принадлежности: штангенциркуль, микрометр, объекты измерения. Измерения штангенциркулем.

1. Определите точность нониуса.

2. Проверьте нулевой отсчет, выпишите его и учтите при нахождении окончательного результата измерений.

3. Определите длину проводника 10 раз, найдите среднее арифметическое \bar{l} , случайную погрешность $S_{\bar{l}}$ с доверительной вероятностью 0,95 и запишите доверительный интервал, в котором находится истинное значение измеряемой величины.

Измерения микрометром.

1. Определите шаг микрометрического винта и число делений на барабане, найдите точность микрометра.

2. Определите нулевой отсчет. Для стабилизации давления на измеряемое тело вращения барабана производите только через трещотку до характерного треска.

3. Измерьте диаметр проводника d в 10 разных местах.

4. Определите среднее арифметическое \bar{d} , случайную погрешность $S_{\bar{d}}$ и доверительный интервал.

Результаты измерений занесите в таблицу следующего вида:

Таблица 2

№ n/n	l_i , мм	$(l_i - \bar{l})$, мм	$(l_i - \bar{l})^2$, мм	d_i , мм	$(d_i - \bar{d})$, мм	$(d_i - \bar{d})^2$, мм
---------	---------------	---------------------------	-----------------------------	---------------	---------------------------	-----------------------------

Результаты измерений с учетом правил округления и согласно формулам (5) и (10) запишите в виде:

$$l_{уст} = \left(\bar{l} \pm t_{ан} \frac{S_l}{\sqrt{n}} \right); \quad d_{уст} = \left(\bar{d} \pm t_{ан} \frac{S_d}{\sqrt{n}} \right).$$

Электрическое сопротивление проводника R вычисляется по формуле:

$$\bar{R} = r \frac{\bar{l}}{\bar{S}} = r \frac{4\bar{l}}{p\bar{d}^2},$$

где r - удельное сопротивление. Поскольку измеряемая величина, сопротивление R , является функцией величин диаметра d и длины проводника l , то среднее квадратичное отклонение среднего результата сопротивления определится по формуле:

$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial l} S_{\bar{l}} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial d} S_{\bar{d}} \right)^2}.$$

Окончательный результат измерения запишется:

$$R = \bar{R} \pm t_{ан} S_{\bar{R}}.$$

Относительное стандартное отклонение определится по формуле:

$$e_R = S_{\bar{R}} / \bar{R} \cdot 100\% .$$

При вычислении погрешности не забывайте к случайной погрешности прибавить систематическую погрешность измерительного прибора, считая, что приборные погрешности измерительных средств равны 0,5 от цены наименьшего деления шкалы, в данном случае, нониуса. Совместный учет приборной и случайной погрешности базируется на законе сложения случайных величин. Если, например, при учете только случайной погрешности доверительный интервал определяется по формуле (12), то, с учетом систематической (приборной) погрешности,

$$x = \bar{x} \pm \sqrt{\left(\frac{t_{ан} S}{\sqrt{n}} \right)^2 + (\Delta x)^2}.$$

Дайте заключение о том, связан ли наблюдаемый разброс с погрешностями измерений или с погрешностями изготовления измеряемого объекта.

Контрольные вопросы

1. Почему нельзя выполнить измерение абсолютно точно и получить истинное значение величины?
2. Какие типы погрешностей существуют? Дайте определение их, назовите источники погрешностей?
3. Что такое результат измерения; математическое ожидание результата?
4. Совпадает ли математическое ожидание результата с истинным значением измеряемой величины? Ответ обоснуйте.
5. Как подсчитать относительную погрешность результата измерения?
6. Как оценить точность результата измерения?
7. Каким статистическим законом можно описать распределение случайных погрешностей?
8. Перечислите свойства распределения случайных погрешностей?
9. Назовите параметры распределения случайных погрешностей и укажите их свойства?
10. Что такое среднее квадратичное отклонение каждого измерения, среднего результата?
11. Как измеряется вид распределения при изменении среднего квадратичного отклонения?
12. Что такое доверительный интервал, доверительная вероятность?
13. Как записывается окончательный результат измерения?
14. Какие числа называют точными, приближенными?
15. Каковы правила округления чисел? Погрешностей?
16. Каковы правила построения графиков?

Основные определения теории приближенных вычислений

Прежде чем производить вычисления по какой-либо формуле, необходимо уяснить, какие из чисел, подставленных, в формулу, точные, а какие - приближенные. К точным числам относятся: целые числовые коэффициенты и показатели степеней, встречающиеся в физических формулах; числа, заданные определением; (нормальное атмосферное давление, относительные электрическая и магнитная проницаемости вакуума и т.д.); результаты счета предметов, если возможность ошибки исключена. К приближенным числам относятся: результаты измерения физических величин; округленные значения точных чисел; результаты счета большого числа объектов, когда возможность ошибки не исключена; табличные значения физических величин; иррациональные числа. Приближенные числа, полученные при различных математических операциях или взятые из таблиц, могут иметь различное количество цифр. В приближенных числах записывают только верные цифры и одну (последнюю) сомнительную. Неверные цифры отбрасывают.

Любое число при его десятичной записи может быть представлено в виде:

$$A = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1},$$

где a_m , a_{m-1} и т.д. - цифры, стоящие в соответствующих местах (десятичных разрядах) числа A , m - показатель степени, характеризующий высший десятичный разряд числа, n - число разрядов, если считать высший разряд первым.

Например: $325,768 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$.

Понятие верной цифры является условным. Существуют два способа определения числа верных знаков: один из них предъявляет более жесткие требования к точности приближенного числа, другой - менее жесткие. В настоящее время используются оба способа, хотя для округленных чисел предпочтительнее более жесткий способ. Приведем его определение.

Количество верных цифр приближенного числа зависит от его абсолютной погрешности. Первые n десятичных знаков приближенного числа называются верными, если абсолютная погрешность этого приближенного числа не превышает половины единицы низшего сохранения его разряда, т.е., соблюдается условие $\Delta x \leq 0,5 \cdot 10^{m-n+1}$. Величина $\Delta x = 0,5 \cdot 10^{m-n+1}$ является в данном случае абсолютной, продельной погрешностью. Например, константа Планка h - приводится в таблице мировых постоянных в виде: $h = (6,626176 \pm 0,000036) \cdot 10^{-34}$ Дж.

Абсолютная погрешность числа $\Delta h = 0,36 \cdot 10^{-4} \leq 0,5 \cdot 10^{m-n+1}$, высший десятичный разряд константы Планка $m = 0$. Приравнивая показатели степени для десяти $-4 = 0 - n + 1$, найдем, что неравенство выполняется при $n = 5$. Следовательно, в числе 6,626176 верны будут пять цифр: 6,6261. Цифра, стоящая за последней верной, называется сомнительной. Остальные цифры неверные и должны быть отброшены путем округления.

При округлении необходимо пользоваться следующими правилами:

1) если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из оставляемых не изменяется; 2) если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то к последней из оставляемых прибавляется единица. Исключением из этих правил является округление погрешностей (см. далее).

Кроме понятия верных и неверных цифр вводится еще понятие, значащих и незначащих цифр приближенного числа. Значащими цифрами приближенного числа являются все верные цифры и одна сомнительная, кроме нулей, стоящих впереди числа. Например, у числа 63, 458 пять значащих цифр, а у числа 0,006 - одна. Нули, стоящие позади значащих цифр, могут быть значащими и незначащими. Если эти нули получались в результате округления больших чисел, то они незначащие. Например, скорость света в вакууме, по данным опытов, равна 299 792,5 км/с. Это число обычно округляется до 300 000 км/с. В последнем случае у числа лишь одна значащая цифра. Если же нули означают, что последние разряды пустые, но верные (один сомнительный), то их необходимо считать значащими. Например, у числа 2080 четыре значащие цифры. Незначащие цифры нужны для того, чтобы задать порядок числа.

Для удобства проведения математических действий над приближенными числами последние представляют в так называемой нормальной форме: значащие цифры распределяют так, чтобы первая стояла в разряде единиц остальные - в десятичных разрядах после запятой, и к числу приписывается множитель вида 10^n , где n - целое число.

Например, число 0,0348 в нормальной форме имеет вид $3,48 \cdot 10^{-2}$, число 30 100 - $3,01 \cdot 10^4$. Удобство такой записи состоит в том, что в числе остаются только значащие цифры, а незначащие "уходят" в степень десяти.

Рассмотрим, как округляют погрешности. Погрешности, в отличие от других приближенных чисел, округляются всегда в сторону увеличения и, как правило, до одной значащей цифры. Если погрешности выражаются числами $\pm 1,837$; $\pm 0,065$; $\pm 0,00845$, то следует писать соответственно, ± 2 ; $\pm 0,07$; $\pm 0,009$. При округлении погрешности в сторону увеличения возможно неоправданное ее завышение, поэтому в погрешностях сохраняют две, значащие цифры в тех случаях, когда старшая значащая цифра этого числа меньше пяти: $1,137 \rightarrow 1,2$; $205,3 \rightarrow 210$

Правила действий над приближенными числами

Проведение математических операций над приближенными числами дают результаты, являющиеся также приближенными числами. Чтобы определить значащие цифры результата, необходимо найти его абсолютную погрешность. Такой прием весьма неудобен тогда, когда результат является промежуточным. Поэтому пользуется правилами для приближенного подсчета значащих цифр.

1. При сложении (вычитании) приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не содержал значащих цифр в тех (младших) разрядах, где они отсутствуют хотя бы в одном из слагаемых, Например, складывая числа $4,461+2,38+1,17273+1,0262=9,04093$, следует округлить сумму до сотых долей, т.е. принять ее равной 9,04, так как второе слагаемое округлено до сотых.

2. При умножении (делении) округляют сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр, результат умножения (деления) записывается с таким же числом значащих цифр. Например, вместо: вычисления выражения $3,723 \cdot 2,45 \cdot 5,1846$ следует вычислить выражение $3,7 \cdot 2,4 \cdot 5,2 = 46,176 \rightarrow 46$.

3. При возведении в степень следует у результата оставлять столько значащих цифр, сколько их содержит основание степени: $1,32^2 = 1,74$.

4. При извлечении корня любой степени в результате следует оставлять столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении: $\sqrt{1,7 \cdot 10^{-8}} = 1,08 \cdot 10^{-4}$.

5. При логарифмировании мантисса логарифма числа должна содержать столько значащих цифр, сколько их содержит само число. Верно и обратное: найденное по логарифму число должно иметь столько же значащих цифр, сколько их имеет мантисса логарифма, Например, $\lg 5555 = 3,7447$.

6. Правило запасной цифры. Чтобы по возможности уменьшить погрешности округления, рекомендуется в тех исходных, данных, которые это позволяют, а такие и в результате, если он будет участвовать в дальнейших вычислениях, сохранить по одной лишней (запасной) цифре сверх требований правил 1-5.

При выполнении лабораторных работ точность результат определяется точностью измерительных приборов, тщательностью проведения измерений и не может быть повышена в дальнейшем, путем искусственного набирания знаков при арифметических действиях.

Графическое представление результатов опыта

Часто результаты измерений физических величин, полученных в процессе выполнения лабораторной работы или при других исследованиях, целесообразно представлять в виде графиков. График является удобным и наглядным способом представления опытных данных: позволяет легко определить скорости изменения величин, обнаружить наличие максимумов, точек перегиба, установить функциональную зависимость между исследуемыми величинами и т.д.

Как правило, результаты опыта при изучении какой-либо зависимости приводят в виде таблицы, где каждому значению одного параметра соответствует определенное значение другого параметра.

Построение графика состоит из следующих основных моментов:

1) выбор типа бумаги; 2) выбор масштабов по осям координат; 3) написание обозначений на осях; 4) нанесение данных на график; 5) проведение кривой через нанесение точки; 6) составление заголовка графика.

Для построения графиков выпускают специальную бумагу: логарифмическую и обыкновенную миллиметровку. Последняя в основном применяется для выполнения работ физического практикума.

Неудачный выбор масштабов по осям координат может сделать график непригодным, поэтому при выборе масштабов следует руководствоваться следующими правилами. Значения независимой переменной откладывают вдоль оси абсцисс, функции - вдоль оси ординат. Масштабы должны быть выбраны так, чтобы цена наименьшего деления масштабной сетки была сравнима с величиной погрешности измерения.

Если график или отдельные его участки представляют собой прямую линию, ее наклон к оси абсцисс должен быть близким к 45° . Это общее правило, в основе которого лежит удобство последующих операций с графиком, а также стремление к наглядности. Координаты любой точки должны определяться быстро и легко.

Нужно отметить, что не обязательно, чтобы точка пересечения оси абсцисс и оси ординат имела координаты (0,0). Масштаб нужно нанести так, чтобы площадь графика использовалась рационально. Для этого необходимо начинать отсчет с наименьших значений переменных или несколько меньших их величин. Для удобства на каждой координатной оси целесообразно указывать не символическое, а полное название переменной и единиц ее измерения. Например: Давление, Н/м².

Полученные экспериментальные результаты наносят на график в виде жирных точек, крестиков, кружочков. Различные группы данных на одном и том же графике должны быть помечены разными знаками. Кривую следует проводить плавно, не через отмеченные точки, а близко к ней, так, чтобы точки находились по обе стороны от кривой примерно на равных

расстояниях. Для вычерчивания намеченных кривых желательно использовать лекала.

Каждый график должен иметь название, отражающее его содержание, а иногда и необходимые пояснения.

Приложение 4

Коэффициенты Стьюдента $t_{ан}$.

n	α													
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999	
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,0	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6	
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6	
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9	
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6	
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9	
7	0,13	0,27	0,40	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0	
8	0,13	0,26	0,40	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4	
9	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0	
10	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8	
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6	
12	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5	
13	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3	
14	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2	
15	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1	
16	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0	
17	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0	
18	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0	
19	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9	
20	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9	
21	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8	
24	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8	
25	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7	
30	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7	
40	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,2	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6	
60	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5	
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4	
∞	0,13	0,25	0,39	0,52	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3	

Погрешности при косвенных измерениях

Вид функции	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$z = x + y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$	$e_z = \frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$
$z = x - y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$	$e_z = \frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$
$z = xy$	$\Delta z = x\Delta y + y\Delta x$	$e_z = e_x + e_y = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$z = \frac{x}{y}$	$\Delta z = \frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$	$e_z = e_x + e_y = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$z = x^n$	$\Delta z = nx^{n-1}\Delta x$	$e_z = ne_x = n\frac{\Delta x}{x}$
$z = \sqrt[n]{x}$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$e_z = \frac{1}{n}e_x = \frac{\Delta x}{nx}$
$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{x^2} + \frac{\Delta y}{y^2}$	$e_z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta xy^2 + \Delta yx^2}{xy(x + y)}$
$f = \sin x$	$\Delta f = \cos x\Delta x$	$e_f = \operatorname{ctgx}\Delta x$
$f = \cos x$	$\Delta f = \sin x\Delta x$	$e_f = \operatorname{tgx}\Delta x$
$f = \operatorname{tg} x$	$\Delta f = \frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$e_f = \frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
$f = \lg x$	$\Delta f = \frac{\ln 10\Delta x}{x}$	$e_f = \frac{\ln 10}{\lg x} \cdot \frac{\Delta x}{x}$

Библиографический список

1. Б.Л. ван дер Варден «Математическая статистика» Изд. ИЛ. М., 1960, с. 434.
2. Зайдель А.Н. «Ошибки измерений физических величин» Изд. «Наука» Ленинград, 1974.
3. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. «Обработка результатов наблюдений» Изд. «Наука» М., 1970, с. 103.
4. Колмогоров А.Н. «Основные понятия теории вероятностей» ОНТИ. М., 1936.
5. Худсон Д. «Статистика для физиков» Изд. «Мир» М., 1967, с.242.
6. Feldman G.J., Cousins R.D. «Unified approach to the classical statistical analysis of small signals», Phys. Rev. v57, N7 1998, pp. 3873-3889.

Лабораторная работа 1-1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКОВ

Цель работы: изучение теории колебаний физического и математического маятников.

Задача работы: определение ускорения свободного падения с помощью физического и математического маятников на широте данной местности.

Теория

Колебаниями называются процессы, при которых система, многократно отклоняясь от своего состояния равновесия, каждый раз вновь возвращается к нему. Несмотря на большое разнообразие колебательных процессов, как по физической природе, так и по степени сложности, все колебания совершаются по некоторым общим закономерностям и могут быть сведены к суперпозиции простейших колебаний, называемых *гармоническими*. Характер такого движения лучше всего раскрывается с помощью следующей кинематической модели.

Пусть материальная точка M движется против часовой стрелки по

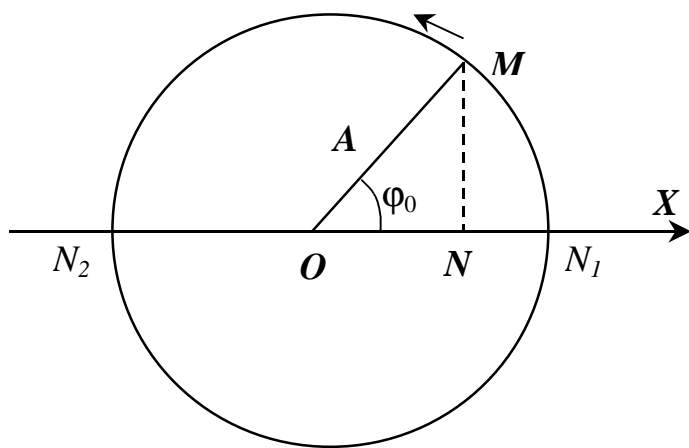


Рис.1

окружности радиуса A с постоянной угловой скоростью ω (рис.1). Тогда ее проекция N на горизонтальный диаметр будет совершать периодические колебания около положения равновесия O , а величина смещения этой проекции $X = ON$ будет изменяться в пределах от $+A$ до $-A$, также совершая гармонические колебания.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ радиус OM составлял с осью X угол j_0 . Спустя время t этот угол получит приращение ωt и станет равным $(\omega t + j_0)$. Из рис.1 видно, что величина смещения в любой момент времени t определяется очевидным соотношением.

$$x = A \cos(\omega t + j_0). \quad (1)$$

Формула (1) аналитически описывает гармоническое колебательное движение точки N вдоль диаметра $N_1 N_2$. Следовательно, *гармоническим* называется колебание, при котором изменение некоторой величины со временем происходит по закону косинуса или синуса (если точка M проецируется на вертикальный диаметр).

Величина A в выражении (1), равная максимальному отклонению колеблющейся величины от положения равновесия, называется амплитудой колебания, ω - циклической или круговой частотой, величину $(\omega t + j_0)$ называют *фазой колебания*, а её значение при $t = 0$, т.е. j_0 - *начальной фазой колебания*. Время одного полного колебания T называется *периодом колебаний*. По истечении времени $T = 2\pi/\omega$ фаза получает приращение 2π , а колеблющаяся система возвращается в исходное положение.

Система будет совершать гармонические колебания, если на неё действует, так называемая, *квазиупругая сила*, меняющаяся по закону $F = -kx$, где k - положительный коэффициент. В этих условиях уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (2)$$

где $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ - вторая производная величины x по времени. Используя выражение (1) при $j_0 = 0$, найдем \ddot{x} :

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим, что циклическая частота $\omega = \sqrt{k/m}$, тогда период $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Уравнение движения может быть преобразовано к виду:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (4)$$

Таким образом, поведение системы под действием квазиупругой силы описывается однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Его решением является уравнение (1). В качестве переменной величины x может выступать любая физическая величина: линейная координата, заряд на обкладках конденсатора, угол отклонения физического маятника от положения равновесия и т.д.

Физическим маятником называется твёрдое тело, способное совершать колебания в поле тяготения вокруг неподвижной горизонтальной оси (рис.2). Положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом отклонения от положения равновесия α . Используя основной закон вращательного движения для маятника, вращающегося вокруг точки O , можно записать: $I\ddot{\alpha} = \dot{M}$, где

$$M = -m g l \sin \alpha,$$

т.е.

$$Ie = -mgl \sin \alpha . \quad (5)$$

I - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, m - его масса; e - угловое ускорение маятника; l - расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника M - момент сил, вызывающий вращение маятника. Знак минус в последнем выражении означает, что момент сил направлен против увеличения угла α .

При малых углах отклонения от положения равновесия с большой степенью точности можно считать, что $\sin \alpha \approx \alpha$ (α в радианах!) и уравнение (5) приводится к виду:

$$I \ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I} \alpha = 0 . \quad (6)$$

Учитывая, что при малых углах отклонения от положения равновесия движение маятника можно считать гармоническим, и сравнивая уравнения (6) и (4), видим, что частота и период соответственно равны:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (7)$$

Математический маятник - идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на невесомой нити длины l . Математический маятник представляет собой предельный случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в его центре масс. Примером маятника близкого к математическому может служить тяжёлый шарик, подвешенный на длинной нити.

Момент инерции математического маятника относительно точки подвеса равен:

$$I = ml^2 . \quad (8)$$

Подставляя значение момента (8) инерции в выражение (7), можно записать период колебаний математического маятника (при малых углах отклонения):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (9)$$

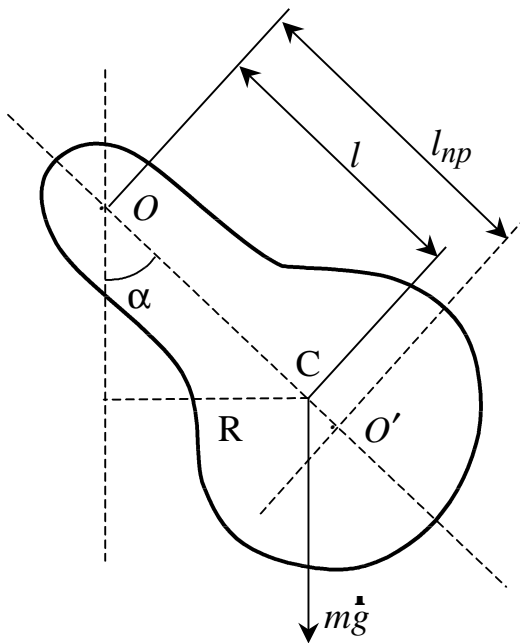


Рис. 2

Обозначим через I_0 - момент инерции физического маятника относительно оси, проходящей через его центр массы. Тогда момент инерции физического маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса (O или O') по теореме Гюйгенса-Штейнера будет $I = I_0 + ml^2$, и период колебаний физического маятника принимает вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} + \frac{I_0}{mgl}} \quad (10)$$

Сравнение формул (9) и (10) показывает, что математический маятник, длина которого равна расстоянию между точкой подвеса и центром масс физического маятника, имеет меньший период, чем физический маятник. Чтобы период колебаний математического маятника был равен периоду колебаний физического маятника, его длина должна быть больше.

Длина математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний физического маятника, называется *приведенной длиной* соответствующего физического маятника. Из сравнения формул (7) и (9)

видно, что приведенная длина физического маятника равна: $l_{пр} = \frac{I}{ml}$

Точка физического маятника, расположенная на расстоянии приведённой длины от точки подвеса на прямой, проходящей через центр тяжести, называется *центром качания* физического маятника (точка O' на рис.2). Точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания. На этом свойстве основано определение ускорения свободного падения с помощью так называемого обратного маятника, который является частным случаем физического маятника.

