

Министерство образования Российской Федерации  
Государственное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
(ГОУ ВПО ИГУ)

**ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

Методические рекомендации

Иркутск 2002

Печатается по решению научно-методического совета  
Иркутского государственного университета

Предназначены для студентов 1 и 2 курсов естественных  
факультетов.

Библиогр.3 назв.Ил.2.

Составители: О.С. Айданова  
(кафедра общей и космической физики)

## Лабораторная работа

### ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

#### Цель работы:

1. Ознакомиться с основными характеристиками вращательного движения твёрдых тел.
2. Убедиться в справедливости основного закона динамики вращательного движения.

#### Основные приборы и принадлежности:

Маятник Обербека, секундомер, разновес, грузы, штангенциркуль.

#### Краткая теория

При вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси все его точки имеют одинаковую угловую скорость  $\omega$ , а положение точек тела полностью определяется углом поворота  $\varphi$ , отсчитываемого положения.

Угловой скоростью вращения  $\omega$  называется первая производная от угла поворота по времени (изменение угла поворота в единицу времени):

$$|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$$

Угловым ускорением  $\vec{\varepsilon}$  называется первая производная от угловой скорости по времени (изменение угловой скорости в единицу времени):

$$|\vec{\varepsilon}| = \frac{d|\vec{\omega}|}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Динамической характеристикой во вращательном движении является момент силы  $\vec{M}$ . Моментом силы относительно оси вращения называется векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{r}$  действия силы на вектор силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (1)$$

При этом вектор  $\vec{M}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , и направлен так, чтобы три вектора  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{M}$  образовали правовинтовую систему, т.е. в нашем случае  $\vec{M}$  направлен за чертёж (рис.1). (Для наглядности вектор силы  $\vec{F}$  можно было бы перенести параллельно самому себе в т.О, тогда поворот от первого вектора  $\vec{r}$  ко второму  $\vec{F}$  по часовой стрелке укажет направление третьего вектора  $\vec{M}$ , которое должно совпадать с поступательным движением винта). Направление вектора момента силы  $\vec{M}$  совпадает по направлению с векторами  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  при равноускоренном вращательном движении. При равнозамедленном движении результирующий вектор моментов сил  $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$  и

вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  направлен в противоположную сторону по отношению к вектору угловой скорости  $\vec{\omega}$ .

Пусть ось вращения твёрдого тела проходит через точку О перпендикулярно чертежу, тогда под действием силы  $\vec{F}$ , приложенной на расстоянии радиуса вектора  $\vec{r}$  от оси вращения и лежащей в плоскости чертежа, тело будет вращаться по часовой стрелке (рис.1). Момент силы равен

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]; \quad |\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha, \quad (2)$$

где  $\alpha$  - угол между направлениями векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ .

Из рисунка 1 видно, что величину момента силы можно вычислить по формуле  $M = b \cdot F$ ;  $b = r \cdot \sin \alpha$ , где  $b$ -кратчайшее расстояние от оси вращения до направления силы  $\vec{F}$ . Итак, если  $\vec{r} \perp \vec{F}$ , то момент силы равен их произведению ( $\sin \alpha = 1$ ), и направлен по оси вращения за чертёж, совпадая по направлению с угловым ускорением.

Основной закон динамики вращательного движения устанавливает прямо пропорциональную связь между угловым ускорением и геометрической суммой моментов всех сил, приложенных к твёрдому телу

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{I}. \quad (3)$$

Здесь  $I$ - момент инерции твёрдого тела, относительно оси вращения. Момент инерции при вращательном движении характеризует инерционные свойства тел при вращательном движении, подобно тому, как масса является характеристикой инерционных свойств тела при поступательном движении. Момент

инерции тел определяется не только массой вращающихся тел, но и распределением её и отдельных её частей относительно оси вращения.

Так момент инерции  $dI$  материальной точки массой  $dm$ , отстоящей от оси вращения на расстоянии  $r$ , равен

$$dI = dm r^2. \quad (4)$$

Для вычисления момента инерции всего вращающегося тела относительно оси вращения тело разбивают на элементарные объёмы  $dV$  с массой  $dm$ , считая их материальными точками, и алгебраически суммируют моменты инерции всех материальных точек, составляющих тело, т.е. момент инерции всего тела будет равен

$$I = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho v,$$

где  $\rho = \frac{dm}{dv}$  -плотность вещества тела. Так как радиус-вектор  $\vec{r}$  является функцией координат точек, составляющих тело, то формулы для расчета моментов инерции тел различной формы, имеющих одинаковые массы, будут различны.

