



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»
(ФГБОУ ВПО «ИГУ»)

Определение ускорения свободного падения с помощью маятника

Методические рекомендации

Иркутск 2002

Теория. Математическим маятником называется материальная точка массой m , подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити. На практике приближением к такому маятнику служит подвешенный на тонкой нити шарик, диаметр которого d значительно меньше длины нити l ($d \ll l$), а масса шарика много больше массы нити.

Будучи отклоненным от положения равновесия, шарик может совершать колебательные движения в плоскости отклонения. В этом случае на шарик действуют две силы: сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, направленная вертикально, и сила натяжения нити \vec{F}_H . Силу тяжести можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие $P_1 = P \cos \alpha$ и $P_2 = P \sin \alpha$ (см. рис.1), одна из которых направлена вдоль нити, а вторая – перпендикулярно нити. Первая из них будет в точности уравновешена силой натяжения нити ($P_1 = F_H$), так как нить не рвется и движения вдоль направления нити нет. Согласно второму закону Ньютона ускорение, приобретенное телом, равно геометрической сумме действующих сил (т.е. силе P_2), деленной на массу тела, и будет направлено перпендикулярно нити. Таким образом

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_2}{m} \quad (1)$$

Так как шарик движется по окружности радиуса l (длина нити) с центром в точке подвеса нити, то за некоторое время dt он будет проходить путь, равный длине дуги $ds = l d\alpha$, где $d\alpha$ - изменение угла (выраженного в радианах) между вертикалью и направлением нити. Тогда скорость движения шарика по окружности может быть записана в виде

$$V = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\alpha}{dt} \quad (2)$$

Если угол отклонения нити от положения равновесия мал ($\alpha < \pi/6$), то $\sin \alpha \approx \alpha$ и $P_2 \approx mg\alpha$. Тогда, подставляя значение скорости, определенной соотношением (2), в уравнение (1), получаем дифференциальное уравнение для функции $\alpha(t)$:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \alpha \quad (3)$$

Прямой подстановкой легко проверить, что данному уравнению

удовлетворяет решения вида $\alpha = C \sin(2\pi \frac{t}{T})$, где используется обозначение

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4)$$

Так как тригонометрические функции синус и косинус являются периодическими (т.е. не изменяют своего значения при изменении аргумента на величину 2π), то легко заметить, что величина T является периодом колебаний. За время, равное одному периоду, шарик будет возвращаться в

исходную точку, а формула (4), связывающая период с длиной нити и ускорением силы тяжести, называется формулой Томсона.

Если обозначить отклонение маятника от положения равновесия через x , то можно записать $x = l \sin \alpha \approx l\alpha = l \sin(2\pi \frac{t}{T})$, т.е. отклонение также меняется по периодическому закону.

Описание лабораторной установки и методика измерений

Порядок выполнения работы

При выполнении работы измеряется время колебаний маятника.

Целью данной работы является определение аномалии силы тяжести (ускорения свободного падения) в данной местности.

Приборы и принадлежности: штатива, на котором подвешен маятник, секундомер, рулетка.

Задание 1. Экспериментальное определение ускорения свободного падения.

1) Исследовать зависимость периода колебаний T от длины маятника l . Для этого измерять время t двадцати полных колебаний маятника ($N = 20$) и вычислить период колебаний. Угол отклонения (угловую амплитуду) взять равным 10° . Опыты проделать для 10-ти различных длин маятника. Данные занести в таблицу 1.

Таблица 1.

Номер опыта	l , м	t , с	$T = \frac{t}{N}$, с	\sqrt{l} , м ^{1/2}	g , м/с ²	$g - \bar{g}$, м/с ²	$(g - \bar{g})^2$, м/с ²
1							
2							
...							
10							

- 2) Построить график зависимости $T = f(\sqrt{l})$ по данным эксперимента, откладывая по оси абсцисс \sqrt{l} , по оси ординат - период T . Объяснить вид полученной зависимости.
- 3) Используя формулу (3), получить формулу для расчета g . Определить ускорение свободного падения g для каждого измерения и занести эти значения в таблицу 1. Вычислить среднее значение \bar{g} .
- 4) Оценить гравитационную аномалию $\Delta g = g_{cp} - g_0$, где $g_0 = 9.812 \text{ м/с}^2$ - среднее ускорение свободного падения на широте Иркутска. Знак аномалии Δg позволяет судить об избыточной плотности, т.е. о плотности залегающих пород: если $\Delta g < 0$, то эксперимент проводился над относительно «легкими» породами. Соответственно, над более плотными породами аномалия будет положительна, т.е. $\Delta g > 0$.

5) Провести статистическую обработку результатов измерений: найти абсолютную и относительную погрешности эксперимента. Определить доверительный интервал.

Задание 2.

Определить, как зависит период колебаний маятника от амплитуды. Для этого зафиксировать постоянную максимальную длину $l = const$ и тщательно определить периоды T при разных угловых амплитудах через 10° , начиная от 10° до 60° . Данные занести в таблицу 2.

Таблица 2.

Номер измерения	l , м	α°	N	t , с	$T = \frac{t}{N}$, с
1					
...					
6					

Контрольные вопросы

1. Что называется математическим маятником?
2. Как выводится формула периода колебаний маятника?
3. От чего зависит период колебаний математического маятника?
4. При любых ли амплитудах маятника справедлива формула Томсона?
5. Чему должен быть равен тангенс угла наклона графика $T = f(\sqrt{l})$ к оси абсцисс?
6. Что называется ускорением свободного падения, от чего оно зависит и от чего не зависит?