Описание экспериментальной установки

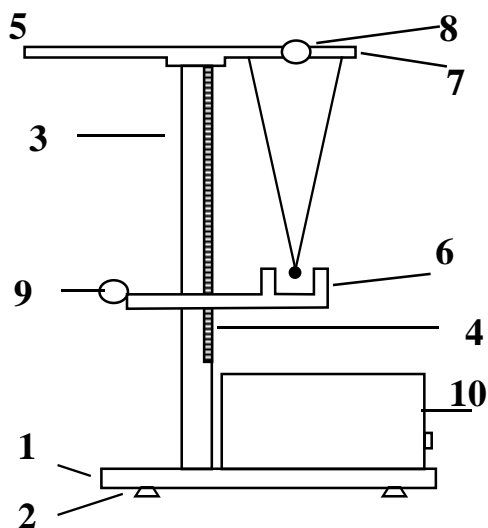


Рис. 3

Общий вид установки показан на рис.3. Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют установить горизонтальное положение прибора. В основании закреплена стойка 3, на которой имеется миллиметровая шкала 4. На стойке крепится верхний кронштейн 5 и нижний кронштейн с фотоэлементом 6.

На верхнем кронштейне имеется паз 7 с вкладышами для крепления обратного маятника и катушка с нитью

математического маятника, длина которой регулируется воротком 8. Верхний кронштейн может поворачиваться вокруг вертикальной оси. Нижний кронштейн может перемещаться вдоль стойки и фиксироваться в избранном положении с помощью воротка 9.

Электронная схема установки состоит из двух основных частей: фотоэлектрического датчика и универсального цифрового секундомера 10, обеспечивающего измерения времени (цифровые индикаторы «время, с») и количества полных колебаний (цифровые индикаторы «периоды»).

На лицевой панели прибора находятся следующие клавишные переключатели:

СЕТЬ - выключатель сети; нажатие этой клавиши включает питающее напряжение, что сопровождается свечением цифровых индикаторов.

СБРОС - установка нуля измерителя.

СТОП - окончание измерения.

Задание 1. Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника

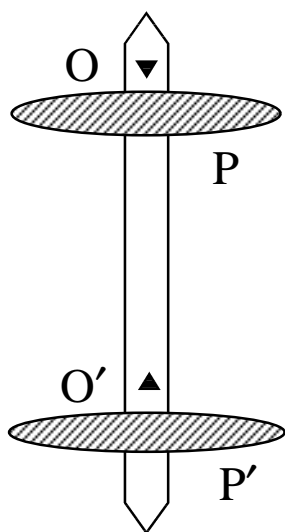


Рис. 4

Оборотным называется маятник, имеющий две параллельные друг другу опорные призмы, на которые он может подвешиваться (рис.4). Вдоль оси маятника OO' могут перемещаться и закрепляться на нём тяжёлые диски P и P' . Перемещением дисков добиваются того, чтобы при подвешивании маятника на любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между призмами будет равно приведённой длине маятника l_{np} . С учётом выражений (7) и (10) период малых колебаний может быть выражен как $T = 2\pi\sqrt{l_{np}/g}$, откуда

$$g = 4\pi^2 l_{np} / T^2 \quad (11)$$

Величина периода T определяется на основании результатов эксперимента по формуле: $T = t/n$, где n - количество полных колебаний, t - их продолжительность.

Порядок выполнения работы

1. Зафиксировать диски на стержне несимметрично, так, чтобы один из них находился вблизи конца стержня, а другой - вблизи его середины.
2. Опорные призмы маятника закрепить по обеим сторонам центра тяжести системы таким образом, чтобы они были обращены друг к другу

ребрами. Одну призму поместить вблизи свободного конца стержня, а вторую на половине расстояния между дисками.

3. Проверить, встают ли опорные ребра призм в насечки на стержне.
4. Закрепить маятник на одной из призм.
5. Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком переместить таким образом, чтобы стержень маятника пересекал оптическую ось.
6. Нажать клавишу «СБРОС» на лицевой панели установки.
7. Отклонить маятник на $4-5^{\circ}$ от положения равновесия и отпустить.
8. После отсчёта 10 полных колебаний нажать клавишу «СТОП». По формуле $T = t/n$, определить период оборотного маятника T_1 .
9. Снять маятник и закрепить его на второй призме. Нижний кронштейн переместить таким образом, чтобы маятник пересекал оптическую ось. Повторить операции для нахождения периода колебания T_2 .
10. Сравнить результат с полученной ранее величиной T_1 если $T_2 > T_1$, то вторую призму переместить в направлении диска, находящегося в конце стержня, если $T_2 < T_1$, то в направлении середины стержня. Размещение дисков и первой призмы не менять.
11. Повторно измерить период T_2 и сравнить с величиной T_1 .
12. Изменять положение второго ножа до момента получения равенства периодов с точностью до 0.5%.
13. Определить приведённую длину оборотного маятника, подсчитывая количество рисок на стержне между призмами, которые нанесены через 10 мм.
14. По формуле (11) определить ускорение свободного падения.
15. Эксперимент повторить не менее 3-х раз. Произвести статистическую обработку результатов по методу Стьюдента.

ЗАДАНИЕ 2. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника

Математический маятник, применяемый в эксперименте, представляет собой массивный шарик небольшого радиуса, подвешенный на двойной нити для того, чтобы колебания происходили строго в одной плоскости.

Ускорение свободного падения с учётом выражения (9) можно определить по формуле:

$$g = 4\pi^2 l / T^2, \quad (12)$$

где l - длина математического маятника, которую можно считать равной расстоянию от точки подвеса до центра шарика; T - период колебаний.

Однако, расчёт g по формуле (12) является неточным, ввиду того, что допускаются погрешности при определении длины маятника. Поэтому поступают следующим образом: измеряют длину маятника l_1 и определяют период T_1 по формуле (9), затем изменяют длину до значения l_2 и определяют соответствующий период T_2 . Разность квадратов периодов равна:

$$T_1^2 - T_2^2 = 4p^2(l_1 - l_2)/g,$$

откуда:

$$g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2} \quad (13)$$

Таким образом, при расчёте ускорения свободного падения по формуле (13) исключаются систематические погрешности, возникающие при измерении длины математического маятника в данной установке. Учёт случайных погрешностей осуществляется статистическим методом.

Порядок выполнения работы

1. Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком установить в нижней части стойки, обращая внимание на то, чтобы верхняя грань кронштейна показывала на шкале длину не меньше 50 см; затянуть вороток, фиксируя фотоэлемент в избранном положении.
2. Поместить над датчиком математический маятник.
3. Вращая вороток на верхнем кронштейне, установить длину математического маятника такую, чтобы шарик пересекал оптическую ось.
4. Ввести маятник в движение, отклонив шарик на $4-5^\circ$ от положения равновесия.
5. Нажать клавишу «СБРОС».
6. После подсчёта измерителем 10 колебаний нажать клавишу «СТОП».
7. По формуле (9) определить период T_1 математического маятника.
8. На шкале прибора оценить длину маятника l_1 .
9. Изменить длину маятника, повторить всю последовательность операций, рассчитать новый период колебаний T_2 .
10. По формуле (13) определить ускорение свободного падения.
11. Опыт повторить не менее 3-х раз. Выполнить статистическую проверку по методу Стьюдента. Сравнить полученное значение « g » с табличным.

Контрольные вопросы

1. Запишите закон движения гармонически колеблющегося тела?
2. Напишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний?

3. Что представляют собой физический и математический маятники, оборотный маятник?
4. Какими выражениями определяются периоды колебаний физического и математического маятников?
5. Дайте понятие момента инерции материальной точки?
6. Запишите основной закон вращательного движения твердого тела и примените его к физическому маятнику?
7. Как зависит ускорение свободного падения от высоты и географической широты местности?

Библиографический список

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М., 1986. 181 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Механика. М., 1989. 225 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. М., 1987.
4. Майсова Н.Н. Практикум по курсу общей физики. М., 1979.

Лабораторная работа 1-2

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы: изучение законов вращательного движения твердого тела.

Задача работы: проверка основного закона вращательного движения и теоремы Гюйгенса-Штейнера.

Теория

Твердым телом называется совокупность материальных точек, расстояния между которыми постоянны. Поэтому движение твердого тела сводится к движению составляющих его точек. В общем случае это движение можно представить как совокупность поступательного и вращательного движений.

При поступательном движении твердого тела все его точки движутся по параллельным траекториям. Это означает, что скорости всех точек тела в любой момент времени одинаковы, а, следовательно, одинаковы их ускорения. Таким образом, для описания поступательного движения твердого тела достаточно изучить движение его центра масс. Скорость поступательного движения твердого тела определяется как скорость движения центра масс:

$$\mathbf{V}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt},$$

где \mathbf{r}_c - вектор перемещения, численно равный расстоянию между начальной и конечной точками траектории центра масс. Аналогично определяется ускорение тела:

$$\mathbf{a}_c = \frac{d\mathbf{V}_c}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}_c}{dt^2}.$$

Основным законом динамики поступательного движения твердого тела является второй закон Ньютона:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}_c; \quad \mathbf{F} = m \cdot \frac{d\mathbf{V}_c}{dt}, \quad (1)$$

где \mathbf{F} - сила, действующая на тело; m - масса тела. Если на тело не действуют никакие силы или равнодействующая всех сил равна нулю, то тело движется равномерно и прямолинейно, или покоится, т.е. при $\mathbf{F} = 0$,

$m \cdot \frac{d\dot{V}_c}{dt} = 0$ и $\dot{V}_c = const$. Масса - величина скалярная и служит мерой инертности тела в поступательном движении.

Второй закон Ньютона (1) можно переписать и в другой форме:

$$\frac{d\dot{P}}{dt} = \mathbf{F},$$

где $\dot{P} = m \cdot \dot{V}_c$ - импульс тела, являющийся его динамической характеристикой.

При вращательном движении твердого тела траектории всех точек его являются концентрическими окружностями с центрами на одной прямой, называемой осью вращения. Все точки твердого тела, лежащие на оси вращения, неподвижны.

Рассмотрим движение произвольной i -ой точки вращающегося

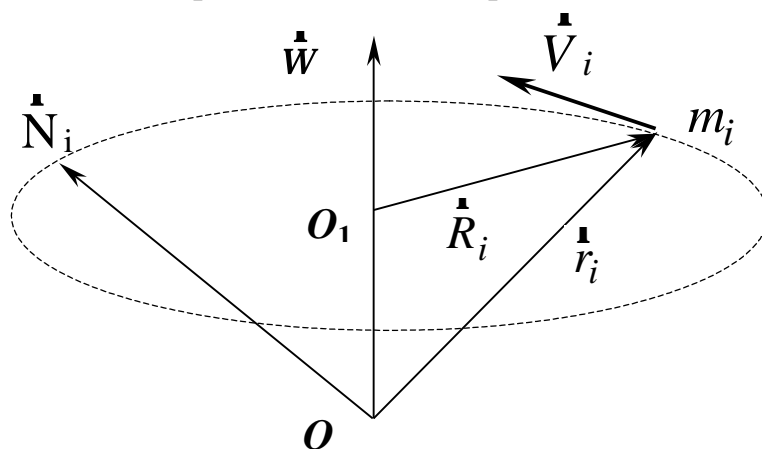


Рис.1

твердого тела. Для этого начало отсчета O радиуса-вектора этой точки \mathbf{r}_i поместим на оси вращения (рис.1). Вращательное движение любой i -ой точки твердого тела характеризуется линейной скоростью \dot{V}_i (скорость перемещения точки по траектории), определяемой векторным произведением

$\dot{V}_i = [\dot{\mathbf{W}}, \mathbf{r}_i]$, ее линейным ускорением $\dot{a}_i = [\dot{\mathbf{e}}_i, \mathbf{r}_i]$, угловой скоростью $\dot{\mathbf{W}} = \frac{d\dot{\mathbf{j}}}{dt}$ (где $d\dot{\mathbf{j}}$ - бесконечно малое угловое перемещение), угловым

ускорением $\dot{\mathbf{e}} = \frac{d\dot{\mathbf{W}}}{dt} = \frac{d^2\dot{\mathbf{j}}}{dt^2}$. Направления векторов $\dot{\mathbf{W}}$ и $d\dot{\mathbf{j}}$ совпадают и

определяются по правилу “правого винта”. Направление вектора $\dot{\mathbf{e}}$ совпадает с направлением вектора $\dot{\mathbf{W}}$, если $\dot{\mathbf{W}}$ возрастает, и противоположно ему, если $\dot{\mathbf{W}}$ убывает.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси угловая скорость вращения одинакова для всех частей тела, линейные же скорость и ускорение разных частиц различны.

Изменение кинематических и динамических характеристик зависит от действующего на тело вращающего момента и от момента инерции тела. Для всякой системы материальных точек справедливо уравнение моментов:

$$\frac{d\dot{N}}{dt} = \sum \dot{M}. \quad (2)$$

Это уравнение справедливо и для твердого тела, являющегося совокупностью материальных точек. Здесь \dot{N} - момент импульса тела; $\sum \dot{M}$ - сумма моментов внешних сил, действующих на тело.

Импульсом тела является сумма импульсов составляющих его материальных точек (или частиц). *Моментом импульса* относительно некоторой точки O является сумма моментов импульса составляющих его частиц относительно этой точки. *Моментом силы*, действующей на твердое тело, относительно точки O является сумма моментов сил, приложенных к составляющим его частицам, относительно той же точки.

Моментом импульса i -ой частицы относительно точки O (см. рис.1) называется вектор $\dot{N}_i = [\dot{r}_i, m_i \dot{V}_i] = m_i [\dot{r}_i, \dot{V}_i]$. Векторы \dot{r}_i и \dot{V}_i для всех частиц тела взаимно перпендикулярны, поэтому модуль вектора момента импульса равен $N_i = m_i r_i V_i = m_i r_i \omega R_i$, где R_i - радиус окружности, являющейся траекторией движения точки. Модуль вектора \dot{N}_i пропорционален величине угловой скорости ω . Направление же вектора момента импульса \dot{N}_i от направления вектора угловой скорости $\dot{\omega}$ не зависит. Вектор \dot{N}_i лежит в плоскости, проходящей через ось вращения и частицу m_i , и перпендикулярен вектору \dot{r}_i .

Моментом силы, действующей на материальную точку (частицу), относительно точки O называется вектор $\dot{M}_i = [\dot{r}_i, \dot{F}_i]$. Под \dot{F}_i здесь понимается равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку. Направление вектора \dot{M}_i , как и направление вектора \dot{N}_i определяется по правилу “правого винта”: если смотреть вслед вектору \dot{M}_i , то при совмещении вектора \dot{r}_i с вектором \dot{F}_i по кратчайшему переходу вращение вектора \dot{r}_i происходит по часовой стрелке.

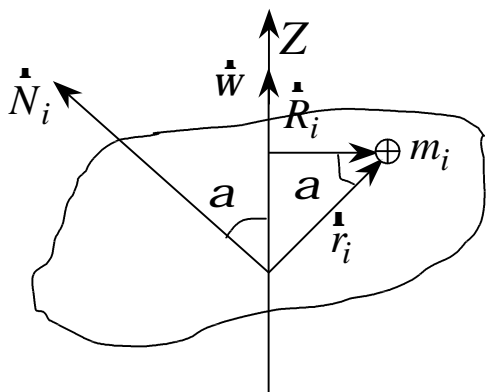


Рис. 2

Совместим ось вращения с направлением координатной оси z . Тогда проекция вектора \dot{N}_i на ось вращения (ось z), как видно из

рис.2, будет равна

$$N_{zi} = N_i \cos a = m_i r_i \omega R_i \cos a = m_i (r_i \cos a) \omega R_i = m_i R_i^2 \omega \quad (3)$$

Для однородного тела вращения (тела, симметричного относительно оси вращения и имеющего одинаковую по всему объему плотность) суммарный момент импульса $\dot{N} = \sum \dot{N}_i$ направлен вдоль оси вращения в ту же сторону, что и вектор \dot{W} . Действительно, в этом случае тело можно разбить на пары равных по массе и расположенных симметрично относительно оси вращения

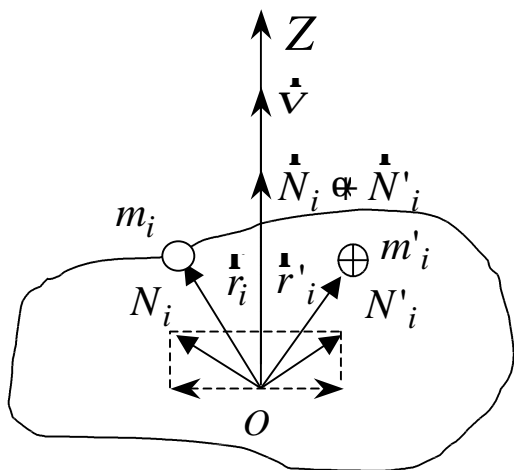


Рис. 3

частиц, например m_i и m'_i (рис.3). Для этих частиц векторы моментов \dot{N}_i и \dot{N}'_i одинаковы по модулю и расположены симметрично относительно оси вращения тела. Каждый из них можно разложить на составляющие векторы, один из которых направлен вдоль оси z , а второй – перпендикулярно ей.

Для рассматриваемой пары частиц перпендикулярные z компоненты векторов \dot{N}_i и \dot{N}'_i равны и направлены в противоположные стороны, а компоненты, параллельные оси z , направлены в одну сторону. Таким образом, вектор суммы моментов импульса каждой пары частиц m_i и m'_i направлен вдоль оси z и совпадает с направлением вектора \dot{W} . Поэтому и суммарный момент импульса \dot{N} однородного твердого тела вращения совпадает по направлению с вектором угловой скорости \dot{W} . Модуль же этого момента импульса, с учетом (3), имеет вид:

$$N = \sum N_{zi} = w \sum m_i R_i^2 .$$

Сумма произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от некоторой оси называется моментом инерции тела относительно этой оси.

$$I = \sum m_i R_i^2 . \quad (4)$$

Суммирование производится по всем элементарным массам m_i , на которые можно мысленно разбить тело. Момент инерции тела I характеризует инерционные свойства вращающегося тела, так как связан с массой образующих его частиц. Он зависит от распределения массы тела относительно оси вращения. Следовательно, момент инерции I тела может быть изменен при изменении положения оси вращения относительно тела или при перераспределении массы тела относительно неизменной оси вращения.

Таким образом, момент импульса тела зависит от момента инерции этого тела относительно оси вращения:

$$I = \sum m_i R_i^2 . \quad (5)$$

Учитывая, что векторы \dot{N} и \dot{W} в рассматриваемом конкретном примере имеют одинаковое направление, запишем это в векторной форме: $\dot{N} = I\dot{W}$. Данное соотношение получено для однородного тела, вращающегося вокруг оси симметрии. В общем же случае оно не соблюдается (для несимметричного тела, например, векторы \dot{N} и \dot{W} не совпадают по направлению).

Момент импульса относительно оси вращения, направление которой совпадает с направлением оси z , для любого тела (однородного или неоднородного, симметричного или несимметричного) равен: $N_z = \sum N_{z_i} = \sum m_i R_i^2 \omega = I\omega$. Это соотношение выполняется всегда. Следовательно, оно справедливо для общего случая.

Таким образом, для твердого тела, вращающегося относительно оси, совпадающей по направлению с координатной осью z , уравнение моментов

(2) должно иметь вид: $\frac{d}{dt} N_z = \sum M_z$, а с учетом выражения (5):

$$I \frac{d\dot{W}}{dt} = I \dot{\epsilon} = \sum M_z \quad (6)$$

Здесь вектор угловой скорости \dot{W} может измениться только по модулю, так как рассматривается вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Уравнение (6) называется основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела. Оно аналогично основному уравнению поступательного движения (1). В нем роль массы играет момент инерции, роль линейного ускорения - угловое ускорение, роль результирующей силы - суммарный момент внешних сил. Учитывая эту аналогию можно сразу получить выражения для различных физических величин, характеризующих вращающееся твердое тело. В частности, если кинетическая энергия поступательно движущегося тела определяется

выражением $E_k = \frac{1}{2} mV^2$, то кинетическая энергия вращающегося тела

должна быть равна, по аналогии, $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$, так как угловая скорость ω

является аналогом скорости поступательного движения тела.

Мы рассмотрели вращение твердого тела относительно неподвижной (закрепленной) оси. В самом общем случае твердое тело произвольной формы может совершать беспорядочное вращение вокруг закрепленной (неподвижной) точки. Это может быть и центр масс тела. В каждый следующий момент тело вращается вокруг другой оси, - его вращение происходит относительно мгновенных осей, проходящих через неподвижную точку. Определение момента инерции при этом является весьма сложной задачей. В этом случае применяется так называемый тензор инерции. Если вращение тела рассматривать в некоторой прямолинейной системе координат

оxyz, то тензор инерции твердого тела может быть записан в виде определенной совокупности его моментов инерции – в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum m_i (r_i^2 - x_i^2); \\ I_{xy} &= -\sum m_i x_i y_i; \\ I_{xz} &= -\sum m_i x_i z_i; \\ I_{yy} &= \sum m_i (r_i^2 - y_i^2); \\ I_{yx} &= -\sum m_i y_i x_i; \\ I_{yz} &= -\sum m_i y_i z_i; \\ I_{zz} &= \sum m_i (r_i^2 - z_i^2); \\ I_{zx} &= -\sum m_i z_i x_i; \\ I_{zy} &= -\sum m_i z_i y_i; \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь x_i, y_i, z_i - проекции радиус-вектора \mathbf{r}_i некоторой i - частицы тела на координатные оси x, y, z соответственно.

Тензором называют упорядоченную совокупность девяти величин, которые являются его компонентами и зависят от выбранной системы координат. При повороте системы координат эти величины преобразуются как произведения компонентов двух векторов (для сравнения: вектор есть упорядоченная совокупность трех величин, которые при изменении системы координат преобразуются так же как и координаты). Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} являются диагональными элементами тензора. Кроме этого, они называются осевыми моментами инерции, тогда как $I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy}$ - центробежные моменты инерции. При определенных условиях все недиагональные элементы тензора обращаются в нуль, и тензор инерции приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

В этом случае оси вращения тела, совпадающие с осями координат, являются главными осями инерции, а величины $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, $I_z = I_{zz}$ - главными моментами инерции. Таким образом, если оси системы координат направлены вдоль главных осей инерции тела, то центробежные моменты инерции равны нулю. Через каждую точку твердого тела можно провести три взаимно перпендикулярные главные оси. Процесс нахождения главных осей сводится к математической процедуре диагонализации тензора. На практике же обычно пользуются простыми соображениями симметрии. Например, для круглого цилиндра одна из главных осей тела должна проходить через выбранную точку, параллельно оси симметрии цилиндра, а две другие должны лежать в плоскости, перпендикулярной этой оси. (Подробнее о тензоре инерции можно прочитать в работах [1,2]).

Для однородного тела вращения удобно рассматривать главные оси инерции проходящими через центр масс этого тела (центральные главные оси инерции). В этом случае одна из них будет совпадать с его осью симметрии. Тогда один из главных моментов инерции, например I_z (пусть ось симметрии совпадает с координатной осью z), будет определяться по формуле (4), которая с учетом выражения (7) приобретает вид: $I_z = \sum m_i (r_i^2 - z_i^2)$. При переходе к непрерывному распределению масс суммирование следует заменить интегрированием. Если плотность тела ρ постоянна, а элементарный объем $dV = dx dy dz$, то

$$I_z = \int \rho (r_i^2 - z_i^2) dV = \rho \int (x^2 + y^2 - z^2) dV \quad (8)$$

С помощью выражения (8) можно достаточно просто определить моменты инерции тел вращения относительно их осей симметрии. Например, для диска и цилиндра радиусом R эта величина равна $I = \frac{1}{2} mR^2$, а для шара радиусом R она равна $I = \frac{2}{5} mR^2$.