Так момент инерции сплошного цилиндра относительно продольной оси симметрии равен  $\frac{1}{2} mR^2$ , где  $m$ - масса цилиндра,  $R$ - его радиус; момент инерции полого тонкостенного цилиндра равен  $mR^2$ , а момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр, равен  $\frac{2}{5} mR^2$ .

Момент инерции данного тела относительно оси, не проходящей через центр масс, связан не только с массой, формой и размерами тела, но также с положением этой оси по отношению к оси, проходящей через центр масс. Согласно теореме о переносе осей инерции (теорема Штейнера-Гюйгенса) моменты инерции относительно параллельных осей связаны соотношением

$$I = I_0 + md^2 \quad (5)$$

где  $I_0$ -момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела,  $m$ - масса тела,  $d$ - расстояние между осями.

Моменты инерции тел сложной конфигурации обычно определяют экспериментальным путём.

## Описание прибора

В лабораторной работе по определению основных величин, характеризующих вращательное движение твёрдого тела, используется маятник Обербека. Основной его частью является крестообразный маховик, закреплённый на горизонтальной оси (рис.2). На одной оси с маховиком находятся два шкива разного диаметра. На спицы крестовины насаживаются одинаковые по размерам и массе цилиндры, положение которых можно изменять. Когда цилиндры расположены на равных расстояниях от оси вращения, маховик находится в безразличном равновесии. В отсутствие цилиндров на стержнях маховик имеет некоторый собственный момент инерции  $I_0$ , величина которого определяется, главным образом, моментом инерции стержней относительно оси вращения. На шкивы наматывается нить, к концу которой прикрепляется груз. Под действием груза, движущегося поступательно вниз, маятник приводится в равноускоренное вращательное движение.

### Методика измерений

Если, намотав нить на шкив и прикрепив к концу нити груз массой  $m$  отпустить его, то за время  $t$ , падая равноускоренно, груз пройдет расстояние

$$h = \frac{at^2}{2}, \quad (6)$$

где  $a$  - ускорение падающего груза. Измерив  $h$  и  $t$ , можно найти  $a$  и угловое ускорение точек маховика :

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{4h}{Dt^2}. \quad (7)$$

Здесь  $D$  - диаметр шкива, на который намотана нить. Вращение маховика с угловым ускорением  $\varepsilon$  вызвано действием момента силы тяжести  $T$  нити. Плечом этой силы является радиус шкива  $r$ . Так что

$$M = rT. \quad (8)$$

Силу тяжести нити можно найти из уравнения поступательного движения подвешенного к нити груза  $m$ . Действительно, на груз действуют две силы:  $m\vec{g}$  и  $\vec{T}$ :  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ . Учитывая направления приложенных сил, получаем:

$$ma = mg - T. \quad (9)$$

Отсюда

$$T = m(g - a). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), находим момент силы тяжести нити :

$$M = rm(g - a) = \frac{mD}{2} \left( g - \frac{2h}{t^2} \right). \quad (11)$$

Если  $\frac{2h}{t^2} \ll g$ , то

$$M = \frac{mgD}{2}. \quad (12)$$

Из основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела находим момент инерции вращательного маховика

$$I = \frac{M}{\varepsilon}. \quad (13)$$

### Порядок выполнения работы

1. Определить массу платформы  $m_0$ , взвесив ее на технических весах.
2. Штангенциркулем измерить : а) диаметр большого шкива  $D$ ; б) диаметр обоймы  $b$ , через которую проходят стержни, в) высоту цилиндров  $h_1$ , насаживаемых на стержни. Результаты измерений сразу записывать в таблицу.
3. Закрепить цилиндры на стержнях на расстоянии  $S = 8$  см от обоймы. Подсчитать расстояние от центра масс каждого цилиндра до оси вращения.
4. К концу нити прикрепить платформу, положить на нее гирьку массой 100 г и, аккуратно наматывая нить на шкив, поднять груз до высоты  $h = 140$  см ÷ 150 см. В процессе экспериментов желательно выбранную высоту сохранять постоянной, чтобы не вносить дополнительные погрешности.
5. Время падения груза отсчитывается с помощью секундомера с точностью 0,2 с от момента отодвигания защелки, удерживающей маятник от вращения, до момента удара груза о пол. Опыт проделать 3 раза.
6. Установить на платформе грузики последовательно массой 150 г и 200 г, повторить весь эксперимент. Данные занести в таблицу.
7. Опыт по определению  $\varepsilon$ ,  $M$ ,  $I$  произвести трижды при разных положениях цилиндров на стержнях маятника ( $S_1 = 8$  см,  $S_2 = 13$  см,  $S_3 = 17$  см), наматывая нить на большой шкив, меняя массу гирек, приводящих систему во вращение.