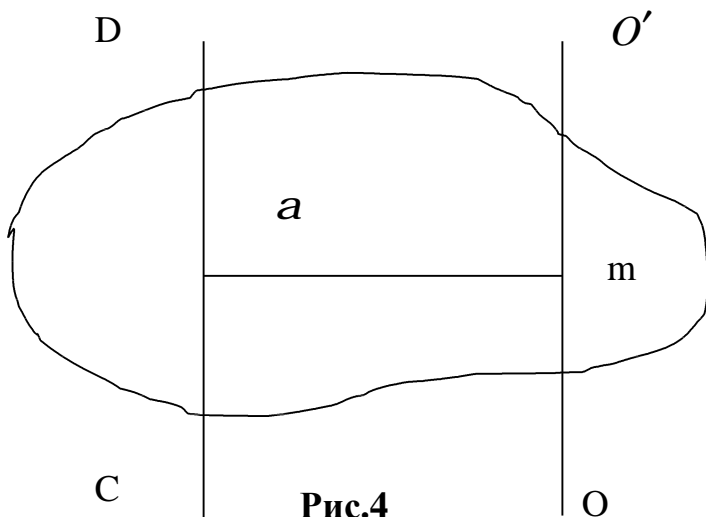


Рис.4

Вычисление моментов инерции относительно произвольной оси во многих случаях облегчает теорема Гюйгенса-Штейнера. Она связывает моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Момент инерции тела I относительно

произвольной оси OO' равен сумме момента инерции I_0 этого тела относительно оси CD , проходящей параллельно оси OO' через центр масс тела (рис.4), и произведения массы этого тела на квадрат расстояния между осями CD и OO' .

$$I = I_0 + ma^2 \quad (9)$$

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте поступательное и вращательное движение твердого тела.
2. Запишите уравнение моментов, поясните его физический смысл.
3. Что называется моментом силы?
4. Что называется моментом импульса?
5. Что называется моментом инерции относительно оси вращения?
6. Что такое тензор инерции? Что называется осевыми, центробежными моментами инерции?
7. Каковы основные свойства момента инерции относительно оси?
8. Чему равны моменты инерции цилиндра, шара?
9. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера?
10. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения. Какому закону динамики поступательного движения он аналогичен?
11. Чему равна кинетическая энергия вращающегося относительно оси твердого тела?

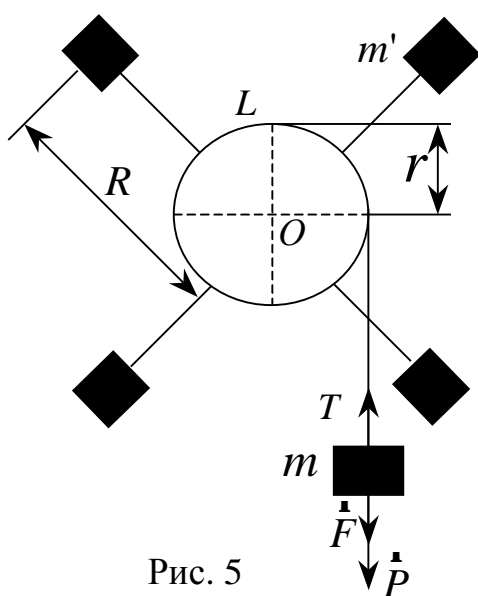


Рис. 5

Описание экспериментальной установки и вывод рабочей формулы

Приборы и принадлежности: маятник Обербека, набор грузов, секундомер, штангенциркуль, миллиметровая линейка.

Законы вращательного движения можно изучать при помощи прибора, называемого маятником Обербека (рис.5). Прибор состоит из двух шкивов L различных радиусов r , укрепленных на одной горизонтальной оси O , четырех стержней, расположенных под углом 90° друг к другу, и четырех одинаковых цилиндрических грузов массой m' каждый. Грузы можно перемещать вдоль стержней и закреплять на определенные

расстояния от оси вращения (R).

Грузы закрепляются симметрично, т.е. так, чтобы центр тяжести маятника совпадал с осью вращения. Прибор приводится во вращательное движение грузом массой m , прикрепленным к концу шнура, навитого на шкив. Сила, под действием которой груз массой m падает вниз, определяется равенством $\dot{F} = \dot{P} - \dot{T}$, где \dot{P} - сила тяжести; \dot{T} - сила натяжения шнура. Отсюда $\dot{T} = \dot{P} - \dot{F}$ или $\dot{T} = m\dot{g} - m\dot{a} = m(\dot{g} - \dot{a})$. Сила натяжения шнура \dot{T} сообщает телу угловое ускорение. Момент этой силы:

$$\dot{M} = \dot{T}r = m(\dot{g} - \dot{a})r, \quad (10)$$

где r - радиус шкива.

Основной закон вращательного движения (6) в этом случае запишется:

$$\dot{e} \cdot I = m(\dot{g} - \dot{a}) \cdot r \quad (11)$$

Если измерить (отметив по вертикальной шкале начальное и конечное положение падающего груза) расстояние h , проходимое грузом за время падения t , то можно определить его линейное ускорение a , равное линейному ускорению поверхности шкива, соприкасающейся с намотанной на нее нитью. Так как поступательное движение груза равноускоренное без начальной скорости, а нить при падении груза сматывается со шкива без скольжения, то

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (12)$$

Угловое же ускорение вращения маховика равно:

$$e = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt^2}. \quad (13)$$

Из основного закона вращательного движения $I = M/e$. Тогда с учетом выражений (11), (12) и (13), получаем:

$$I = \frac{mr^2(gt^2 - 2h)}{2h}. \quad (14)$$

Задание 1. Проверить основной закон вращательного движения при постоянном моменте инерции крестовины маятника, но при разных действующих на него моментах сил. (Задание выполняется при снятых с крестовины цилиндрических грузах m').

Пусть на маятник действует в первом случае момент M_1 , во втором - M_2 . Из (10) следует, что величину момента силы можно менять посредством изменения массы падающего груза. Пусть в одном случае она будет m_1 в другом . Тогда при указанных условиях должно быть справедливо соотношение:

(15)

где I - момент инерции маятника, определяется по формуле (14), которая может быть упрощена, если некоторые входящие в нее величины при проведении эксперимента сохраняют свои значения (высота падения грузов h и h_2 , радиус шкива r). Соотношение (15) мы и будем проверять экспериментально.

Из выражения (10) следует, что величину момента силы можно изменить посредством изменения массы падающего груза или радиуса шкива, с которого сматывается нить. Обозначим для первого случая

$$\tau = m_1 g r \quad \text{и} \quad \tau = m_2 g r$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для второго случая, когда изменение момента силы достигается изменением радиуса шкива.

В первом случае из (14) и (15) следует:

(16)

во втором случае:

(17)

Выполнение соотношений (15, 16, 17) проверяется в задании 1.

Порядок выполнения работы

1. Снять с крестовины грузы m_1 и m_2 .
2. Измерить штангенциркулем диаметр шкива: d .
3. Укрепить на нити груз массой m_1 так, чтобы он был на высоте h_1 над уровнем пола. Эту высоту измерить линейкой (с точностью до 1 см.).
4. Предоставив возможность грузу m_1 падать, определить по секундомеру время его падения t_1 . Секундомер включить в момент начала падения груза и остановить одновременно с ударом его об пол.
5. На конце нити укрепить другой груз массой m_2 на той же самой высоте h_1 и определить время его падения t_2 . Время опускания каждого груза измерять не менее трех раз. Результаты занести в таблицу 1.

Таблица 1.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
				опыта						

6. Рассчитать по формуле (14) значения \square и \blacksquare и убедиться в справедливости соотношения (15) (в пределах погрешности измерения) а, следовательно, и уравнения (6).

7. Определить момент инерции крестовины без грузов \square как среднее между \square и \square .

Задание 2. Проверить основной закон вращательного движения при постоянной массе \square падающего груза, но различных моментах инерции маятника.

При выполнении этого задания на стержнях маятника Обербека грузы массой \square закрепляются на различных расстояниях \square от оси вращения (тем самым меняется момент инерции маятника). Если \square – момент инерции маятника без грузов на крестовине, то полный момент инерции маятника с грузами \square будет равен:

$$\square \quad (18)$$

где \square - момент инерции грузов, находящихся на расстоянии \square от оси вращения, определяемый по теореме Гюйгенса - Штейнера (9) (расстояние \square складывается из радиуса шкива \square , расстояния от шкива до груза и половины длины груза);

\square - момент инерции всех четырех грузов относительно осей, проходящих через их центры масс.

При удалении центров масс грузов на различные расстояния от оси вращения \square и \square соответственно имеем:

$$\square \quad (19)$$

Из уравнений (11) и (17) следует: \square , а с учетом выражения (14) получаем:

$$\square \quad (20)$$

где \square - масса груза на стержне; \square - масса падающего груза. Таким образом, проверка основного закона вращательного движения в этом задании сводится к экспериментальной проверке равенства (20).

Порядок выполнения работы

1. Укрепить грузы \square на стержнях маятника на минимальном расстоянии \square от оси вращения (вплотную к валу). Измерить расстояние от середины

каждого груза до оси вращения маятника. Штангенциркулем измерить диаметр шкива . Измерения каждой из этих величин необходимо провести не менее 3-х раз. За их истинное значение принимают среднее арифметическое (при определении величины сначала находят среднее арифметическое значение ее для каждого груза на стержне, а затем уже среднее арифметическое из полученных четырех значений).

2. На конце нити укрепить груз массой г. Высоту опускания груза измерить метровой линейкой с точностью до 1 см.

3. Пользуясь секундомером, определить время падения груза (не менее 3-х раз).

4. Пункты 1-3 повторить, закрепляя каждый раз грузы симметрично относительно оси вращения на расстояниях , (примерно посередине и на концах стержней). Для каждого положения грузов измерить величины (величины , , остаются неизменными).

5. Снять с крестовины два груза, оставив на ней два симметрично расположенных относительно оси груза, и повторить пункты 1-3.

6. Для каждого положения грузов , , по формуле (14) рассчитать соответствующие моменты инерции .

7. Результаты измерений занести в таблицу 2:

Таблица 2.

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
				опыта	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>				1					
				2					
				3					

8. Произвести расчеты по формуле (20) и занести результаты в таблицу 3.

Таблица 3

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

9. Сравнить результаты, полученные из выражений (19) и (20).

10. Пользуясь полученным экспериментальным материалом, убедиться (в пределах погрешности эксперимента) в правильности уравнения (19), а, следовательно, и уравнения (18). Критерий допустимого различия численных значений левой и правой частей уравнения (20) указывается преподавателем.

Примечание. Уравнения (16) и (17) получены без учета сил трения в оси маятника и силы трения о воздух. Силой трения при поступательном

движении груза на нити можно пренебречь. При вращательном движении маятника наибольшую роль играет момент силы трения в оси маятника (момент силы трения о воздух незначителен). Величина момента силы трения в оси при небольших угловых скоростях вращения маятника является практически постоянной величиной, равной моменту сил трения покоя. Это позволяет произвести оценку данной величины (см. работу[4]). Чем меньше по сравнению с моментом силы натяжения нити момент силы трения, тем точнее, при прочих равных условиях, будут выглядеть уравнения (16) и (19).

Задание 3. Проверить выполнение теоремы Гюйгенса-Штейнера:

$$\boxed{\times}$$

Полный момент инерции маятника представлен выражением (18), где $\boxed{}$ - момент инерции грузов находящихся на расстоянии $\boxed{}$ от оси вращения, определяемый по теореме Гюйгенса - Штейнера (9).

$\boxed{}$ - момент инерции всех четырех грузов относительно осей, проходящих через их центры масс. В случае цилиндрических грузов:

$$\boxed{\times} \quad \boxed{} \quad (21)$$

где $\boxed{}$ - высота цилиндра, $\boxed{}$ - его радиус. В первом приближении грузы можно считать материальными точками и величиной $\boxed{}$ пренебречь (степень приближения студенту предлагается установить самостоятельно). Тогда окончательно выражение (18) для четырех грузов на крестовине примет вид:

$$\boxed{\times} \quad \boxed{} \quad (22)$$

Соответственно, для двух грузов формула (22) преобразуется:

$$\boxed{\times} \quad \boxed{} \quad (23)$$

Экспериментальное значение момента инерции маятника с грузами определяется по формуле (14) и получены при выполнении второго задания (последний столбец таблицы 2).

Порядок выполнения работы

1. По формулам (22, 23) рассчитать величины $\boxed{\times}$ для всех значений $\boxed{\times}$ внесенных в таблицу 2 при выполнении второго задания. Полученные результаты сравнить со значениями $\boxed{\times}$ (значения $\boxed{\times}$ из таблицы 2).

2. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 4:

Таблица 4.

3. Сравнить результаты, полученные из выражений 14 и 22(23).
4. Сравнение расчетного значения момента инерции маятника с данными его экспериментального определения заключается в оценке попадания в доверительный интервал для .

Контрольные вопросы

1. Как получить рабочую формулу для определения момента инерции маятника Обербека?
2. Как получить расчетную формулу для проверки основного закона вращательного движения при постоянном моменте инерции?
3. Как получить расчетную формулу для проверки основного закона вращательного движения при постоянной массе падающего груза?
4. Как зависит время падения груза от расположения остальных грузов на крестовине маятника Обербека?
5. Как записать теорему Гюйгенса-Штейнера применительно к маятнику Обербека?
6. При каком расположении грузов на крестовине маятника Обербека их можно считать точечными?
7. При каком положении грузов на крестовине возможно лучшее совпадение величин и ? Почему?
8. Как можно изменить момент силы, приложенной к маятнику Обербека?
9. Как можно изменить момент инерции маятника Обербека?
10. Зависит ли момент инерции маятника Обербека от момента силы?
11. Зависит ли момент инерции маятника Обербека от углового ускорения?
12. Можно ли учесть момент силы трения при выводе формулы для момента инерции маятника Обербека?

Библиографический список

1. Матвеев В.И. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986.
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. М.: Наука, 1971. 478 с.
3. Хайкин С.Е. Физические основы механики. М.: Наука, 1965. 840 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. М.: Наука, 1990. Т.1.
5. Савельев И.В. Курс общей физики. М.: Наука, 1987. Т.1.

6. Иверонова В.И. Физический практикум. М.: Наука, 1967. 235 с.

Правила техники безопасности

При работе с маятником Обербека необходимо закреплять грузы на стержнях очень тщательно и обязательно завинчивать предохранительные винты на конце стержней.

В противном случае груз может сорваться со стержня.

Лабораторная работа 1-3

ИЗУЧЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРАВИЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Цель работы: рассматриваются понятия тензора инерции, эллипсоида инерции при вращении твердого тела.

Задача работы: оценка моментов инерции твердых тел правильной геометрической формы методом крутильных колебаний.

Теория

Тензор инерции

При описании вращательного движения твердого тела часто появляется необходимость знать его движение около точки закрепления. Важнейшим понятием при этом является тензор инерции. Для упрощения расчетов

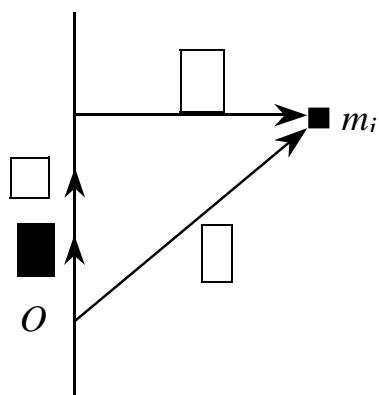


Рис. 1

воспользуемся представлением о теле как совокупности материальных точек с массами m_i .

Закрепим тело в точке O . Радиус-вектор точки с массой m_i относительно O обозначим r_i (см. рис. 1). Пусть ω - мгновенная угловая скорость тела. Тогда скорость v_i - й точки тела $v_i = \omega \times r_i$. Поэтому момент импульса L_i всего тела относительно точки O равен:

$$L = \sum m_i r_i \times v_i = \sum m_i r_i \times (\omega \times r_i) \quad (1)$$

где использована формула разложения двойного векторного произведения

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

Векторное равенство (1) можно написать в виде трех проекций на оси координат:

$$\sum m_i (r_{i2}^2 - r_{i3}^2) \omega_1 = L_1, \quad \sum m_i (r_{i3}^2 - r_{i1}^2) \omega_2 = L_2, \quad \sum m_i (r_{i1}^2 - r_{i2}^2) \omega_3 = L_3 \quad (2)$$

Учитывая, что $L_i = m_i r_i^2 \omega_i$, вместо (2) имеем

$$\boxed{\times}$$
(3)

где:

$$\boxed{\times}$$
(3a)

аналогично выражаются другие величины $\boxed{\times}$ и т.д. Поэтому из 9 величин $\boxed{\times}$, различны лишь 6. Величины $\boxed{\times}$ называются осевыми моментами инерции, а $\boxed{\times}$ называются центробежными моментами инерции. Таким образом, момент импульса тела весьма сложно зависит от распределения масс в теле, и его направление не всегда совпадает, с угловой скоростью вращения тела. Совокупность величин

$$\boxed{\times}$$
(4)

называется тензором инерции. Величины $\boxed{\times}$ являются диагональными элементами тензора, а остальные – недиагональными. Если величины, расположенные симметрично относительно диагонали, равны, то такой тензор называется симметричным.

Главные оси тензора инерции

Предположим, что все недиагональные элементы тензора равны \square , а отличными от нуля являются лишь диагональные, т.е. тензор имеет следующий вид:

$$\boxed{\times}$$

При такой ситуации говорят, что оси тензора, совпадающие с осями координат, являются главными осями инерции, а величины $\boxed{\times}$ называют главными моментами инерции. О тензоре в этом случае говорят, что он приведен к диагональному виду. Таким

образом, если оси системы координат направлены вдоль главных осей инерции тела, то центробежные моменты инерции отсутствуют. Процесс нахождения главных осей сводится к математической процедуре диагонализации тензора. Здесь нет необходимости ее рассматривать.

Отметим лишь результат: через любую точку твердого тела можно провести три взаимно-перпендикулярные главные оси. Главные моменты инерции будут различны для различных точек тела. Если главные оси проведены через центр масс тела, они называются центральными главными осями. Таким образом, не имеет смысла говорить о главных моментах инерции тела, не указав точки тела, через которую проведены главные оси.

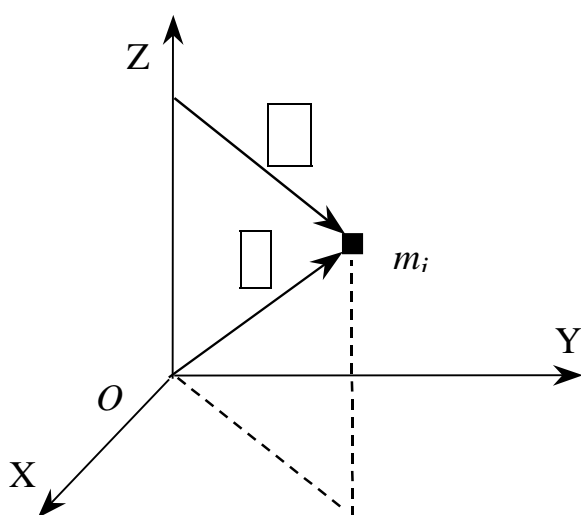


Рис. 2

При переходе от одной точки тела к другой главные оси, вообще говоря, меняют свое направление, а главные моменты свое значение.

Например, не имеет смысла начертить в теле ось и сказать, что она главная. Лишь когда речь идет о центральных главных осях и центральных главных моментах инерции, нет необходимости указать точку тела, к которой они относятся, потому что по определению известно, что это точка центра масс тела. Особое значение имеет осевой момент инерции (рис.2), равный

$$\text{[Redacted]} \quad (6)$$

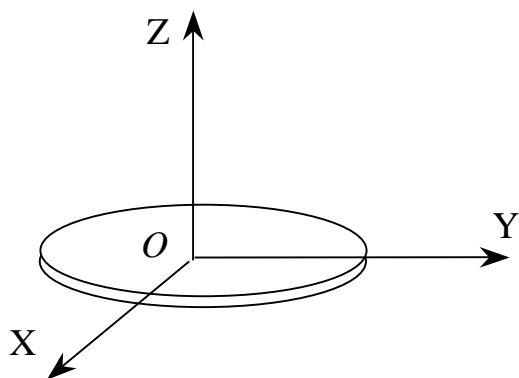
где – расстояние точки от оси, поскольку во многих случаях он позволяет полностью описать динамику вращения твердого тела. Его также называют моментом инерции тела относительно оси.

1.3. Нахождение главных осей

Главные оси во многих случаях могут быть найдены без громоздких математических расчетов, которые надо провести для диагонализации тензора инерции. Для этого иногда бывает достаточно воспользоваться простыми соображениями симметрии. Пусть имеется плоская пластинка бесконечно малой толщины. Точка, через которую проходят главные оси, лежит на пластинке. Направим ось перпендикулярно ей. Очевидно, что координаты всех точек пластинки равны нулю, т.е. все . В этом случае из формулы (3) имеем . Следовательно, любая ось,

перпендикулярная этой пластинке, будет главной. Две другие главные оси расположены в плоскости пластинки взаимно перпендикулярно друг другу. Их направление зависит от формы пластинки.

Рассмотрим случай круглой пластинки (рис.3) конечной толщины. Точка



, лежащая в средней плоскости пластинки, есть точка, относительно которой надо найти главные оси. Очевидно, что одна главная ось направлена перпендикулярно плоскости пластинки. Утверждается, что другой главной осью является ось, лежащая в средней плоскости и проходящая через эту точку и центр диска. Эта ось на рис.3 взята за ось . Убедимся в этом. Имеем:

Рис. 3

Видно, что и из-за симметрии пластинки относительно плоскостей и . Таким образом, выбранная ось действительно является главной. Третья главная ось однозначно определяется двумя найденными, будучи перпендикулярной им обеим. Проверим, что ось действительно является главной. Имеем:

Равенства обуславливаются симметрией пластинки относительно плоскости .

Если круглая пластинка имеет значительную толщину, то она называется круглым цилиндром. Все изложенные о главных осях пластинки соображения остаются, конечно, справедливыми и для цилиндра.

1.4. Моменты инерции относительно осей

Известно, что момент импульса относительно оси, проходящей через центр масс, можно записать так:

$$\boxed{\text{input type="text"/>$$
(8)

где I_0 - тензор момента инерции относительно системы координат, начало которой совпадает с центром масс. Компоненты I_0 будут постоянны во времени, если система координат неизменно связана с телом.

Зная I_0 , можно найти момент инерции относительно любой оси, проходящей через O - центр масс тела. Пусть направление оси вращения задано вектором \vec{n} . Тогда, учитывая, что I_0 симметричен, по формуле (8) проекцию I_0 на \vec{n} можно записать так: $I_n = I_0 \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}$, где I_n - момент инерции относительно оси \vec{n} . Или: $I_n = I_0 \cdot \cos^2 \alpha$. Если записать число I_n через компоненты тензора I_0 и вектора \vec{n} , то получим довольно громоздкое выражение. Приведем более краткую и ясную формулу, приняв за оси координат главные направления $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$; тогда $I_n = I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3$, где $\cos \alpha_i$ - направляющие косинусы \vec{n} по отношению к осям \vec{e}_i . Следовательно:

$$I_n = I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3$$

Поэтому:

$$I_n = I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3 \quad (9)$$

где I_1, I_2, I_3 - моменты инерции относительно главных осей, проходящих через центр масс. По формуле (9) можем при известных I_1, I_2, I_3 и $\cos \alpha_i$ точно определить момент инерции I_n относительно любой оси \vec{n} .

Описание эксперимента

Итак, для момента инерции I_n имеем формулу:

$$I_n = I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3$$

(10)

где $\cos \alpha_i$ - направляющие косинусы; I_1, I_2, I_3 - моменты инерции относительно осей, проходящих через середины противоположных граней и через геометрический центр прямой призмы - точку O (оси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ на рис.4), а I_n - момент инерции относительно диагональной оси, проходящей через противоположные

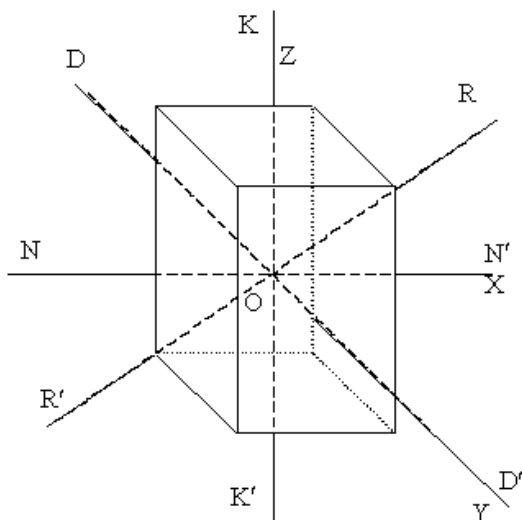


Рис 4

вершины груза (ось)

Запишем выражение для уравнения колебаний физического маятника

$$\boxed{\times} \text{ }, \quad (11)$$

которое можно переписать в виде:

$$\boxed{\times} \text{ }, \quad (11a)$$

где - момент инерции маятника, а . Выразим момент инерции через период колебаний , т.е.

$$\boxed{\times} \text{ }, \quad (12)$$

где

$$\boxed{\times} \text{ }$$

$$\boxed{\times} \text{ } \quad (13)$$

Подставляя эти соотношения в формулу (10), получим:

$$\boxed{\times} \text{ } \quad (14)$$

или

$$\boxed{\times} \text{ } \quad (14a)$$

Теперь рассмотрим для примера образец в виде прямого параллелепипеда с ребрами . Для его диагонали квадраты направляющих косинусов имеют вид:

$$\boxed{\times} \text{ } \quad (15)$$

Тогда выражение (14a) принимает вид:

$$\boxed{\times} \text{ }, \quad (16)$$

где

$$\boxed{\times} \text{ }$$

Следовательно

$$\boxed{\times} \text{ }, \quad (17)$$

где левая часть

$$\boxed{\times} \text{ }$$

а правая часть

И тогда соотношение (17) можно записать в виде:

(18)

Таким образом, проверка выполнения соотношения для моментов инерции (10) сводится в эксперименте к проверке соблюдения соотношения для периодов колебаний(18), что и является задачей этой лабораторной работы.

Величины определяются экспериментально из 5 опытов.

Для каждого периода колебаний вычисляются

определяется по формуле: , где – коэффициент

Стьюдента.

(19)

Затем рассчитывается

определяется по формуле

(20)

Для расчета доверительного интервала находят среднее квадратичное величины

где x

(21)

где x – коэффициент Стьюдента.

Приборы и принадлежности:

крутильный маятник ГРМ-05, набор образцов (тел правильной геометрической формы), штангенциркуль.

Порядок проведения работы

1. Подготовить прибор к работе, установить магнит в выбранном положении.
2. Измерить с помощью штангенциркуля геометрические размеры образца – длину, высоту и ширину – в формуле (20).
3. В рамке прибора закрепить образец по оси, проходящей через центры противоположных сторон (главная ось).
4. Поворачивая рамку прибора, приблизить ее стрелу к электромагниту таким образом, чтобы электромагнитная сила фиксировала положение рамки.
5. Нажать кнопку «Пуск».
6. После считывания измерителем не менее 10 крутильных колебаний, нажать кнопку «Стоп».
7. Вычислить период колебаний крутильного маятника по формуле , где – число колебаний, - их время.
8. Повторить опыт 5 раз. Вычислить среднее значение квадрата периода x. Вычислить среднее квадратичное x по формуле (19).
9. Поочередно закрепляя образец относительно двух других главных осей, повторить эксперимент согласно пунктам 4 – 8, определив, таким образом, средние квадраты периодов x.
10. Рассчитать среднее значение периода колебаний относительно оси, совпадающей с пространственной диагональю образца, определить

доверительный интервал, используя формулы (20) и (21). Записать результат в виде:

11. Закрепить образец вдоль его пространственной диагонали. Повторить эксперимент, описанный в пунктах 4. – 8.

12. Определить доверительный интервал, используя формулу (19). Записать ответ в виде:

13. Сравнить и . Сделать вывод.

14. Повторить весь эксперимент для другого образца.

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции тела?
2. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения и уравнение моментов.
3. Что называется тензором инерции?
4. Что такое главные и центробежные моменты инерции?
5. Что такое эллипсоид инерции? Запишите уравнение, определяющее эллипсоид инерции.
6. Получите формулы для моментов инерции диска, цилиндра, конуса относительно их геометрических осей.
7. Запишите выражение для кинетической энергии тела, участвующего в поступательном и вращательном движении.
8. Запишите формулу полной энергии цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости.
9. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.

Библиографический список

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М., Высшая школа. 1986.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. М., Наука. 1990. Т.1.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. М., Наука. 1987. Т.1.

Лабораторная работа 1-4

ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

Цель работы: изучение физического явления трения качения.

Задача работы: экспериментальное определение коэффициента трения качения.

Теория

Трение – явление, сопровождающее нас везде и повсюду. В одних случаях оно вредно, и мы с ним ведем борьбу, в других случаях оно полезно, и мы всячески стараемся его увеличить. Различают трение покоя, трение скольжения и трение качения. В основе всех видов трения лежат электрические силы взаимодействия молекул.

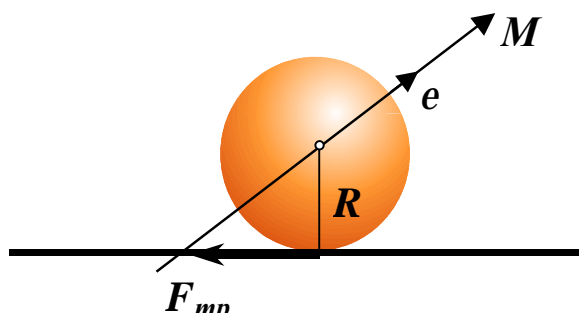


Рис.1а

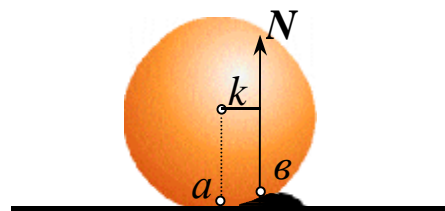


Рис.1 б

Данная работа посвящена изучению трения качения. Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого. Это явление можно наблюдать, если толкнуть шар по плоской горизонтальной поверхности. Шар остановится, прокатившись, некоторое расстояние. Какая сила вынуждает его к этому? Предположим, что это сила трения покоя , действующая на шар и, направленная против скорости движения (рис.1а). Однако, исходя из основного закона динамики вращательного движения

$$\boxed{\times}$$

где - момент сил, действующий на шар, следует, что сила способствует увеличению скорости катящегося шара, так как вектор момента силы трения , в этом случае, сонаправлен с вектором углового ускорения (момент силы вычисляется относительно центра масс шара).

Следовательно, причиной тормозящей движение является другая сила. Если цилиндр и поверхность стола, по которой он катится, являются абсолютно твердыми (абсолютно жесткими), то контакт между ними имеет место лишь в одной точке (рис.1а). При этом сила тяжести и сила реакции опоры проходят через точку соприкосновения шара с плоскостью и не приводят к возникновению тормозящего момента этих сил относительно центра масс.

На самом деле абсолютно твердых тел не существует. Вследствие деформации касание тел происходит не в одной точке, а вдоль некоторой площадки \square (рис 1 б). При этом результирующая сила реакции опоры \square в области контакта, будет смещена на некоторое расстояние \square по направлению движения в силу того, что при движении шара, его передняя часть области деформации как бы «ударяется» о поверхность стола и получает некоторый импульс силы. При этом поверхность стола действует вверх на переднюю, часть шара немного сильнее, чем в случае, когда он покоится. Что касается задней области контакта, то тут шар начинает двигаться вверх, и, следовательно, поверхность стола действует на него несколько слабее, чем в случае покоящегося шара, что и приводит к смещению действия силы реакции опоры на величину \square . Возникающий при этом момент силы \square , действует так, что угловая скорость шара будет уменьшаться. Входящую в формулу линейную величину \square называют *коэффициентом трения качения*, измеряют его обычно в сантиметрах. Он существенно отличается от коэффициента трения покоя, так как является размерной величиной и, по существу, характеризует плечо силы реакции опоры относительно оси цилиндра. Значение коэффициента зависит от материала тел и определяется опытным путем.

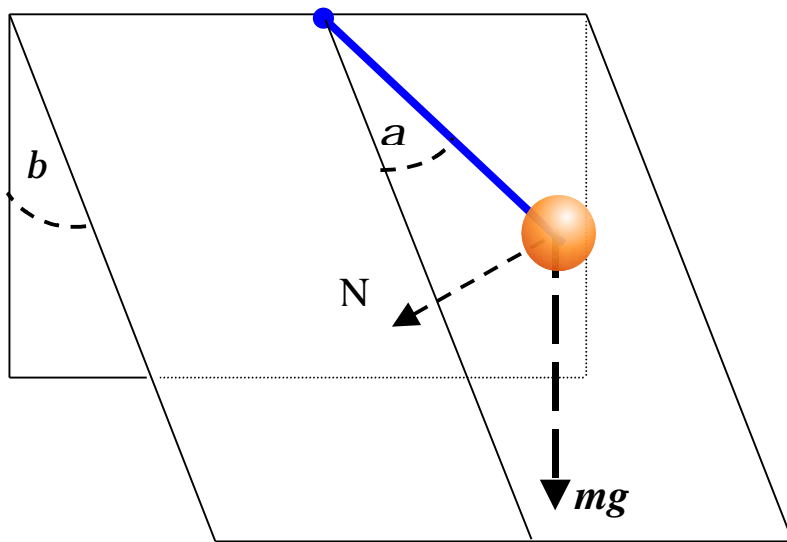
Ниже приведены значения этого коэффициента для некоторых материалов:

Дерево по дереву	0.05-0.08 см
Сталь мягкая по стали (колесо по рельсу)	0.005 см
Сталь закаленная по стали (шариковый подшипник)	0.001 см

Ньютоном установлено, что если шар, под действием импульса силы движется прямолинейно по горизонтальной упруго деформируемой плоскости, то момент сил трения покоя связан с моментом силы трения качения соотношением \square , откуда \square , где \square – сила нормального давления. Обычно отношение \square для большинства материалов значительно меньше коэффициента трения скольжения. Этим объясняется то, что в технике, когда это, возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т.п.).

В данной работе для определения коэффициента трения качения используется наклонный маятник (рис.2).

Наклонный маятник представляет собой плоскость, отклоненную от



вертикали на угол , и шарика радиуса и массой закрепленного при помощи тонкой нити длиной на этой плоскости. Отклоним шар от положения равновесия на угол . Предоставленный самому себе, он будет совершать затухающие колебания по плоскости. Полная энергия маятника с учетом работы силы запишется в виде суммы трех слагаемых -

Рис. 2

кинетической , потенциальной и работы силы трения качения :

,

где .

Здесь и моменты инерции шарика; , - угловые скорости шарика при движении по плоскости относительно точки подвеса и собственного вращения соответственно, причем оба члена характеризуют кинетическую энергию вращательного движения шарика.

При отклонении шарика от положения равновесия на угол его потенциальная энергия будет , где - высота поднятия шарика относительно горизонтальной плоскости (рис.3), то есть

$$\text{[input type="text"]}$$

При колебаниях шарика потенциальная энергия превращается в кинетическую и работу силы трения. При этом работа силы трения качения определится как , где - длина пути пройденного шариком.

Обозначим уменьшение угла , пройденного шариком за один период через , тогда за полпериода шарик пройдет расстояние , и

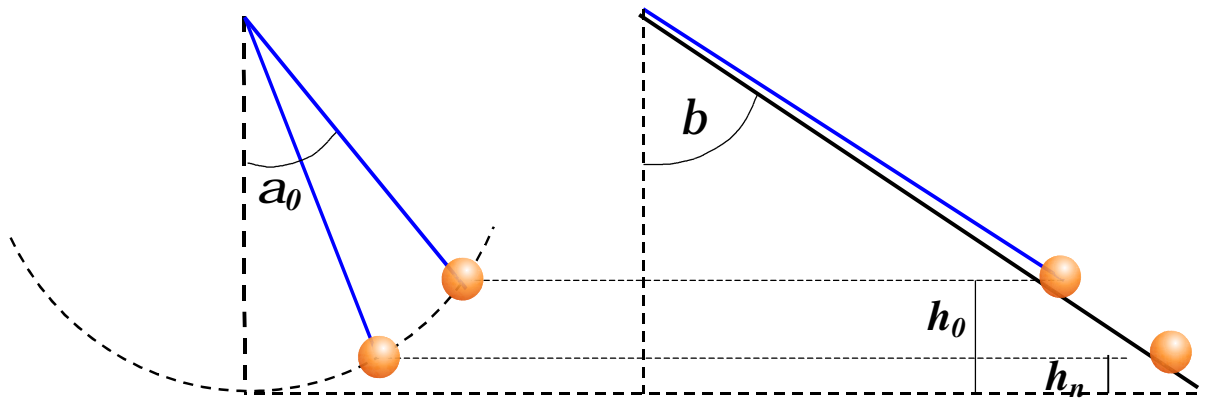


Рис. 3

работа силы трения качения будет . А с учетом силы нормального давления (рис.2) работа силы трения качения

.

Запишем величину потенциальной энергии шарика в начальный момент времени при угле . и после прохождения им половины периода , когда (шарик максимально отклонён в противоположную сторону):

.

Из закона сохранения энергии получим уравнение, связывающее и , т.е.

.

В данной работе можно принять условие , что есть следствие малости . Это позволяет нам воспользоваться разложением в

ряд Тейлора по , т.е. и выбирая достаточно длинный подвес, тем самым реализовать приближение маятника к идеальному, то есть считать

.

Как видно окончательное выражение связи \square с \square не зависит от \square , поэтому проводя \square колебаний и беря разность угловых амплитуд и деля на \square , т.е. \square , где \square - число периодов, получим экспериментальное выражение для вычисления коэффициента трения качения

$$\square$$

Оценить погрешность измерений по Стьюденту и объяснить возможные причины ее появления.

Приборы и принадлежности:

установка «наклонный маятник», набор шаров и соответствующих им образцов (сталь, латунь)

Описание экспериментальной установки

На рис.4 изображен наклонный маятник. В основание 1, оснащенном четырьмя ножками с регулируемой высотой, вмонтирована стойка 2, на которой крепится штатив 3 и червячная передача. Посредством оси червячная передача соединена с кронштейном, к которому прикреплены градусные шкалы 4 и 5. К корпусу маятника подвешен на нити шар 6, заканчивающийся указателем.

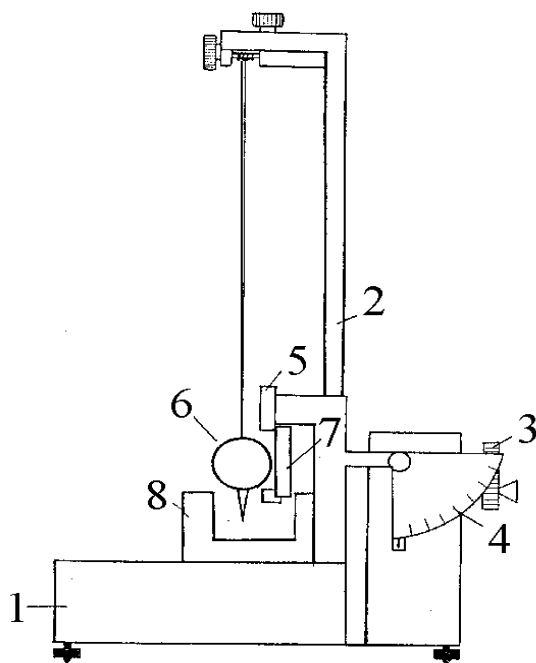


Рис 4

Шар движется по металлической пластине 7 вставленной в направляющие. Пластины делаются из различных материалов (сталь, латунь) и являются съемными. К кронштейну присоединен фотоэлектрический датчик 8. На передней панели корпуса расположена шкала секундомера, табло периодов, кнопки «сеть», «сброс» и «стоп».

Порядок выполнения работы

1. Включить прибор в сеть тумблером «сеть» и дать ему прогреться не менее пяти минут.

2. Присоединить шар к нити маятника и вставить в направляющие соответствующую пластину.

3. Вращая воротком на верхнем кронштейне, установить длину маятника, так, чтобы он соприкасался с поверхностью образца. Обратить внимание, чтобы при качении шарика по пластине указатель пересекал световой поток, идущий к электрическому датчику.

4. Наклонить штатив маятника на угол (отсчет угла по шкале 4).

5. Отклонить шар от положения равновесия на угол градусов по шкале 5.

6. Провести десять полных колебаний шара, записать значение угла . Эксперимент повторить не менее трех раз.

7. Эксперимент проводится и для других углов , например, 30, 40, 50, 60 градусов для каждой пары шар – пластина.

Результаты эксперимента занести в таблицу.

Таблица.

Образец Шара	Радиус шара, <input type="text"/>	Угол наклона маятника, <input type="text"/>	Начальный угол отклонения шара, <input type="text"/>	Угол отклонения шара через <input type="text"/> колебаний, <input type="text"/>	Коэффициент трения качения, <input type="text"/>

Контрольные вопросы

1. Что понимается под коэффициентом трения качения? Чем эта величина отличается от коэффициента трения покоя?

2. Почему катящийся шар останавливается?

3. Выведите формулу экспериментального определения трения качения методом наклонного маятника?

Библиографический список

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М., Высшая школа, 1986. 206 с.

2. Стрелков С.П. Механика М., Наука, 1975. 263 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М., Высшая школа. 1974. 71 с.

4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М., Высшая школа 1990. 73 с.

Лабораторная работа 1-5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Цель работы: изучение основных положений теории упругости, относящихся к деформациям сдвига и кручения

Задача работы: экспериментальное определение модуля сдвига статическим методом

Теория

Все твердые тела способны под действием внешних сил деформироваться, т.е. изменять свою форму или объем. Тела, в которых после прекращения действия внешних сил деформация исчезает, а первоначальная форма и объем полностью восстанавливаются, называют абсолютно упругими, а саму деформацию – упругой. Тела, которые после прекращения действия внешних сил не восстанавливают первоначальные форму и объем, называют неупругими или пластичными; а их деформацию называют неупругой или пластичной.

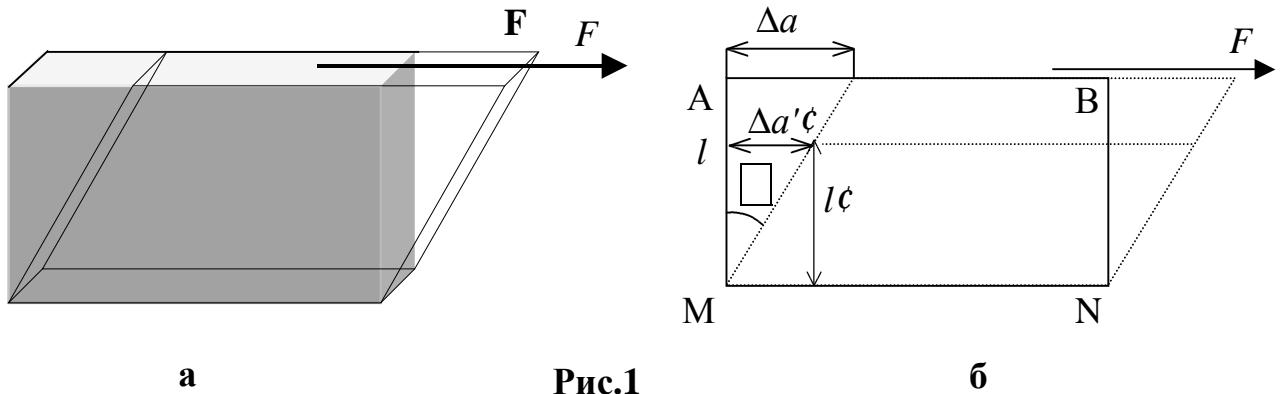
В природе, конечно, нет абсолютно упругих и абсолютно неупругих тел. Все тела в той или иной мере неупругие. Но многие твердые тела (например, металлические) при малых деформациях ведут себя как абсолютно упругие, остаточные деформации в них настолько малы, что ими вполне можно пренебречь. С другой стороны, имеются такие тела (воск, сырая глина, свинец и др.), которые уже при малых деформациях ведут себя как абсолютно неупругие: они сохраняют деформацию после прекращения действия внешних сил.

Внутренние силы, возникающие при деформациях, существенно различаются между собой. В упругих телах они определяются величиной и видом деформации и при устранении внешних сил возвращают телу его первоначальную форму и объем. В неупругих телах внутренние силы зависят от скорости изменения деформации и при устранении внешних сил исчезают, не возвращая телу первоначальной формы.

Существует много видов упругих деформаций: одностороннее растяжение, одностороннее сжатие, всестороннее растяжение (сжатие), изгиб, сдвиг, кручение и т.д. Можно показать, что любую деформацию можно свести к совокупности двух основных деформаций – растяжение и сдвиг/1-3/. Согласно закону Гука, при любой малой деформации сила упругости пропорциональна величине деформации; малые деформации тела пропорциональны приложенным силам.

1.1 Закон Гука при деформации сдвига

Деформацию сдвига можно получить в параллелепипеде, если одну его грань закрепить, а к противоположной приложить силу F , лежащую в плоскости этой грани (рис.1,а).



Величина Δa (рис.1, б) есть абсолютное смещение (сдвиг) слоя АВ относительно неподвижно закрепленного слоя MN; $\Delta a' \epsilon$ - абсолютный сдвиг нижележащего слоя. Из рис.1 видно, что абсолютный сдвиг неодинаков для разных слоев; он тем больше, чем дальше сдвигаемый слой находится от неподвижного. Однако отношение, абсолютного сдвига Δa к расстоянию l между сдвигаемыми и неподвижными слоями, называемое относительным сдвигом ϵ , одинаково для всех слоев и равно тангенсу угла сдвига ϵ :

$$\epsilon = \frac{\Delta a}{l}$$

При малых углах сдвига ϵ и, следовательно, Δa . Таким образом, при малой деформации относительный сдвиг равен измеренному в радианах углу сдвига.