**Таблица**

	$m_0+m, \text{г}$	$D, \text{см}$	$b, \text{см}$	$h_1, \text{см}$	$S, \text{см}$	$d, \text{см}$	$d_1^2, \text{см}^2$	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$	$t_{\text{ср}}, \text{с}$	$\delta, \text{с}^{-2}$	$M, \text{г}\cdot\text{см}^2\cdot\text{с}^{-2}$	$I, \text{г}\cdot\text{см}^2$	$M_{\text{тр}}$
1	100 150 200														
2															
3															

8. Рассчитать по данным опыта  $\varepsilon$ ,  $M$ ,  $I$ , воспользовавшись формулами (7), (12), (13).
9. По результатам подсчетов построить графики  $\varepsilon = f(M)$ , откладывая по оси абсцисс  $M$ , по оси ординат  $\varepsilon$  для трех положений цилиндров на стержнях маятника, т. е. для трех значений момента инерции системы  $I$ .
10. Убедиться, что при экстраполяции прямых  $\varepsilon = f(M)$  до пересечения с осью абсцисс значение момента силы, приводящей систему во вращение, не равно нулю. Это значит, что на систему действует также момент сил трения. Уравнение динамики вращательного движения следует записать  $\varepsilon = \frac{M - M_{\text{тр}}}{I}$  ;  
 $I\varepsilon = M - M_{\text{тр}}$ . Из графика определите значение  $M_{\text{тр}}$  (при  $\varepsilon = 0$ ) во всех экспериментах. Сравните их, выясните, зависит ли  $M_{\text{тр}}$  от  $I$ .
11. Представьте графически зависимость  $I = f(d^2)$ . В соответствии с теоремой Штейнера (5), график должен быть прямой, а участок отсекаемый от оси ординат, позволяет определить значение  $I_0$  - момент инерции маятника без цилиндров. Определите значение  $I_0$ .

### Контрольные вопросы

1. Какие характеристики вращательного движения аналогичны массе и силе поступательного движения?
2. Что называется моментом силы относительно оси вращения? Как определяется его направление?
3. Что называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения? Как рассчитывается момент инерции тела? В каких единицах он выражается?
4. В чем состоит теорема Штейнера - Гюйгенса .?
5. Вывести формулы :  $v = \omega r$ ,  $a = \varepsilon r$ .
6. В чем состоит закон динамики вращательного движения?

7. Каким путем можно изменять вращающий момент падающего груза, чтобы получить различные угловые ускорения маятника?
8. Можно ли цилиндры, помещаемые на стержнях маятника считать в условиях опыта точечными массами?
9. Почему в том случае, когда грузы ближе к оси вращения, время падения массы  $m$  меньше?
10. Является ли при  $I = \text{Const}$  график  $\varepsilon = f(M)$  прямой линией и почему?

### **Рекомендуемая литература**

1. Савельев И. В. Курс общей физики. М.: наука, 1988, т. I, п. 5, 38-39.
2. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. М.: Наука, 1980, Гл. 1, 4.
3. Грабовский Р. И. Курс физики. М.: Высш. школа, 1980, гл. 21-23.
4. Трофимова Т. И. Курс физики. М.: Высшая школа, 1997, гл. 4, п. 16-18.
5. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986, гл. 8, п. 31-32.

*Айданова Ольга Серафимовна*

**Изучение вращательного движения твердых тел**

Методические рекомендации

Подписано в печать 2002. Формат 60X90 1/16.  
Бумага писчая. Печать офсетная. Гарнитура Times.  
Усл.печ.л. 0,8. Уч.-изд. л. 0,7. Тираж экз. План 2002г. Поз.

Редакционно- издательский отдел  
Иркутского государственного университета  
664003, Иркутск, б. Гагарина,36