При сдвиге внутри тела возникают упругие силы, которые при статической деформации уравновешивают внешнюю силу (силу сдвига):

$$F = k \Delta a$$

Измеряя абсолютный сдвиг Δa верхней грани АВ (рис.1, б) при различных значениях приложенной силы, можно установить, что абсолютный сдвиг прямо пропорционален силе сдвига F и расстоянию l смещаемой грани от неподвижной и обратно пропорционален площади S сдвигаемого слоя:

$$\Delta a = \frac{F l}{k S} \quad (1)$$

где k - коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом сдвига. Опыт показывает, что в выбранной системе единиц k зависит только от материала образца, являясь, таким образом, количественной характеристикой упругих свойств тела при деформации

сдвига. На практике чаще имеют дело с величиной \square , обратной \square , которую называют модулем сдвига:

$$\square = \frac{1}{\square} \quad (2)$$

Значения модуля сдвига для некоторых материалов (для сопоставления приводятся значения модуля Юнга \square) приведены в таблице:

Вещество	\square , Па.	\square , Па.
Сталь	200	76
Железо	190	76
Медь	98	44
Алюминий	69	24
Свинец	10	-
Дерево	12	-

Для большинства однородных изотропных тел модуль сдвига составляет по величине приблизительно 0,4 численного значения модуля Юнга. Итак, модуль сдвига, исходя из выражения (1) и (2), запишется:

$$\square = \frac{1}{2} \square \quad (3)$$

Отношение \square называют механическим напряжением сдвига. Оно равно силе, действующей на единицу площади поверхности и направленной по касательной (тангенциально) к этой поверхности. Из выражений (1-2) следует, что

$$\square = \square \quad (4)$$

т.е. относительный сдвиг прямо пропорционален напряжению сдвига. Очевидно, что при статической и однородной деформации упругое

тангенциальное напряжение \square , возникающее в теле, будет по модулю равно и по направлению противоположно напряжению сдвига \square . В этом случае соотношению (4) можно придать несколько иной смысл:

$$\square = \square \quad (5)$$

т.е. при небольших деформациях упругое тангенциальное напряжение прямо пропорционально относительному сдвигу.

Выражения (4) и (5) являются математической записью закона Гука при сдвиге.

1.2. Закон Гука при деформации кручения

Рассмотренный сдвиг прямоугольного параллелепипеда представляет собой однородную деформацию, т.е. относительный сдвиг γ для всех параллельных слоев одинаков (см выражение 1).

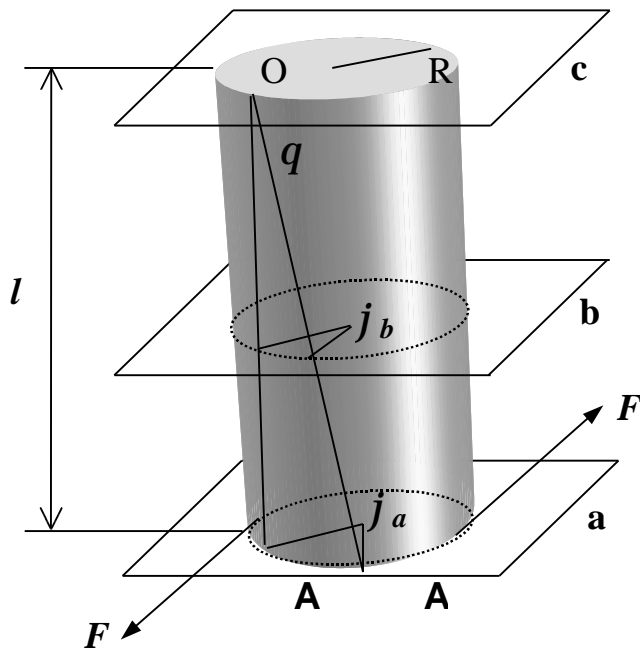


Рис.2

Кручение – деформация неоднородного сдвига. Такая деформация возникает в стержне, если закрепить один конец и закручивать другой (рис.2). При этом различные сечения стержня будут поворачиваться на различные углы относительно основания стержня. Так, сечение в плоскости **a** повернется на угол α , сечение в плоскости **b** – на угол β и т.д. При кручении объем тела не изменяется, так как ни сечение, ни длина стержня не изменяются.

Пусть нижнее сечение повернулось на угол α (рис.2). Тогда каждая из образующих цилиндрической поверхности (например, образующая OA) повернется на угол α , называемый углом сдвига или углом кручения. При малых сдвигах, как видно из рис.2,



Если мысленно выделить в стержне цилиндрическую поверхность меньшего радиуса r , то найдем, что ее элементы испытывают сдвиг в фиксированной плоскости меньший, чем элементы на поверхности самого стержня. Таким образом, при кручении элементы стержня испытывают тем большие сдвиги, чем дальше от оси они находятся. Деформация такого вида называется неоднородной.

Угол закручивания α нижнего сечения (в плоскости **a**) пропорционален моменту силы M , приложенной по касательной к поверхности стержня в плоскости его сечения **a**: $\alpha = \frac{M}{GJ}$, где G – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом упругости при деформации кручения, запишем

$$M = GJ \alpha \quad (6)$$

При закручивании внутри стержня возникают упругие силы, которые создают упругий момент уравновешивающий закручивающий внешний момент: . Исходя из уравнения (6), имеем:

$$\text{где } \text{input type="text"} \text{ (7)}$$

где - коэффициент упругого (или возвращающего) момента. Его называют также коэффициентом жесткости стержня при кручении. Выражения (6) и (7) представляют собой закон Гука для деформации кручения.

С увеличением радиуса стержня коэффициент возвращающего момента резко возрастает. Поэтому толстые и короткие стержни трудно поддаются закручиванию: уже при малых углах нужны очень большие внешние силы. Наоборот, тонкие и длинные стержни под влиянием даже очень малых сил закручиваются на большой угол. Этим обстоятельством пользуются, например, на крутильных весах.

Вывод рабочей формулы для определения модуля сдвига

Между модулем сдвига материала и его коэффициентом жесткости на кручение существует простое соотношение.

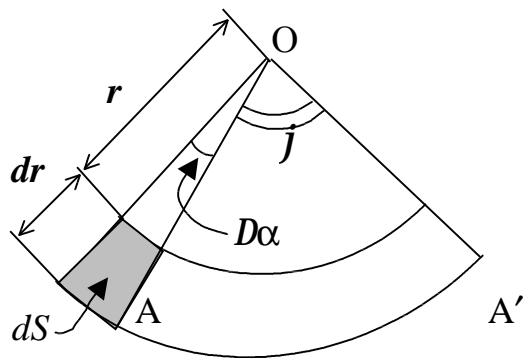


Рис.3

Выберем в нижнем сечении стержня (см. рис.2) элемент площадки , находящийся на расстоянии от центра. Величина этого элемента (рис.3) определяется следующим выражением:

$$\text{input type="text"} \text{ (8)}$$

После кручения эта граница элемента перейдет в точку , а вертикаль OA (см. рис.2) – в винтовую линию . В результате все элементы, расположенные как снаружи, так и внутри на цилиндрических поверхностях, перекашиваются из-за деформации сдвига стержня. Чтобы рассматриваемый элемент сдвинулся на угол , необходимо приложить к нему элементарную силу и с учетом формул (3, 6, 8) величина этой силы запишется:

$$\square \cdot \square \quad (9)$$

Момент этой силы относительно оси кручения определяется выражением:

$$\square \cdot \square \quad (10)$$

Для того, чтобы найти полный момент \square , действующий на все нижнее основание, надо просуммировать все моменты \square , действующие на все элементы этого основания.

$$\square$$

Отсюда находим модуль сдвига:

$$\square$$

В этом выражении все величины, стоящие справа, определяются непосредственно в эксперименте. Соотношение между модулем сдвига и коэффициентом жесткости стержня при кручении вытекает из выражения (7):

$$\square ; \quad \square$$

Описание экспериментальной установки

Приборы и принадлежности: установка для определения угла закручивания металлических стержней; осветитель с полупрозрачной миллиметровой шкалой, масштабная линейка, штангенциркуль, микрометр, набор грузов.

Для определения модуля сдвига статическим методом применяется установка, изображенная на рис.4. Концы исследуемого металлического стержня прочно закреплены в зажимах, которые расположены на двух стойках. К зажиму присоединен диск \square . Вращение диска вызывается вращением двух грузов \square и \square одинаковой массы \square , подвешенных к концам шнура, навитого на окружность диска, и создающих пару сил. С диском жестко связано зеркальце \square , поворачивающееся на угол \square при закручивании стержня. Поворот зеркальца фиксируется на шкале \square , по которой перемещается отраженное от зеркальца изображение нити осветителя \square . Обозначим начальное положение нити на шкале \square , а после поворота диска - \square , то при малых углах поворота имеет место соотношение



, где – расстояние от зеркальца до шкалы, выраженное в тех

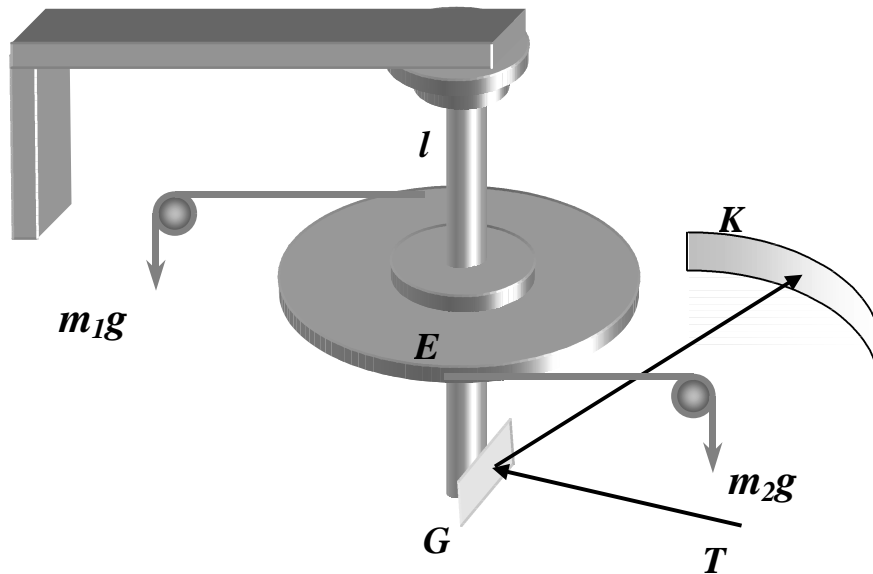


Рис. 4

же единицах длины, что и деления на шкале.

Модуль сдвига материала стержня находим по формуле:

$$\tau = \frac{M}{J} \cdot r \quad (11)$$

где – длина стержня ; – диаметр диска; – радиус поперечного сечения стержня; – угол кручения; .

Порядок выполнения работы

1. Установить стержень в зажимах прибора, измерить с точностью до 1 мм расстояние между зажимами.
2. После этого измерить диаметр стержня с точностью до 0,01 мм микрометром и диаметр диска штангенциркулем с точностью до 0,1 мм.
3. Отметить начальное положение зайчика на шкале.
4. Постепенно накладывая на диски дополнительные грузы, всегда одинаковой массы, отсчитать каждый раз положение зайчика по шкале.
5. Затем те же измерения повторяют в обратном порядке, постепенно уменьшая массу груза, и, наконец, освободив диски от дополнительных грузов, вновь фиксируют нулевую точку. Если отмечаются различные

показания на прямом и обратном ходе при одинаковых моментах сил, то следует брать их средние значения.

6. Рассчитать модуль упругости для 8-10 значений моментов сил. Оценить погрешность результатов по Стюденту и сравнить полученные результаты измерений с табличными данными

Данные наблюдений занести в таблицу:

Таблица

Материал стержня	□ опыта	□	Отсчет по шкале								
			Прямой ход □, м	Обратный ход □, м	□, м	□, м	□, м	□, м	□, м	□, м	□, м
	1	0									
	2	50									
	3	100									
	4	150									
	и т.д.										

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон Гука.
2. Получите выражение модуля сдвига из закона Гука и объясните физический смысл этой величины.
3. Что называется парой сил? Как найти момент пары сил?
4. Какая деформация называется упругой?
5. Какие различаются виды элементарных деформаций? Покажите что .
6. Укажите единицы измерения модуля сдвига. Получите соотношения между ними.

Библиографический список

1. Стрелков С.П. Механика. М., Наука. 1965. 282 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. М., Наука. 1990. 379 с.
3. Иверонова В.И. Физический практикум. Т.1. Механика и молекулярная физика. М., Наука. 1967.

Лабораторная работа 1-6

ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы: ознакомление с экспериментальными методами исследования напряженно - деформированного состояния твердого тела.

Задача работы: определение физической константы материала - модуля упругости.

Теория

Все реальные тела деформируемы. Под действием приложенных сил они меняют свою форму или объем. Для твердых тел различают два вида деформаций: упругие и пластические. Упругими называются деформации, исчезающие после прекращения воздействия приложенных сил. Пластическими, или остаточными, называются такие деформации, которые сохраняются в теле, по крайней мере, частично, и после прекращения воздействия приложенных сил. На пластических деформациях основана холодная обработка металлов – штамповка, ковка и пр. Является ли деформация упругой или пластической, зависит от величины приложенных сил. Если сила, отнесенная к единице площади, т.е. напряжение σ , не превосходит известной величины, называемой пределом упругости, то возникающая деформация будет упругой. Если же она превосходит этот предел, то возникающая деформация будет пластической. Предел упругости имеет различные значения для разных металлов.

В настоящей работе мы ограничимся изучением только упругих деформаций. Упругие деформации подчиняются закону Гука. Для элемента стержня длиной dx и площадью поперечного сечения dS , на который действует растягивающая сила dF (рис.1), закон Гука запишется в виде:

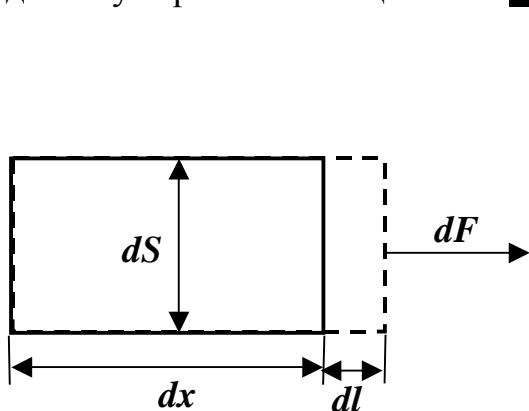


Рис.1

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (1)$$

где ϵ – относительное удлинение элемента стержня, вызванное нагрузкой,

E – коэффициент пропорциональности, характеризующий жесткость металла и называемый модулем Юнга. Выражение (1)

можно переписать: $\sigma = E \cdot \frac{dl}{dx}$, где σ , т.е. напряжение, возникшее в элементе стержня под действием

приложенной силы, пропорционально величине приложенной деформации.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Наблюдение напряженно-деформированного состояния модели поляризационно-оптическим методом

Единственным методом, позволяющим визуально наблюдать напряженно-деформированное состояние модели в целом и количественно его оценивать, является поляризационно-оптический метод. Этот метод предполагает использование поляризованного света и прозрачных материалов, обладающих свойством двулучепреломления под нагрузкой. Такими материалами могут служить оргстекло, целлулоид, образцы на основе различных смол. На рис.2 представлена схема поляризационно - оптической установки. Она состоит из источника света 1, поляризатора 2, нагрузочного приспособления 3, исследуемого образца 4 и анализатора 5. Оптическое преобразование лучей света при этом можно представить следующим образом.

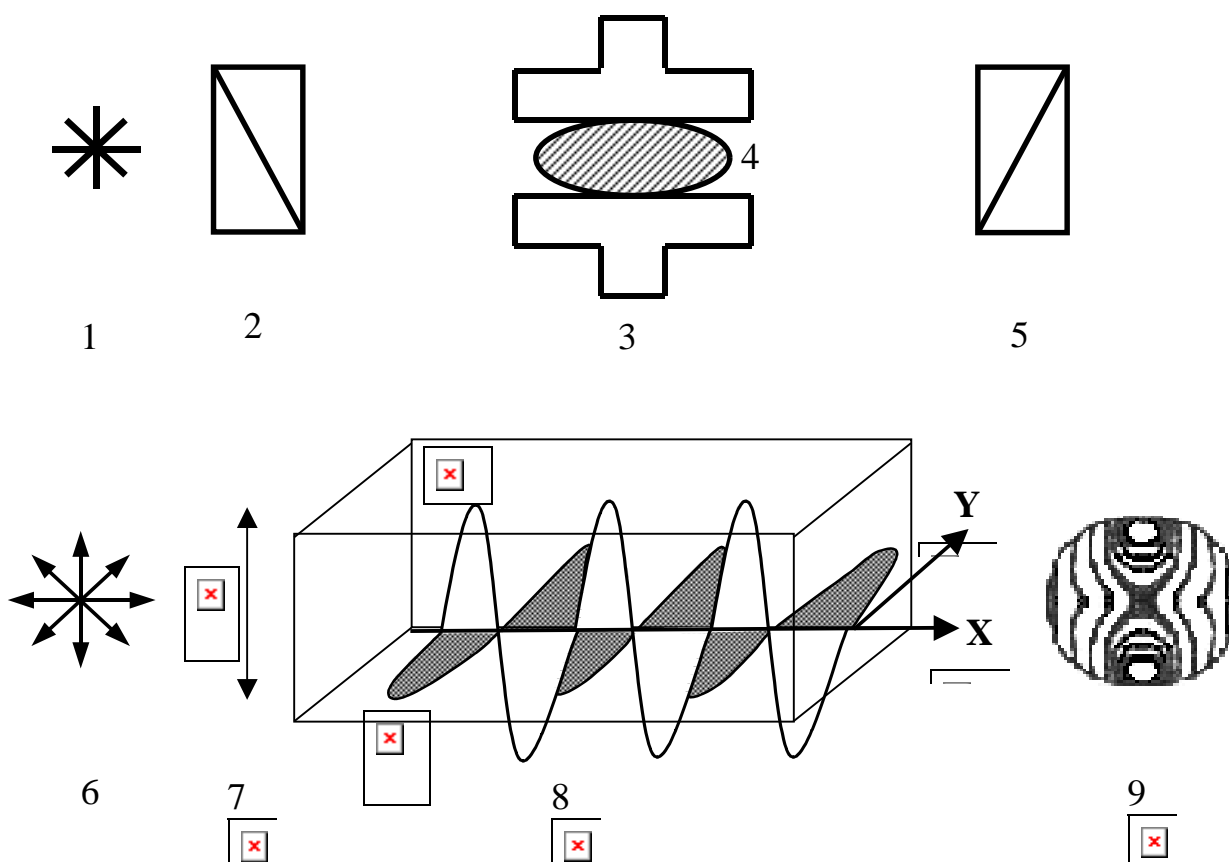


Рис.2

В естественном свете, вектор напряженности электрического поля 6 колеблется в различных плоскостях. Поляризатор пропускает колебания

вектора \vec{E} только в плоскости, совпадающей с главной плоскостью его пропускания (луч 7). Так как образец под нагрузкой обладает свойством двулучепреломления, то в деформированном образце луч 7 разлагается на два луча, электрические векторы которых \vec{E}_1 и \vec{E}_2 колеблются во взаимно перпендикулярных плоскостях 8. Оба этих луча, имеют ту же частоту колебания, что и падающий луч 7, но являются плоскополяризованными, и вследствие анизотропии образца распространяются с различными скоростями. Поэтому при выходе из образца появляется разность хода Δl , которая связана с коэффициентами преломления следующим образом: $\Delta l = d(n_1 - n_2)$, где d - толщина пластинки; n_1, n_2 - коэффициенты преломления в направлении действия главных напряжений. С другой стороны, разность хода Δl пропорциональна разности главных деформаций или напряжений: $\Delta l = C(\sigma_1 - \sigma_2)$, где C - коэффициент оптической чувствительности материала, σ_1, σ_2 - главные напряжения, действующие в плоском образце.

Так как лучи, вышедшие из образца, поляризованы во взаимно - перпендикулярных плоскостях, совпадающих с направлением действия главных напряжений, они не могут интерферировать. Для получения интерференционной картины необходимо после образца поставить второй поляризатор - анализатор 5, который пропускает колебания только в определенной плоскости. Обычно плоскость пропускания анализатора устанавливают перпендикулярно плоскости пропускания поляризатора, тогда в отсутствие образца они не пропускают свет, поле зрения будет темным. При наличии же нагруженного образца между анализатором и поляризатором наблюдается интерференционная картина 9 в виде чередующихся цветных линий. Эти линии характеризуются тем, что вдоль каждой из них разность хода двух лучей Δl постоянна и равна $\Delta l = m \cdot \lambda$, где λ - длина волны падающего света. Такие линии называются изохромами. Если разность хода равна нулю, имеем изотропную точку или область черного цвета. Для $\Delta l = \lambda/2$ - изохрома желтого цвета, $\Delta l = \lambda$ - красная изохрома, $\Delta l = 3\lambda/2$ - изохрома синего цвета, $\Delta l = 2\lambda$ - изохрома зеленого цвета. По характеру окраски можно судить о знаке и величине напряжений в образце.

Задание 1

Зажать в пресс образец из эпоксидной смолы.

1. Включить источник света.
2. Вращая плоскость анализатора, получить темное пятно вокруг исследуемого образца и наблюдать интерференционную картину в образце.

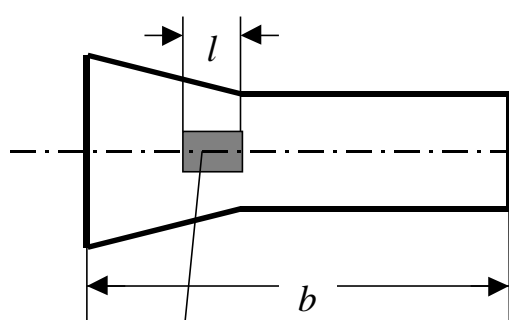
Рекомендуется наблюдать напряженно - деформированное состояние модели на нескольких образцах.

3. В некоторых образцах напряженно - деформированное состояние модели «заморожено» и участия прессы в эксперименте не требуется. Такие образцы просто устанавливаются на предметный столик прессы без дальнейшей нагрузки.

4. Зарисовать интерференционную картину хотя бы для одного образца.

Исследование относительной деформации методом тензометрии

Метод тензометрии в практике научных исследований используется при испытании на прочность целой машины, ее отдельных узлов или моделей. Такие испытания широко применяются в различных отраслях техники,



датчик

Рис.3

например, в химической промышленности при испытании колонн высокого давления, в самолетостроении. При этом отдельные узлы, выполненные в металле, подвергаются испытаниям с целью определения разрушающей нагрузки.

Определение величины относительной деформации методом тензометрии основано на

изменении сопротивлений тензорезисторов, (датчиков) прикрепляемых к деформируемым участкам поверхности металлических образцов (рис.3). Датчик представляет собой проволочное сопротивление, вклеенное между двумя тонкими бумажными основами. При деформации растяжения происходит изменение сопротивления датчика вследствие его удлинения, обусловленное деформацией поверхности металла. Изменение сопротивления датчика при этом может быть фиксировано, например, по изменению протекающего через него тока. Если обозначить длину датчика l , а его удлинение, вызванное деформацией датчика Δl , то отношение $\frac{\Delta l}{l}$ есть величина относительной деформации.

Метод определения модуля упругости металл по стреле прогиба

Если один конец прямоугольного стержня неподвижно прикрепить к стенке, а другой нагрузить грузом G , то стержень изогнется. Легко понять, что в этом случае верхние слои будут растянуты, нижние – сжаты, а некоторый средний слой, который называют «нейтральным», сохранит свою первоначальную длину. Перемещение свободного конца стержня при изгибе называется стрелой прогиба. Стрела прогиба будет тем больше, чем больше нагрузка; кроме того, она должна зависеть от формы и размеров стержня и от упругих свойств материала.

Рассмотрим прямоугольный стержень длиной l , шириной b и толщиной a . Выделим некоторый элемент dx . Пусть этот элемент стержня ограничен сечениями I и II до изгиба II и III после изгиба (рис.4). Обозначим удлинение, которое претерпевает верхний слой стержня при изгибе, через $d\Delta$.

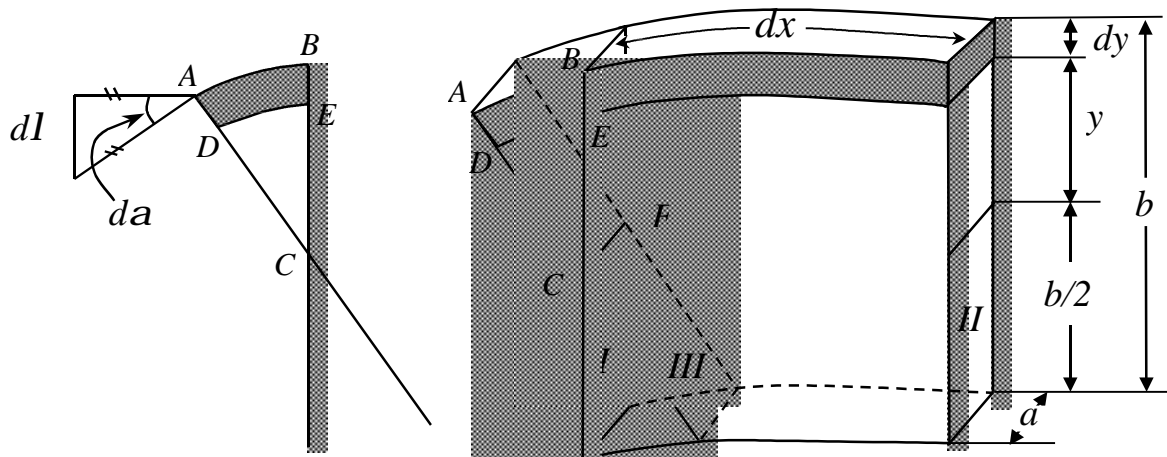


Рис. 4

Найдем удлинение $d\Delta$ некоторого горизонтально расположенного слоя стержня толщиной dy , находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя, обозначим его $d\Delta$ (например $DE = d\Delta$). Из подобия треугольников ABC и DEC следует, что $d\Delta = \frac{y}{a} dl$, откуда $d\Delta = \frac{y}{a} dl$. С другой стороны, для того, чтобы вызвать удлинение $d\Delta$, нужна некоторая сила F , которая из выражения (1) равна:

$$F = \frac{E d\Delta}{a}$$

где E – модуль упругости материала стержня; F – площадь растягиваемого слоя.

Подставляя в это выражение уже найденное значение $d\Delta$, и, учитывая, что $F = dy$, получим:

$$F = \frac{E y}{a} dl$$

При растяжении стержня вращающий момент этой упругой силы относительно линии BC равняется: $M = F y$. Чтобы вычислить вращающий момент сил растяжения, действующий во всем поперечном сечении стержня, надо просуммировать моменты всех сил, действующих на материальные точки обсуждаемого сечения:

$$M = \int_{-a/2}^{a/2} F y dy = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{E y^2}{a} dl$$

При равновесии вращающий момент внешней силы равен моменту упругой силы . Следовательно,

$$\boxed{\times} \quad \text{, и} \quad \boxed{\times} \quad (2),$$

где – вес груза, подвешиваемого к свободному концу стержня, – расстояние от точки приложения силы до данного сечения.

Мерой изгиба рассматриваемого элемента стержня является угол , который характеризует угол поворота сечения I под нагрузкой (рис.4)

Из треугольника ABC следует , Проведем перпендикуляры к

сечениям I и III , продолжив их до свободного конца стержня и приняв их длину равной X . Произведем параллельный перенос перпендикуляра к сечению I из точки B в точку A . Ясно, что эти два отрезка, обозначенные на чертеже двойным штрихом, образуют между собой угол, равный . Расстояние между концами обоих отрезков и есть стрела прогиба для рассматриваемого элемента стержня . Из рис.4 видно, что $dI = x \cdot da$. Подставляя сюда уже найденное значение и h найдем:

$$\boxed{\times} \quad ,$$

откуда стрела прогиба определится:

$$\boxed{\times} \quad (3)$$

Это стрела прогиба стержня, неподвижно закрепленного с одной стороны, и несущего груз P на свободном конце. Если стержень будет обоими концами свободно положен на твердые опоры и нагружен посередине (рис.5) стрела прогиба также найдется из уравнения (3), но только вместо величины надо будет поставить и интегрировать не от нуля до , а от нуля до . Следовательно, стрела прогиба будет равна:

$$\boxed{\times} \quad ,$$

откуда модуль упругости материала определится:

$$\boxed{\times} \quad (4)$$

Задание 2. Определить модуль упругости материала по результатам измерения стрелы прогиба

Прибор состоит из вертикальных стоек М и N (рис.5) укрепленных неподвижно на платформе. На верхние концы стоек установлены призмы, на которые накладывается исследуемый стержень АВ.

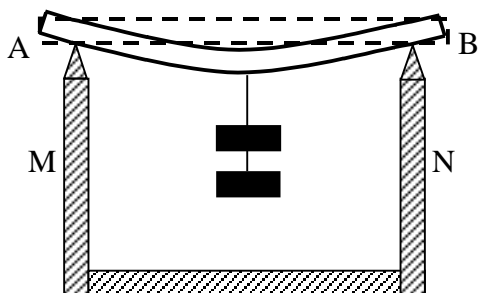


Рис 5

Посередине стержня имеется крючок, на которые подвешиваются грузики, вызывающие изгиб стержня. Стрела прогиба для каждой нагрузки определяется в результате измерений с помощью оптического микроскопа по формуле: $\frac{L}{4ab^3} (n - n_0)$, где n_0 – число делений шкалы микроскопа, соответствующее положению стержня без нагрузки, n – число делений шкалы

микроскопа, соответствующее нагруженному состоянию стержня. Отсчет по микроскопу следует брать по верхнему краю стержня. Тогда формула (4) примет вид:

$$E = \frac{mgl^3}{4ab^3(n - n_0)}.$$

Значения стрелы прогиба l рекомендуется перевести в метры. Цена деления микроскопа $0,06 \text{ мм} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

Порядок выполнения работы

В работе используется железный или медный стержень.

1. Измерить длину стержня с точностью до 1мм (между метками на нем).
2. При помощи штангенциркуля в нескольких местах измерить толщину и ширину стержня и вычислить их среднее значение.
3. Поместить стержень на подставку, совмещая метки на нем с гранями призм.
4. Наводя микроскоп на стержень, добиться отчетливого изображения его верхнего края. Взять отсчет n_0 по верхнему краю стержня. При выполнении измерений стрелы прогиба стержня следует быть аккуратными, так как изменение положения тубуса микроскопа приводит к смещению точки нулевого отсчета.
5. На крюк поместить груз массой m , равной 0,05кг, взять отсчет по микроскопу, вычислить стрелу прогиба.

6. Увеличивая каждую последующую нагрузку на 0,05 кг, произвести аналогичные измерения стрелы прогиба, доведя максимальную массу грузов до 0,3 кг. Результаты измерений занести в таблицу:

Таблица

Материал стержня	
Длина стержня l , м	
Толщина стержня b , м	
Ширина стержня a , м	
Начальный отсчет по шкале микроскопа n_0 , делений	
Масса груза m , кг	
Отсчет по шкале микроскопа при нагрузке n , деления	
Стрела прогиба I , деления	
Стрела прогиба I , м	
Модуль упругости E , Н/м ²	

Оценить погрешность измерений по Стъденту. Результат сравнить с результатами физических постоянных имеющихся в справочных таблицах.

Контрольные вопросы

1. Что называется деформацией? Какие виды деформаций вы знаете?
2. Что понимается под остаточной деформацией? Каковы условия ее возникновения?
3. Какие деформации называются упругими и неупругими?
4. Что понимается под термином «напряжение» в механике упругих сред?
5. Каково математическое выражение закона Гука?
6. Что называется модулем упругости?
7. В каких единицах измеряются модуль упругости и напряжение?
8. Что называется стрелой прогиба? От чего она зависит?
9. В чем суть тензометрического метода оценки величины относительной деформации материала?

Библиографический список

1. Сивухин Д.В. Курс общей физики. М., Наука. 1990. 379 с.
2. Стрелков С.П. Механика. М., Наука. 1975. 282 с.
3. Иверонова В.И. Физический практикум, ч.1, Механика и молекулярная физика. М., 1967, 260 с.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Лабораторная работа 1-7

УПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

Цель работы: Исследовать упругий центральный удар шаров.

Задача работы: Измерять коэффициент восстановления при соударении шаров. Экспериментально проверить закон сохранения импульса.

Теория

Общие сведения о столкновении. В природе часто наблюдаются явления взаимодействия материальных тел. Например, соприкосновение бильярдных шаров, взаимодействие макроскопических тел – комета и Солнце, микроскопических – протон и ядро и т. д. О таком взаимодействии говорят как об их столкновении, хотя непосредственно соприкосновения может и не произойти. Понятие столкновения можно определить следующим образом:

Столкновением называется взаимодействие двух или большего числа материальных тел или частиц, которое происходит в относительно малой области пространства в течение относительно малого промежутка времени. Вне этой области пространства и вне этого промежутка времени можно говорить о начальных состояниях тел или частиц и об их конечных состояниях после взаимодействия как состояниях, в которых они не взаимодействуют.

В механике тела и частицы, участвующие в столкновении, характеризуются импульсами, моментами импульсов и энергиями, а сам процесс сводится к изменению этих величин. В процессе взаимодействия частицы обмениваются энергией и импульсом. В результате взаимодействия в общем случае могут образоваться новые частицы и исчезнуть некоторые из частиц, существовавших до столкновения. В этом случае происходит замена носителей энергии и импульса.

Процессы столкновения являются чрезвычайно сложными. Например, в простейшем случае столкновения двух бильярдных шаров происходит их деформация. В результате часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем энергия упругой деформации опять превращается в кинетическую, но не полностью – часть энергии превращается во внутреннюю, шары при этом нагреваются. Вследствие того, что поверхности шаров не являются абсолютно гладкими, между ними возникают силы трения. Эти силы, с одной стороны, также приводят к превращению части энергии во внутреннюю энергию, а с другой – вызывают

определенное изменение во вращении шаров. Таким образом, даже в простейшем случае картина столкновения оказывается чрезвычайно сложной.

Однако главный интерес при рассмотрении столкновения заключается в знании не самого процесса, а результата. Ситуация до столкновения называется начальным состоянием, а после – конечным. Между величинами, характеризующими начальное и конечное состояния, соблюдаются вполне определенные соотношения, независимые от детального характера взаимодействия. Наличие этих соотношений обусловлено тем, что совокупность частиц, участвующих в столкновении, составляет изолированную систему, для которой справедливы законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Следовательно, соотношения между величинами, характеризующими начальное и конечное состояние частиц, выражаются законами сохранения энергии, импульса и момента импульса при столкновении.

Законы сохранения сами по себе не дают возможности определить, что произойдет при столкновении. Но если известно, что произойдет, то эти законы значительно облегчают анализ того, как это произойдет.

Обозначим импульсы различных частиц до столкновения $\vec{P}_i (i = 1, 2, \dots, n)$, а после – через $\vec{P}'_j (j = 1, 2, \dots, k)$. Закон сохранения импульса замкнутой системы запишем в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \sum_{j=1}^k \vec{P}'_j. \quad (1)$$

Применение закона сохранения энергии при столкновении более сложно, чем применение закона сохранения импульса, так как надо учесть внутреннюю энергию материальных тел или частиц, участвующих в столкновении. Потенциальную энергию взаимодействия между сталкивающимися частицами учитывать не надо, потому что и в начальном, и в конечном состоянии они считаются не взаимодействующими. Обозначим кинетическую энергию поступательного движения тела как W , внутреннюю энергию тела как $E_{вн}$, тогда закон сохранения энергии при столкновении в нерелятивистском случае можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^n (W_i + E_{вн i}) = \sum_{j=1}^k (W'_j + E'_{вн j}). \quad (2)$$

При применении закона сохранения момента импульса надо учитывать, что тела и частицы могут обладать внутренним моментом импульса. У тел он обусловлен вращением, у микрочастиц – внутренним моментом импульса называется спином. Если через \vec{L}_i обозначить векторы момента импульса частиц участвующих в столкновении, а внутренними моментами в механике макротел пренебречь, то закон сохранения момента импульса при столкновении можно представить следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{j=1}^k \mathbf{L}'_j. \quad (3)$$

Процессы столкновения делятся на упругие и неупругие в зависимости от изменений внутренней энергии частиц при их взаимодействии. *Столкновение называется упругим*, если внутренняя энергия частиц при этом не изменяется. Если говорят об абсолютно упругом столкновении, то в таком случае предполагается, что внутренняя энергия сталкивающихся частиц абсолютно точно неизменна (например, столкновение двух костяных или стальных твердо закаленных шаров). Если внутренняя энергия шаров при столкновении изменяется, то *столкновение называется неупругим*. Так же говорят об абсолютно неупругом столкновении, если в результате столкновения оба тела «слипаются» и дальше движутся как одно тело (например, соударение двух шаров из мягкого материала). *Столкновение называется лобовым или центральным ударом*, если скорости соударяющихся шаров до удара совпадают по направлению с линией, соединяющей центры шаров.

В действительности всегда имеют место потери механической энергии – переход части ее в тепло. Неупругий удар можно характеризовать той долей энергии деформации, которая обращается в тепло за время удара. Еще Ньютоном было найдено, что при неупругом соударении шаров из определенного материала величины относительных скоростей до и после удара находятся в постоянном отношении. Отношение относительной скорости тел после удара $\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2$ к относительной скорости до удара $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ называется коэффициентом восстановления:

$$k = \frac{\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2}{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2}. \quad (4)$$

Опыт показывает, что величина коэффициента восстановления зависит только от материала соударяющихся тел. Коэффициент восстановления всегда меньше единицы, только при абсолютно упругом ударе он равен 1, и при абсолютно неупругом ударе равен нулю, так как в этом случае $\mathbf{u}'_2 - \mathbf{u}'_1 = 0$. Зная коэффициент k , можно подсчитать скорости движения шаров после удара и потери энергии.

Величину коэффициента восстановления удобно определять при центральном ударе шаров.

Пусть два шарика одинаковой массы висят на нитях равной длины, касаясь друг друга. Если оба шара отклонить на равные углы и одновременно освободить их, то они, сталкиваясь друг с другом, в любой момент времени будут иметь скорости, равные по величине, на разные по знаку. Коэффициент восстановления в этом случае равен

$$k = \frac{\mathbf{u}' - (-\mathbf{u}')}{\mathbf{u} - (-\mathbf{u})} = \frac{\mathbf{u}'}{\mathbf{u}},$$

здесь и в последующем u' – скорость любого шара после удара, u - скорость до удара.

Для n последовательных соударений может быть написано n уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= ku_1 \\ u'_2 &= ku_2 \\ \mathbf{L} \\ u'_n &= ku_n \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Пренебрегая при движении силами трения, имеем:

$$u'_1 = u_2, u'_2 = u_3, \dots, u'_n = u_{n+1}.$$

Заменяя значения скоростей u скоростями u' из уравнений (5) получим:

$$u'_1 = ku_1, u'_2 = ku'_1 = k(ku_1) = k^2u_1, \\ u'_3 = ku'_2 = k(k^2u_1) = k^3u_1, \dots, u'_n = ku'_{n-1} = k(k^{n-1}u_1) = k^nu_1.$$

Из последнего равенства получим выражение для коэффициента восстановления в виде:

$$k = \sqrt[n]{\frac{u'_n}{u_1}}. \quad (6)$$

Отношение скоростей в формуле (6) может быть заменено отношением расстояний, проходимых шарами и отсчитываемым по имеющимся шкалам.

Пусть при движении центр шара опустился вертикально на высоту h , тогда скорость его центра будет

$$u = \sqrt{2gh}, \quad (7)$$

где g – ускорение силы тяжести.

Обозначим через l длину нити подвеса шара, a – угол отклонения шара, S – расстояние, проходимое шаром (рис. 1). Тогда из рисунка следует

$$h = l(1 - \cos a) = 2l \sin^2 \frac{a}{2}.$$

При $l \gg S$ $h = l \sin^2 \frac{a}{2} = 2l \frac{a^2}{4}$. Учитывая, что

$a = \frac{S}{l}$, получим:

$$h = \frac{S^2}{2l}. \quad (8)$$

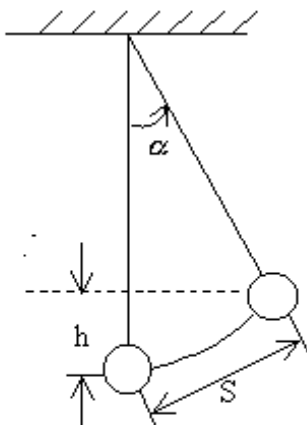


Рис.1

Уравнения (6), (7), (8) дают для коэффициента восстановления следующее значение:

$$k = \left(\frac{S_n}{S_1} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (9)$$

где S_1 - расстояние, проходимое шаром до первого соударения, S_n - расстояние, проходимое шаром после соударения n - го удара. Формула (9) получена в предположении, что сил трения нет.

Применим законы сохранения (1) и (2) для абсолютно упругого центрального удара двух шаров, массы которых m_1 и m_2 , векторы скорости соответственно $\dot{\mathbf{u}}_1$ и $\dot{\mathbf{u}}_1'$, $\dot{\mathbf{u}}_2$ и $\dot{\mathbf{u}}_2'$:

$$m_1 \dot{\mathbf{u}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{u}}_2 = m_1 \dot{\mathbf{u}}_1' + m_2 \dot{\mathbf{u}}_2', \quad (10)$$

$$\frac{m_1 \mathbf{u}_1^2}{2} + \frac{m_2 \mathbf{u}_2^2}{2} = \frac{m_1 \mathbf{u}_1'^2}{2} + \frac{m_2 \mathbf{u}_2'^2}{2}. \quad (11)$$

Эти уравнения определяют векторы скорости шаров $\dot{\mathbf{u}}_1'$ и $\dot{\mathbf{u}}_2'$ после соударения. Для нахождения последних напишем уравнения (10) и (11) соответственно в виде:

$$m_1 (\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_1') = -m_2 (\dot{\mathbf{u}}_2 - \dot{\mathbf{u}}_2'), \quad (12)$$

$$m_1 (\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_1') (\dot{\mathbf{u}}_1 + \dot{\mathbf{u}}_1') = -m_2 (\dot{\mathbf{u}}_2 - \dot{\mathbf{u}}_2') (\dot{\mathbf{u}}_2 + \dot{\mathbf{u}}_2'). \quad (13)$$

Разделив уравнение (12) на уравнение (13), получим:

$$\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2' = -(\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2'). \quad (14)$$

Знак минус означает, что относительная скорость после удара изменяет свое направление. Если удар неупругий ($0 < k < 1$), то вместо уравнения (14) необходимо воспользоваться уравнением (4), записав его для векторов скорости, аналогично уравнению (12):

$$k(\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2') = -(\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2'). \quad (15)$$

Теперь можно найти искомые скорости шаров после не абсолютно упругого удара. Для этого разрешим уравнение (15) относительно $\dot{\mathbf{u}}_2'$ и подставим его значение в уравнение (10). Получим выражение для скорости $\dot{\mathbf{u}}_1'$. Таким же способом, подставим значение $\dot{\mathbf{u}}_1'$ из уравнения (15) в уравнение (10), найдем скорость второго шара после удара:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_1' &= \frac{(m_1 - m_2 k) \dot{\mathbf{u}}_1 + m_2 (1 + k) \dot{\mathbf{u}}_2}{m_1 + m_2}, \\ \dot{\mathbf{u}}_2' &= \frac{(m_2 - m_1 k) \dot{\mathbf{u}}_2 + m_1 (1 + k) \dot{\mathbf{u}}_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая знаки скоростей $+u_1$, $+u_2'$, $-u_2$, $-u_1'$, а также равенство масс $m_1 = m_2$, получим из (16):

$$\left. \begin{aligned} -u'_1 &= 0,5[(1-k)u_1 - (1+k)u_2] \\ u'_2 &= 0,5[(1+k)u_1 - (1-k)u_2] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Далее, выразив скорости шаров через расстояния, проходимые ими, как это было выполнено при выводе формулы (9), окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} -2S'_1 &= S_1(1-k) - S_2(1+k) \\ 2S'_2 &= S_1(1+k) - S_2(1-k) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Здесь S_1, S_2, S'_1, S'_2 , – отклонения первого и второго шаров до и после соударения. Уравнения (18) используются для экспериментальной проверки закона сохранения импульса.

Приборы и принадлежности:

установка (рис. 2), набор шаров, пластины для столкновения шаров.

Описание экспериментальной установки

Конструктивно установка (рис. 2) представляет собой треногу на трех

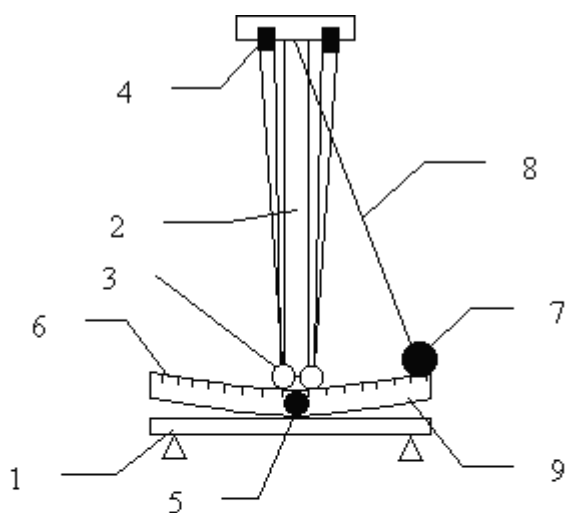


Рис. 2

- 1 – тренога; 2 –
труба; 3 – шар; 4 –
бифилярный подвес;
5 – ручка; 6 – шкала;
7 – электромагнит; 8,
9 – штанга

подъемных винтах, трубу 2, которая несет подвески шаров 3. Бифилярный подвес 4, несущий шар, имеет возможность перемещаться, изменяя тем самым межцентровое расстояние. Перемещение направляющей с подвесами осуществляется при помощи ручки 5. Трос, закрепленный на концах направляющей, перекинут через ролики и, проходя внутри трубы, наматывается на валик. С валиком связана ручка, которая выведена на лицевую сторону треноги. При изменении межцентрового расстояния левую шкалу 6 необходимо сместить. Электромагнит 7, удерживающий шар, подвешен на штанге 8 и может перемещаться вдоль штанги 9. Для изготовления шаров из пластилина им к установке придается пресс

форма с ручным прессом. Для удержания шара в отклоненном положении электромагнитом к немагнитическим шарам приклеивается металлическая накладка. Электромагнит питается от источника постоянного напряжения в 6 В.

Порядок выполнения работы

1. Чтобы выполнить, задачу необходимо убедиться в правильности подвеса шаров и хорошей центровке их для получения центрального удара. Измерения требуют внимания и аккуратности!

2. Для измерения коэффициента восстановления задают одинаковые отклонения шаров . Поскольку отклоняют оба шара, то их удерживают в отклоненном состоянии с помощью пластин. Одновременно отпускают шары и отсчитывают количество соударений n одного из шаров от третьего до второго деления шкалы. Опыт повторяют 7 раз. Величину коэффициента восстановления шаров определяют по формуле (9). Статистическую обработку результатов измерений выполняют с применением коэффициента Стьюдента. Результаты заносятся в таблицу 1.

3. Для проверки закона сохранения импульса задают левому шару отклонение = 2°; 2,5°; 3,0°; 3,5°; 4,0°, правому = 3°; 3,5°; 4,0°; 4,5°; 5,0°. Шары освобождают и после первого удара отсчитывают отклонение левого шара и правого. Опыт повторяют 5 раз. Находят среднее арифметическое значение величин отклонений для каждого опыта и проверяют справедливость уравнений (18). Результаты заносятся в таблицу 2.

Таблица 1

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Таблица 2

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют столкновением материальных тел?
2. Какие физические явления происходят при столкновении двух шаров?
3. Как записываются законы сохранения импульса и энергии при столкновении?
4. Какие столкновения называются абсолютно упругими, неупругими?
5. При каких условиях соударение называется центральным ударом?

6. Что называется коэффициентом восстановления тел при ударе? Его физический смысл?
7. Почему в установке применяют бифилярный подвес шаров?
8. Получите формулу для экспериментального определения коэффициента восстановления.
9. Выведите уравнения для проверки закона сохранения импульса.

Библиографический список

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М., 1986. Гл. 10.
2. Иверонова В.И. Физический практикум. М., 1967. Задача 18.
3. Техническое описание прибора.

Техника безопасности

При запуске, обслуживании и уходе за прибором необходимо соблюдать правила безопасного труда, относящиеся к эксплуатации устройств, использующих напряжение до 250 В.

Эксплуатация прибора допустима только в случае заземления!

Лабораторная работа 1-8

НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

Цель работы: изучение теории неупругого столкновения

Задача работы: определение скорости полета снаряда при помощи крутильного баллистического маятника.

Теория

Существует два предельных случая соударения: абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары. При абсолютно упругом ударе между телами действуют только абсолютно упругие силы. Их действие не приводит к превращению механической энергии в тепловую. То есть, при абсолютно упругом ударе тел, составляющих замкнутую систему*, выполняются оба закона сохранения: закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии. После абсолютно упругого соударения скорости тел различны, и тела могут двигаться в разных направлениях.

При абсолютно неупругом ударе потенциальная энергия тел полностью или частично превращается в их внутреннюю энергию. При таком ударе совсем не происходит упругой деформации тел (как впрочем при любом неупругом ударе) и закон сохранения механической энергии не выполняется, но выполняется для соударяющихся тел закон сохранения импульса. При

этом после взаимодействия тела движутся в одном направлении и с одинаковой по величине скоростью.

В данной работе неупругий удар изучается с помощью баллистического маятника. Баллистический маятник схематически представляет собой установку, изображенную на рис.1. В маятник в горизонтальном направлении стреляют снарядом, имеющим массу m и скорость v . Снаряд прилипает к маятнику и сообщает общей массе системы некоторую скорость. Если время соударения снаряда с маятником мало по сравнению с периодом

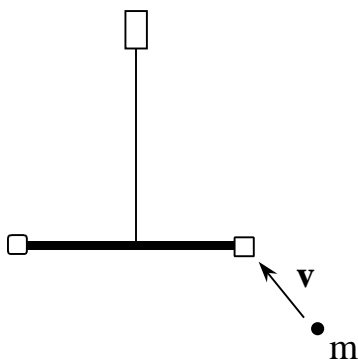


Рис.1

колебания маятника, маятник не успевает заметно отклониться от исходного положения за время соударения. Это значит, что во время удара не возникают силы, стремящиеся вернуть маятник в исходное положение. В этом случае систему «снаряд - маятник» можно рассматривать как

* Система называется замкнутой, если на нее не действуют внешние силы.

замкнутую и применить к ней законы сохранения. После попадания снаряда в маятник, он начинает совершать колебания вокруг вертикальной оси. Считая удар полностью неупругим и пренебрегая силами трения, на основании закона сохранения момента импульса (момент импульса системы до удара равен моменту импульса после удара) можно написать:

$$\boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} \quad (1)$$

где $\boxed{}$ – масса снаряда, $\boxed{}$ – его скорость, R – расстояние от оси вращения до центра масс грузов, $\boxed{\times}$ – масса одного груза, $\boxed{}$ – момент инерции маятника без грузов, $\boxed{}$ – расстояние от оси вращения до точки удара пули, $\boxed{}$ – его угловая скорость после соударения со снарядом. Из выражения (1) следует, что

$$\boxed{\times} \cdot \boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} \quad (2)$$

Величины $\boxed{\times}$ могут быть непосредственно измерены. Поэтому для определения скорости снаряда $\boxed{}$ нужно найти начальную угловую скорость маятника $\boxed{}$ и его момент инерции $\boxed{}$.

Определение угловой скорости маятника

Кинетическая энергия вращательного движения маятника $\boxed{\times}$,

где $\boxed{}$ – момент инерции маятника с грузами, переходит в потенциальную энергию, равную работе по закручиванию нити. Найдем её величину. Используя закона Гука, упругий момент нити M пропорционален углу поворота α маятника:

$$\boxed{} = \boxed{} \cdot \alpha \quad (3)$$

где $\boxed{}$ – постоянная момента упругих сил.

Элементарная работа против сил упругости по закручиванию нити на угол $\boxed{}$ равна $\boxed{}$. После интегрирования обеих частей равенства имеем:

$$\boxed{\times} \cdot \boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} \quad (4)$$

Закон сохранения механической энергии в этом случае запишется в виде:

$$\boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} \quad (5)$$

где $\boxed{\times}$. Из выражения (5) получим:

$$\boxed{} \quad , \quad (6)$$

где $\boxed{}$ - наибольший угол поворота маятника.

Используя основной закон динамики вращательного движения твердого тела:

$$\boxed{} \quad . \quad (7)$$

с учетом выражения (3) можно записать уравнение колебаний баллистического маятника в виде:

$$\boxed{} \quad . \quad (8)$$

или

$$\boxed{} \quad . \quad (9)$$

Частным решением этого уравнения является: \blacksquare , где

величина $\boxed{}$ - есть круговая частота $\boxed{}$, которая по определению равна $\boxed{}$.

Таким образом, маятник будет совершать гармонические колебания с периодом:

$$\boxed{} \quad . \quad (10)$$

Заменяя в формуле (10) величину $\boxed{}$ ее значением из выражения (6),

получим $\boxed{}$, откуда искомая начальная угловая скорость маятника равна:

$$\boxed{} \quad . \quad (11)$$

Определение момента инерции маятника

Для определения момента инерции маятника $\boxed{}$ воспользуемся формулой (10), переписанной в виде:

$$\boxed{} \quad . \quad (12)$$

Применим формулу (11) для двух положений грузов на расстоянии l_1 и l_2 от оси вращения

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 I}{m_1 g l_1} \quad (13)$$

где T_1 и T_2 - периоды колебаний маятника, соответствующие положениям грузов l_1 и l_2 .

Из системы уравнений (13) получим:

$$I = \frac{m_1 g l_1 T_1^2}{4\pi^2} \quad (14)$$

Подставляя выражение (11) и (14) в (2), получим окончательную формулу для определения скорости полета снаряда:

$$v = \frac{m_1 g l_1 T_1^2}{4\pi^2 m_2} \quad (15)$$

Описание экспериментальной установки

Общий вид баллистического крутильного маятника FPM-09 показан на рис. 2. Основание I оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют

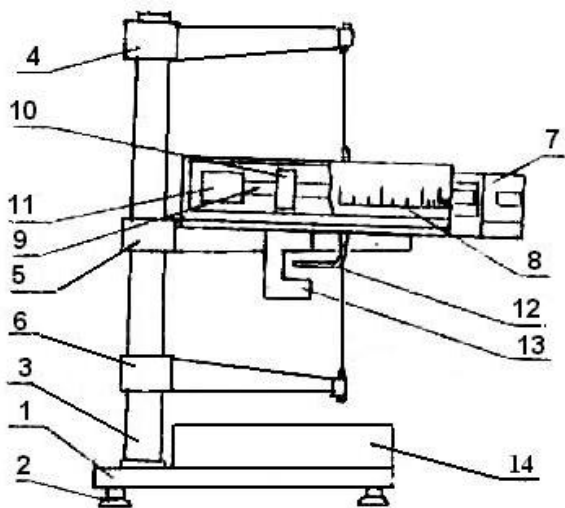


Рис.2

выставлять горизонтальное положение прибора. На основании закреплена колонна 3, к которой крепятся верхний 4, средний 5 и нижний 6 кронштейны. К среднему кронштейну прикреплен пружинный пистолет 7, обеспечивающий полет пули, а также прозрачный экран с нанесенной на него шкалой 8 для отсчета угла поворота маятника при попадании в него груза. Кронштейны 4 и 6 имеют зажимы, служащие для крепления стальной проволоки, на которой подвешен маятник. Маятник состоит из двух стержней 9, перемещаемых грузов 10, двух кювет, наполненных пластилином 11, указателем 12, перекрывающим световой поток идущий к фотоэлектрическому датчику 13. Фотоэлектрический датчик соединен с секундомером, шкала которого выведена на переднюю панель прибора.

На лицевой панели 14 размещены следующие клавишные переключатели: «СЕТЬ» - включатель сети, «СБРОС» - сброс измерителя, «СТОП» - окончание измерения. На задней панели установки находятся: выходное гнездо, служащее для подключения фотоэлектрического датчика и заземляющий зажим.

Порядок выполнения работы

Для приготовления прибора к работе необходимо:

1. заземлить прибор;
2. произвести выравнивание прибора;
3. включить сетевой шнур в сеть, нажать переключатель "сеть", проверяя, все ли разряды измерителя высвечивают цифру 0, а также светится ли лампочка фотоэлектрического датчика. Прибор готов к работе сразу после включения сетевого напряжения и не нуждается в нагреве.

Определение скорости полёта снаряда проводится по следующей схеме:

1. максимально удалить грузы друг от друга (R_1 максимально) масса одного груза $M_0 = 192$ г.;
2. обнулить маятник, т.е. установить маятник в таком положении, чтобы черта на шкале показывала угол отклонения ;
3. вставить снаряд в пружинный «пистолет», выстрелить и измерить максимальный угол отклонения ;
4. включить и обнулить счетчик времени;
5. отклонить маятник на угол , включить измеритель времени и пустить маятник;
6. измерить время десяти полных колебаний и вычислить период колебаний . Нажатие клавиши "СТОП" произвести после девятого колебания;
7. минимально приблизить грузы друг к другу (минимально) и повторить действия указанные в пунктах 2, 4, 5 (без выстрела снаряда);
8. измерить время десяти полных колебаний и вычислить период ;
9. скорость полета снаряда вычислить по формуле (15).
10. Для положения грузов провести не менее 5 выстрелов пули и соответственно не менее 5 отчетов отклонения маятника. Выполнить статистическую обработку результатов измерения с использованием метода Стьюдента.

Контрольные вопросы

1. В каком случае к системе снаряд-маятник можно применить законы сохранения?
2. Дайте определение момента силы, момента инерции твердого тела?

3. Запишите законы сохранения момента импульса и механической энергии для баллистического маятника до и после попадания в него снаряда.
4. Получите дифференциальное уравнение колебания баллистического маятника.
5. Как в данной задаче можно определить момент инерции маятника?
6. Сформулируйте теорему Гюйгенса - Штейнера и укажите, где она применяется в данной задаче.

Библиографический список

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М., 1986. 223 с.
2. Иверонова В.И. Физический практикум. М., 1967. Задача 18.

Правила безопасности труда

При запуске, обслуживании и уходе за прибором необходимо соблюдать правила безопасного труда, относящиеся к эксплуатации устройств, использующих напряжение до 250 В.

Эксплуатация прибора допустима только в случае заземления!

Лабораторная работа 1-9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ.

Цель работ: изучение явления резонанса продольных волн в твердых телах.

Задача работы: определение скорости звука и модуля Юнга путем измерения резонансных частот продольных звуковых колебаний в металлических стержнях.

Теория

Продольные волны. Скорость распространения волны.

В данной лабораторной работе мы рассмотрим продольные волны, т.е. волны, в которых направление колебания частиц или осцилляторов совпадает с направлением распространения волны. Продольные волны распространяются в виде звуковых волн в веществе, находящемся в любом состоянии: в твердых телах, жидкостях, газах, плазме. Мы уделим основное внимание твердым телам.

При распространении звука в изотропных твердых телах наблюдаются как продольные, так и поперечные волны, причем скорость их распространения различна и зависит от упругих свойств тел, через которые проходит волна.

Теория дает следующие выражения для скорости звука в стержне, длина которого велика по сравнению с линейными размерами его сечения:

$$\boxed{} \quad (1)$$

$$\boxed{} \quad (2)$$

где C_{\parallel} - скорость распространения продольной звуковой волны, $\boxed{}$ - скорость поперечной волны, $\boxed{}$ - плотность материала, из которого сделан стержень, $\boxed{}$ - его модуль Юнга, $\boxed{}$ - его модуль сдвига.

Для возбуждения продольных колебаний в стержне достаточно каким-либо образом вызвать в одном из его концов попеременное сжатие и растяжение в направлении длины. Мысленно совместим этот конец стержня с началом координат, а координатную ось – с осью стержня. Пусть конец стержня совершает гармоническое движение по закону

$$\boxed{} \quad (3)$$

в направлении длины стержня. Это движение, так же как и отдельный продольный импульс, будет передаваться по стержню от слоя к слою. По стержню побежит упругая продольная волна. Точка стержня, находящаяся на расстоянии x от начала, в этом движении будет отставать на время, необходимое для распространения волны на расстояние x . Это время равно $\frac{x}{v}$. Точка, находящаяся на расстоянии x , будет иметь такое же смещение, какое начальная точка имела на время $t - \frac{x}{v}$ раньше, т.е. в момент $t - \frac{x}{v}$. Таким образом, точка, находящаяся на расстоянии x от начала стержня, будет двигаться по закону

$$y = A \sin \left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right) \quad (4)$$

или, так как $\frac{v}{\lambda} = \frac{1}{T}$, где T - период колебаний,

$$y = A \sin \left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right) \quad (5)$$

Это выражение представляет собой уравнение волны смещений, распространяющейся со скоростью v в направлении возрастающих значений x . Разные точки имеют в один и тот же момент времени t , вообще говоря, различные смещения. Но если взять на стержне ряд точек, находящихся на расстоянии λ друг от друга, то аргументы синуса в выражении смещения этих точек будут отличаться на 2π и поэтому сами смещения будут одинаковыми. Это расстояние называется длиной волны:

$$\lambda = vT \quad (6)$$

Длина волны равна расстоянию, которое проходит волна за один период колебаний. Амплитуда колебаний всех точек одна и та же, но фаза колебаний различных точек различна. Для двух точек, находящихся на расстоянии λ друг от друга, фазы колебаний, согласно (5), сдвинуты на 2π . На расстоянии λ при фиксированном t фаза колебаний изменяется на 2π .

Наблюдая все время какую-либо фиксированную точку стержня, обнаружим, что она совершает гармонические колебания. Если же будем двигаться вдоль стержня со скоростью v , то вовсе не обнаружим никаких колебаний. Все сечение стержня, против которых находимся в каждый момент, будут иметь в этот момент одно и то же смещение.

Такое гармоническое движение отдельных сечений стержня, распространяющееся вдоль стержня со скоростью v , называется продольной гармонической бегущей волной. Уравнение (5) аналогично уравнению

$$y = A \sin \left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right) \quad (7)$$

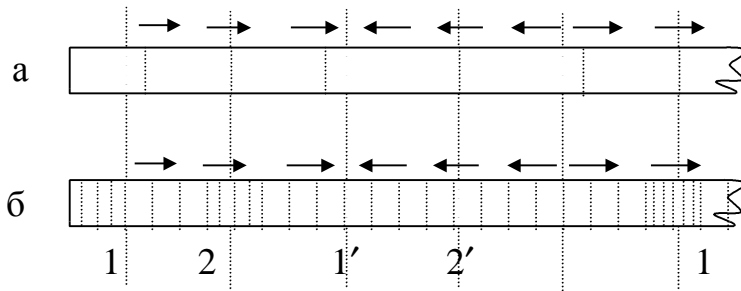
Рассмотрим, как распространяются в такой бегущей по стержню волне скорость и деформации.

Скорость смещения можно получить продифференцировав выражение (5)



(8)

Заметим, что скорость от точки к точке меняется по тому же закону, что и смещение, но смещение и скорости сдвинуты друг относительно друга по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Скорость данной точки стержня достигает максимума, когда



смещение этой точки падает до нуля.

Представим себе для какого-либо момента времени распределение смещений и скоростей волны в стержне (рис.1а).

Рис.1

Если отметить сечения 1 и 1', которые имеют в данный момент

наибольшее смещение Δx , то в этот же момент наибольшую скорость имеют сечения 2 и 2', находящиеся на расстоянии $\frac{\lambda}{4}$ от места наибольшего смещения (смещения указаны вертикальными штриховыми линиями, скорости – горизонтальными стрелками). Можно сказать, что волна скоростей сдвинута относительно волны смещений во времени на $\frac{\pi}{2}$, а в пространстве – на $\frac{\lambda}{4}$.

Чтобы выяснить характер распределения деформаций в бегущей волне, нужно принять во внимание, что величина деформации сжатия стержня, вызванная колебаниями, зависит не от абсолютных величин смещения соседних сечений стержня, а от того, как быстро изменяется смещение от сечения к сечению. Там, где смещение наибольшее (сечения Δx и $-\Delta x$), стержень вообще не деформирован. Наоборот, в сечениях 0 и 0 , где смещение проходит через нуль, деформация оказывается наибольшей. Максимумы деформаций в бегущей волне совпадают с минимумами смещений, т.е. с максимумами скоростей. Представим себе, что на боковой поверхности стержня нанесены линии на равном расстоянии друг от друга. Деформации стержня вызовут изменения расстояний между этими линиями. На рис.1б таким способом изображено мгновенное распределение деформаций стержня, соответствующих тому моменту, для которого на рис.1а приведено распределение смещений.

Чтобы найти распределение деформаций в бегущей волне, выделим слой стержня толщиной Δx . Пусть продольные смещения границ этого слоя соответственно равны u и $u + \Delta u$: это значит, что толщина слоя изменилась на $\Delta x + \Delta u$. Относительное изменение толщины слоя, т.е. растяжение,

равно $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ или для бесконечно тонких слоев $e = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Если смещение от точки к точке изменяется по закону (4), то деформация в точке x в момент времени t будет

$$\frac{\partial x_x}{\partial x} = -2p \frac{A}{l} \cos 2p \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} \right). \quad (9)$$

Волна деформаций (положительная деформация соответствует растяжению, отрицательная – сжатию) сдвинута относительно волны смещений на $l/4$, но в другую сторону, чем волна скоростей. Следовательно, волна скоростей и волна деформаций сдвинуты на $l/2$, т.е. волна деформаций противоположна по фазе волне скоростей. Слои стержня, которые в данный момент имеют положительную скорость (т.е. движутся в направлении возрастания положительных значений x), в этот момент имеют отрицательную деформацию, т.е. называются сжатыми.

Стоячая волна

Когда бегущая гармоническая волна достигает другого конца стержня, то на этом конце происходит отражение волны. Отраженная гармоническая волна распространяется в обратном направлении, и движение каждого сечения стержня можно рассматривать как результат сложения двух волн – падающей и отраженной. Если при распространении и отражении волн не происходит их затухания, то обе волны – падающая и отраженная – будут иметь одинаковую амплитуду. Но фазы обеих волн в какой-то точке x будут различны. Сдвиг фаз обусловлен, с одной стороны, тем, что отраженная волна проходит путь от точки x до конца стержня и обратно, с другой стороны, тем, что при отражении волн от границы тела, вообще говоря, может происходить изменение фазы волны. В частности, в случае отражения от закрепленного конца стержня, как уже было отмечено, волна смещений отражается с поворотом фазы на p рад. В случае же свободного конца стержня волна смещения отражается без изменения фазы.

Для нас наибольший интерес представляет случай, когда стержень длины l закреплен посередине.

Рассмотрим этот случай возникновения стоячих волн по аналогии со сложением поперечных волн.

Пусть падающая волна проходит от начала стержня путь x , и выражение для смещения x_1 в падающей волне имеет вид (4). Если использовать экспоненциальное представление уравнения бегущей волны в виде (10)

$$y = A \cdot e^{i(\omega t - kx)}, \quad (10)$$

то

$$x_1 = A e^{i(\omega t - kx)}.$$

Отраженная от свободного конца стержня волна имеет вид $x_2 = B e^{i(\omega t + kx)}$.

Результирующее смещение каждого сечения стержня будет определяться выражением (6):

$$x = x_1 + x_2 = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)} \quad (11)$$

и граничными условиями:

$$x = 0 \quad \text{при} \quad x = l/2 \quad (12)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \\ x = 0 \\ x = l \end{array} \right\} \quad (13)$$

Первое граничное условие означает, что в месте зажима будет находиться узел стоячей волны; а второе – что на концах стержня возбуждаются пучности.

Используя граничное условие (13):

$$\frac{\partial x}{\partial x} = -Aike^{i(\omega t - kx)} + Bike^{i(\omega t + kx)} = 0.$$

При $x = 0$

$$Bike^{i\omega t} - Aike^{i\omega t} = 0.$$

Отсюда $A=B$, т.е. отражаясь от менее плотной среды, волна не меняет фазы в месте отражения, потери полуволны не происходит, фазы падающей и отраженной волн у границы одинаковы.

Таким образом, смещение x определяется выражением

$$x = Ae^{i\omega t} (e^{-ikx} + e^{ikx}) = 2Ae^{i\omega t} \cos kx, \quad (14)$$

которое было получено с применением формул Эйлера.

Убедимся в том, что рассмотренная выше волна (14) может существовать только при строго определенных частотах колебаний. Это обстоятельство следует из условия (9): $x = 0$ при $x = l/2$. Отсюда получаем,

что $\cos k \frac{l}{2} = 0$. Это равенство возможно, если

$$k \cdot \frac{l}{2} = \frac{2p}{l} \cdot \frac{l}{2} = (2n + 1) \frac{p}{2}, \quad (15)$$

здесь положено $k = \frac{\omega}{C} = \frac{2p}{l}$.

Из (15) получаем условие существования стоячей волны:

$$\frac{l}{2} = (2n + 1) \frac{l}{4}, \quad (16)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Итак, когда стержень закреплен посередине, в месте зажима будет находиться узел стоячей волны, а на концах стержня возбуждаются

пучности. В этом случае на половине длины стержня должно укладываться нечетное число $l/4$.

Следует отметить, что рассмотренные случаи возникновения в стержне стоячих волн значительной амплитуды при заданном гармоническом движении одного из концов стержня представляют собой не что иное, как явление резонанса в сплошной системе. Чтобы вызвать гармоническое движение конца стержня, на этот конец должна действовать гармоническая внешняя сила. Всякий раз, когда частота гармонической внешней силы совпадает с одной из собственных частот колебательной системы, наступает явление резонанса, при котором амплитуды стоячих волн в стержне достигают максимального значения.

Описание экспериментально установки

Приборы и принадлежности: прибор с держателем стержня, возбудителем и приемником, исследуемые стержни (медный, стальной, дюралевый), осциллограф, звуковой генератор ГЗ-109.

Схема экспериментальной установки показана на рис.2. Установка состоит из звукового генератора I, прибора II с держателем стержня и двумя

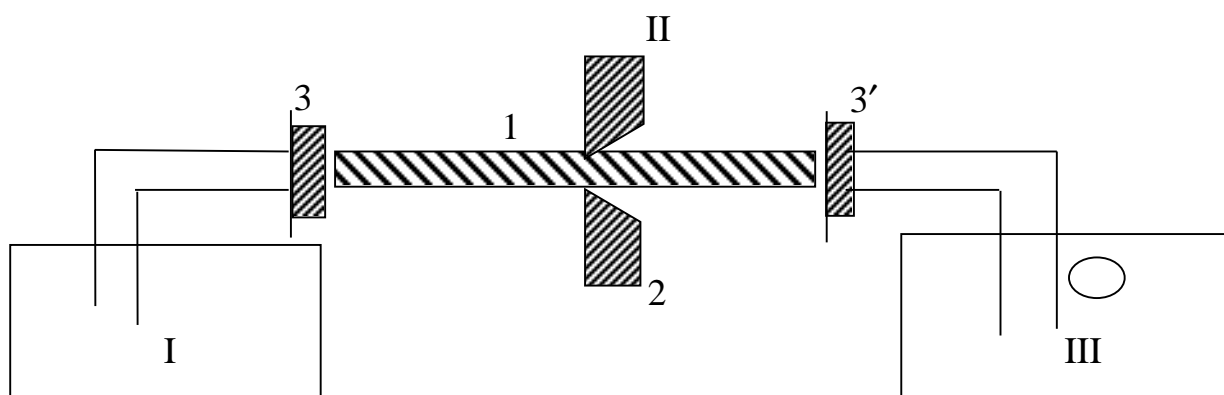


Рис. 2

электромагнитами для возбуждения и приема продольных колебаний и катодного осциллографа III.

Исследуемый стержень I закрепляется зажимом 2 строго в середине так, чтобы его левый и правый концы были расположены против полюсов возбудителя 3 и приемника 3'. Для усиления возбуждения продольных колебаний возбудитель и приемник необходимо расположить как можно ближе к концам стержней, что достигается при помощи микровинтов, жестко связанных с электромагнитами.

Переменное электрическое напряжение от генератора ГЗ-109 подводится к катушке возбуждения. В результате на левый конец стержня будет действовать периодическая сила с частотой, равной частоте генератора, и в

ферромагнитном стержне возбуждятся продольные волны. Если стержень изготовлен из немагнитного материала (медь, дюраль), то для возбуждения колебаний к его концам приклеивают тонкие пластинки из мягкого железа.

Правый электромагнит – приемник $З'$ - является преобразователем звуковых колебаний в электрические. Его катушка присоединяется к клеммам «Вход вертикального усилителя» осциллографа. Усиленные электрические колебания, поступающие от приемника, наблюдаются на экране осциллографа. Постепенно изменяя частоту колебаний напряжения, подаваемого на возбуждатель от генератора, можно добиться резонанса, т.е. совпадения частоты указанных колебаний с одной из частот собственных колебаний стержня.

Так как скорость бегущей волны $C = l n$ (где l - длина волны, n - частота колебаний), то с учетом выражения (16) можно получить формулу для скорости распространения продольной звуковой волны в стержне:

$$C = \frac{2L}{2n + 1} \cdot n. \quad (17)$$

Определив резонансные частоты n , при которых устанавливаются стоячие волны, можно найти скорость распространения продольных волн в стержне по формуле (17), а затем и модуль Юнга, используя формулу (1).

Возрастание амплитуды на экране осциллографа может произойти и в результате резонанса поперечных колебаний исследуемого стержня (когда отдельные сечения стержня смещаются перпендикулярно его оси). Этот эффект выражен тем сильнее, чем дальше отстоят свободные концы стержня от возбуждателя и приемника, и относительно их нарушена центровка стержня.

Поэтому для табличных значений C рассчитываются ориентировочные значения резонансных частот продольных волн по формуле (17) для $n = 0$ и $n = 1$.

Порядок выполнения работы

Собрать установку по схеме 1. Пользуясь микровинтами, приблизить возбуждатель $З$ и приемник $З'$ к соответствующим концам стержня до величины воздушного зазора, равной 0,1 – 0,2 мм. Напряжение на выходе звукового генератора задать близким к 15 В. Наблюдая за экраном осциллографа, медленно вращать лимб «установка частоты» звукового генератора до тех пор, пока не наступит максимальное возрастание амплитуды на экране.

Соответствующая частота колебаний отсчитывается по лимбу генератора.

Найти другие возможные резонансные частоты материала стержня, повышая частоту звукового генератора, (особенно сильное возрастание амплитуды колебаний наблюдается при основном резонансе).

Пользуясь формулами (17) и (1), определить скорость распространения продольных волн и модуль Юнга материала стержня.

Указанные измерения провести для стержней из одного и того же материала различной длины, данные представить в виде таблицы.

Выполнить статистическую обработку результатов наблюдений для каждого из материалов (как для скорости C , так и для модуля Юнга), результаты сравнить с табличными данными и сделать соответствующие выводы.

Форма таблицы результатов определения C и E для стержней из различных материалов

Таблица 1.

Материал Стержня	Длина стержня l , м	n	n рез. Гц	r , кг/м ³	C , м/с	$\bar{C} \pm \Delta C$ м/с	$C_{\text{таб}}$, м/с	E Па	$\bar{E} \pm \Delta E$, Па	$E_{\text{таб}}$ Па

Контрольные вопросы

1. Какие волны называются продольными и поперечными, от чего зависят скорости их распространения в среде?
2. Как выглядит уравнение гармонических колебаний?
3. Как записывается уравнение бегущей волны для смещений, скоростей и деформаций в стержне?
4. Как распределяются смещения, скорости, деформации по длине стержня?
5. Какие волны называются стоячими? Записать уравнение стоячей волны (для смещения).
6. Каковы условия возникновения стоячих волн? Указать формулу, определяющую величину амплитуды стоячей волны.
7. Как рассчитывается скорость распространения продольной звуковой волны вдоль стержня длиной L ?
8. Как рассчитать модуль Юнга материала стержня по известной величине скорости распространения в нем продольных волн?
9. Какова картина распределения стоячих волн в стержне, закрепленном посередине, для случаев $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$?

Библиографический список

1. Пейн Г. Физика колебаний и волн. М., Наука. 1979. 113-119, 128-130 с.
2. Гольдин Л.Л. и др. Руководство к лабораторным занятиям по физике. М. Наука. 1973. Работа 20.
3. Ивернова В.И. Физический практикум. М., Наука. 1967. 176-181 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики, М., Наука. 1990. 408 с.
5. Хайкин С.Э. Физические основы механики. М., Наука. 1971. 639-711 с.

Лабораторная работа 1-10

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ.

Цель работы: изучение явления резонанса поперечных волн.

Задача работы: получить и исследовать стоячую волну, определить частоты собственных колебаний струны.

Теория

Поперечные волны. Волновое уравнение.

Представим струну, натянутую между двумя неподвижными зажимами. Если какое-то начальное возмущение выведет струну из равновесия, то на струне возникнут колебания, которые называются собственными колебаниями струны, так как они происходят под действием внутренних сил, присущих системе колеблющихся частиц без внешних воздействий. В общем случае собственные колебания частиц струны будут периодическими, но не гармоническими. После определенного начального возмущения струна может совершать гармонические собственные колебания. Частота собственных колебаний струны может быть самой различной. Отметим общий закон собственных колебаний. Если колеблющаяся система имеет одну степень свободы (маятник), то она совершает собственные колебания с одной частотой. Система с двумя степенями свободы (два связанных маятника) имеет две собственные частоты. Струна имеет бесконечное множество частиц и бесконечное число собственных частот. Таким образом, число собственных частот системы равно числу степеней свободы.

Процесс распространения колебаний в среде, частицы которой связаны между собой силами взаимодействия, *называется волной*. Волны, в которых направление колебания частиц или осцилляторов перпендикулярно направлению распространения волны, называется *поперечным*. Волны, в которых направление колебаний частиц или осцилляторов перпендикулярно направлению распространения волны, называются *продольными*.

Рассмотрим вертикальное смещение y очень короткого отрезка гибкой однородной струны с закрепленным концом (рис.1). Этот участок, совершающий вертикальные гармонические колебания, является простым гармоническим осциллятором. Смещение зависит от времени t и от положения наблюдаемого отрезка струны x относительно начала координат O .

Функциональная зависимость смещения y от отдельного осциллятора от расстояния x и времени t *называется волновым уравнением*. Выведем волновое уравнение, рассматривая поперечную плоско поляризованную волну.

На рис. 1 изображен смещенный элемент струны, имеющий длину $dS \approx dx$. Обозначим массу единицы длины однородной струны, или ее линейную плотность через r .

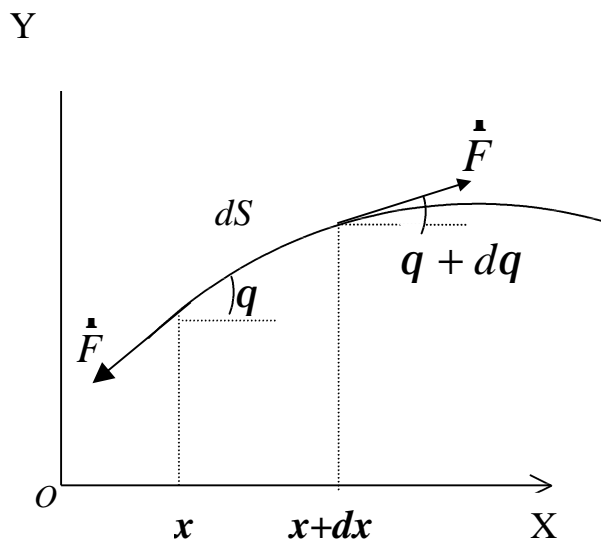


Рис. 1

Вдоль струны существует постоянное натяжение F , хотя растяжимость ее невелика. Мы будем рассматривать короткий отрезок и малые колебания, действие силы тяжести учитывать не будем. Из рис.1 видно, что на искривленный элемент длиной dS с одного конца действует сила натяжения F , направленная под углом q к оси X , а с другого конца – направленная под углом $q + dq$.

Уравнение движения гармонического осциллятора находим из закона Ньютона: $F = ma$. Перпендикулярная сила,

действующая на элемент dx в положительном направлении оси Y , равна $F \sin(q + dq) - F \sin q$ и второй закон Ньютона запишем в виде:

$$F \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{(x+dx)} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = r dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (1)$$

При этом учтено, что для малых углов q , $\sin q = tg q = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x$, где

$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x$ - частная производная в точке x .

Выражение, стоящее в квадратных скобках в равенстве (1), можно записать иначе:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{(x+dx)} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (2)$$

Сравните это равенство с определением частной производной функции $f(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y \equiv \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx}.$$

Тогда уравнение движения малого элемента принимает вид:

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = r \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{r}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Независимо от типа волн отношение силы упругости к плотности среды есть квадрат скорости C , носящей название *волновой* или *фазовой*.

$$\frac{F}{r} = C^2$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Уравнения типа (3) называются *волновыми уравнениями*. Они связывают ускорение гармонического осциллятора в среде со второй производной его смещения по координате x , определяющей положение осциллятора.

Решением уравнения (3) в общем, виде является уравнение бегущей волны

$$y = A \sin(\omega t - kx), \quad (4)$$

где $k = \frac{2\pi}{l} = \frac{\omega}{C}$ (так называемое волновое число). Можно также использовать экспоненциальное представление синуса и косинуса:

$$y = A \cdot e^{i(\omega t - kx)}. \quad (5)$$

Убедиться в справедливости подобного утверждения можно путем дифференцирования уравнения (4) или (5) и подстановки их в уравнение (3). При подстановке должно получиться тождество.

Стоячие волны

При некоторых условиях возбуждения в струне могут установиться стоячие волны. Этими условиями являются определенные величины собственной частоты колебаний.

Рассмотрим возникновение стоячих волн на струне фиксированной длины. Пусть одна монохроматическая волна с амплитудой A и частотой ω распространяется в положительном направлении оси X , а другая монохроматическая волна той же частоты с амплитудой B распространяется в отрицательном направлении оси X . Тогда смещение в любой точке струны будет определяться выражением:

$$y = A \cdot e^{i(\omega t - kx)} + B \cdot e^{i(\omega t + kx)}, \quad (6)$$

и граничными условиями

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = l. \quad (7)$$

Для любого значения t в уравнении (6) первое граничное условие дает $0 = (A + B)e^{i\omega t}$ отсюда $A = -B$

Физический смысл полученного соотношения заключается в том, что волна, бегущая в любом направлении, доходя до конца струны, полностью отражается с изменением фазы на π - радиан. Этот результат справедлив для всех волн любой формы и любой частоты. Таким образом, смещение y дается выражением:

$$y = Ae^{i\omega t} (e^{-ikx} - e^{ikx}) = -2Aie^{i\omega t} \sin kx, \quad (8)$$

так как по формуле Эйлера:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx, \quad e^{-ikx} = \cos kx - i \sin kx.$$

Волновое уравнение для стоячей волны является стационарным и запишется в виде: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k^2 y = 0$, поскольку $\frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2 y$.

В точках, в которых $\sin kx = 0$ согласно уравнению (8), колебания отсутствуют. Эти точки являются узлами стоячей волны. Там же, где $|\sin kx| = 1$ амплитуда колебаний максимальна, притом вдвое больше амплитуды складываемых волн. Это пучности стоячей волны. В появлении пучностей и узлов как раз и заключается явление интерференции: в одних местах колебания усиливаются, а в других прекращаются совсем.

Убедимся в том, что рассмотренная выше волна (8) может существовать только при строго определенных частотах колебаний. Это обстоятельство следует из условия (7): $y = 0$ при $x = l$. Отсюда получаем, что $\sin kl = 0$. Это равенство возможно, если $kl = n\pi$, где n - произвольное положительное число. Отрицательные n исключаются по смыслу волнового числа. Итак, оказывается, что k , а следовательно, и частота ω , связанная с k , могут принимать только следующие строго определенные значения:

$$k = k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \omega = \omega_n = 2\pi n_n = \frac{n\pi c}{l},$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Частоты ω_n или n_n называются собственными:

$$n_n = \frac{nc}{2l}. \quad (9)$$

Учитывая, что $n = c/l$, получаем из равенства (9) условие возникновения стоячей волны в виде:

$$l = \frac{nl}{2}. \quad (10)$$

Условие (10) означает, что стоячая волна возникает, когда на длине струны укладывается целое число полуволн.

Спектр собственных частот является дискретным, частоты n , $2n$, $3n$ и т.д., называются соответственно первой (основной), второй, третьей и т.д. гармониками. На рис.2 показано смещение струны для первых четырех гармоник.

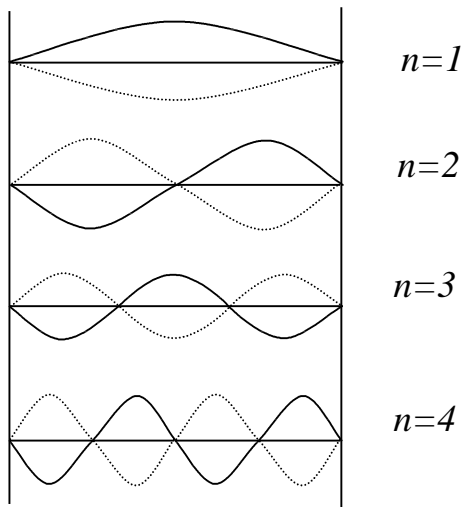


Рис.2

Поскольку волновая скорость зависит от упругости и плотности среды, из формул (9) и (2) получим формулу для собственных частот в виде:

$$n_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{r}} \quad (11)$$

Эта теория, описывающая движение идеально гибкой струны в вакууме, может быть применена для реальной струны. Но при колебаниях реальной струны происходят потери энергии (трение о воздух, соприкосновение на концах и т.д.). Для поддержания незатухающих колебаний

служит вибратор (электромагнит).

Внешнее периодическое воздействие, необходимое для колебаний струны, создается тем, что по обмотке электромагнита пропускается переменный ток от звукового генератора, сама струна помещается между полюсами электромагнита, по ней протекает постоянный ток. Благодаря этому на струну действует внешняя периодическая сила, частота изменения которой определяется по лимбу звукового генератора. Наибольшая амплитуда колебаний струны достигается при резонансе.

Передвижением электромагнита вдоль струны достигается перемещение по струне точки приложения внешней силы. По струне происходит передача энергии, поэтому, наряду со стоячими будут существовать бегущие волны, в результате узлы окажутся несколько размытыми.

Формулу (11) можно получить, применив метод размерностей [2]. Опыт показывает, что скорость распространения импульса деформаций C вдоль струны определяется величиной натяжения струны F и линейной плотностью r струны, т.е. $C = j(F \cdot r)$.

$$\text{Пусть } C = j(F, r) = F^m r^n,$$

Но $[F] = MLT^{-2}$, $[r] = ML^{-1}$, $[C] = LT^{-1}$, где M – масса, L – длина, T – время.

Следовательно, $LT^{-1} = (MLT^{-2})^m (ML^{-1})^n$. Приравнивая показатели степеней левой и правой частей этого уравнения, получим $m - n = 1$, $1 = 2m$, $m + n = 0$, откуда $m = 1/2$, $n = -1/2$. Таким образом, имеем

$$\sqrt{\frac{F}{r}}. \text{ Учитывая формулу (10) и то, что } c = \dots,$$

получаем окончательное выражение для частот колебаний струны

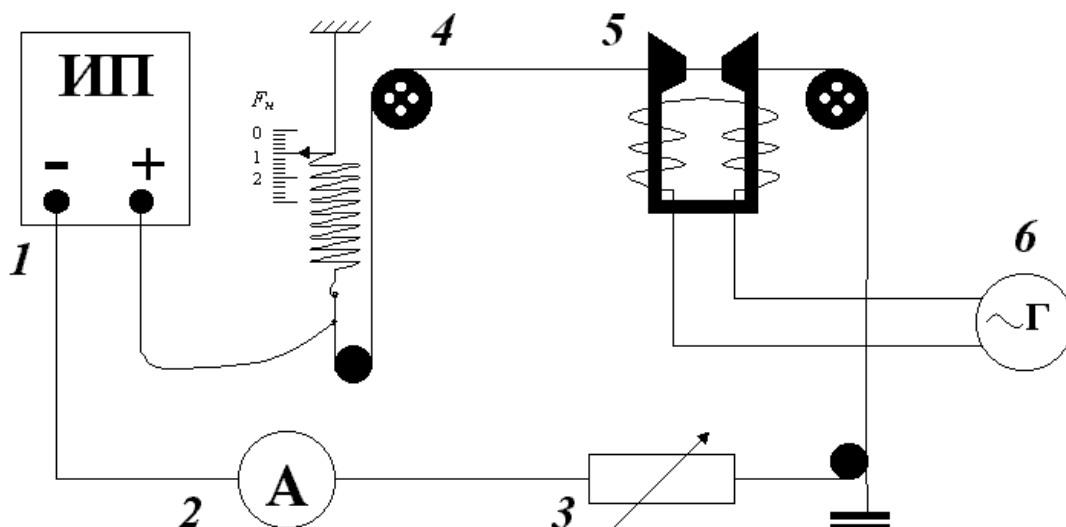
$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_N}{\rho}}$$

Приборы и принадлежности:

скамья с горизонтальной струной, генератор сигналов ГЗ-18, инструкция к генератору ГЗ-18, амперметр на 3А, реостат на 13 Ом, микроскоп, разновес, источник питания постоянного тока.

Описание экспериментальной установки

Установка состоит из струны, натягиваемой при помощи блоков и стальной пружины посредством червячной передачи (рис. 3).



1. Источник питания Б5-7 (0-30 В), $U=11$ В постоянное напряжение.
2. Амперметр ЛМ-1 (предел измерения 3А) $I=1,3-1,5$ А;
3. Реостат 18Ом, установить 4,7Ом.
4. Струна, натяжение 0,3-1 Н; $\varnothing=28$ мкм; $\rho_r=1,74 \cdot 10^{-4}$ кг/м (16.11.99)
5. Катушка электромагнитных колебаний;
6. Генератор ГЗ-109 (частота 20-100 Гц, множитель 1), выход коаксиальный, внутренняя нагрузка 5 кОм, установить $U=15$ В.

Рис. 3

Для питания электромагнита используется генератор сигналов, по струне протекает постоянный ток. Таким образом, проводник с током (струна) находится в поле электромагнита, частота собственных колебаний струны определяется частотой колебания напряжения, поданного на электромагнит. Сила натяжения струны измеряется динамометром.

Порядок выполнения работы

1. Установите минимальное натяжение струны, вибратор расположите на середине струны. Включите генератор сигналов, установив

минимальную частоту, выходное напряжение до 15 В. Замкните электрическую цепь питания струны, доведите силу тока до 1,5 А. Вращая ручку изменения частоты генератора, получите устойчивые стоячие волны, соответствующие различным значениям n , равным 1, 2, 3, 4, 5. При этом вибратор располагается в пучностях получаемых волн. Фиксируя каждый раз показания лимба генератора сигналов, повторите процесс измерения 3-4 раза. Амплитуду колебания при больших n удобно наблюдать при помощи микроскопа.

2. Проведите подобные измерения для 3-4-х заданных значений силы натяжения, но не более 1 Н.

3. Определите взвешиванием образца струны линейную плотность материала, по формуле (11) рассчитайте частоты и сравните их с показаниями генератора сигналов.

4. Результаты эксперимента удобно представить в виде графиков, откладывая по оси X значения собственных частот, отсчитанных по лимбу звукового генератора, а по оси Y – собственные частоты, вычисленные по формуле (11). Постройте такие графики (прямые) для различных значений силы натяжения струны.

5. Проведите обсуждение результатов. Совпадают ли измеренные и рассчитанные значения частот? Какие причины могут привести к их расхождению? Экспериментальные точки на графике следует обозначить неодинаково для различных значений силы натяжения.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются собственными?
2. Зависимость каких физических величин устанавливает волновое уравнение?
3. Получите волновое уравнение колеблющейся струны и запишите его решение.
4. Какие волны называются стоячими, и каковы условия возникновения стоячих волн?
5. Как зависит картина стоячих волн от силы натяжения струны?
6. В чем заключается явление резонанса, и каким образом оно достигается в данной задаче?
7. Для чего служит электромагнит?
8. Каким будет угол наклона прямой к положительному направлению оси X при совпадении измеренных и рассчитанных частот для некоторого значения силы тяжести натяжения?

Рекомендуемая литература

1. Пейн Г. Физика колебаний и волн. М., Наука. 1979. 113-119, 128-130 с.

2. Гольдин Л. Л. и др. Руководство к лабораторным занятиям по физике. М., Наука. 1973. Работа 20.
3. Иверонова В. И. Физический практикум. М., Наука. 1967. 176-181 с.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики, М., Наука. 1990. 408 с.
5. Хайкин С. Э. Физические основы механики. М., Наука. 1971. 639-711 с.

МЕХАНИКА

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ

Составители:

Дорохова Виктория Вольфовна
Заирова Галина Матвеевна
Кузнецова Галина Анатольевна
Левиант Владимир Маркович
Ловцов Сергей Владимирович
Роскин Олег Вадимович
Тимощенко Георгий Тимофеевич
Щербаченко Лия Авенировна

Редактор профессор Афанасьев А.Д.
Технический редактор канд. физ. - мат. наук Левиант В.М.

ЛР № 020592 от 09.07.97

Подписано в печать _____ Формат 60х90 1/16.

Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. - печ. л. 7.

Тираж 200 экз. План 2001 г. Поз. 84. Зак. 47.

Редакционно-издательский отдел
Иркутского государственного университета
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36