МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»
(ФГБОУ ВПО «ИГУ»)

Лабораторная работа № 0
ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Методические рекомендации

Иркутск 2011

Печатается по решению научно- методического совета
Иркутского государственного университета

Предназначены для студентов 1 и 2 курсов естественных факультетов.
Библиогр.3 назв. Ил.1. Табл. 3.

Составитель: К.ф.-м.н. Глазунов О.О.,
(кафедра общей и космической физики),

Рецензент к.ф.-м.н., доц. Дорохова В.В.

Цель работы

Знакомство с теорией расчета абсолютной и относительной погрешности и применения его на практике.

Краткая теория

Основу экспериментальных наук составляют измерения, которые можно разделить на прямые и косвенные.

При **прямых измерениях** определяемая величина сравнивается с единицей измерения. Например, измерение длины линейкой, объема жидкости – мензуркой, времени – секундомером и т.д.

В **косвенных измерениях** определяемая величина вычисляется из результатов прямых измерений других величин, которые связаны с определяемой величиной функциональной зависимостью, т.е. с помощью формулы. Например, определение объема прямоугольного параллелепипеда по измерению его длины, ширины и высоты.

Повторение измерения одной и той же величины дают, в общем случае, результаты несколько отличающиеся друг от друга даже тогда, когда они проводились одним и тем же экспериментатором, одним и тем же способом, посредством одних и тех же приборов. Другими словами, любые измерения всегда проводятся с какими - то погрешностями. Погрешности измерения разделяются на 2 группы: систематические и случайные.

Систематические погрешности – погрешности, величина и знак остаются постоянными при повторных измерениях. Например, положение нуля термометра может не соответствовать нулевой температуре; шкала линейки может быть нанесена неравномерно. Систематическая погрешность никак не проявляет себя при повторении измерений. Поэтому в процессе самих измерений ее нельзя ни обнаружить, ни оценить количественно. Выявление систематической ошибки, вообще говоря, является сложной задачей. Эта задача решается в основном двумя путями: 1) измерение одной и той же величины разными измерительными приборами; 2) измерение одной и той же величины разными методами.

Случайные погрешности – погрешности, величина и знак которых при повторных измерениях принимают различные значения. Случайные погрешности возникают вследствие причин, которые действуют в каждом опыте неодинаковым образом. Например, при измерении массы на рычажных весах сказывается изменение температуры воздуха, его слабые потоки, сотрясения фундамента здания и т.п. Характерной особенностью случайной погрешности, в отличие от систематической, является то, что она проявляется при повторном измерении. Путем соответствующей математической обработки результатов измерения мы можем вычислить эту погрешность. Теория случайных погрешностей базируется на теории вероятности, которая оперирует определенными понятиями. Дадим определение некоторым из них.

Событиями в теории вероятности называют всякие явления, относительно которых имеет смысл ставить вопрос, могут они происходить или нет.

Событие называется **случайными**, если в результате испытания оно может как произойти, так и не произойти.

Вероятностью события называется отношение числа возможных случаев, благоприятных этому событию, к числу всех равновозможных случаев, которые могут встретиться при испытании.

Допустим, мы провели n прямых измерений некоторой физической величины x. Обозначим через x_1, x_2, …, x_n результаты отдельных измерений. Введем понятие **среднеарифметической величины**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)$$

Рассмотрим вначале предельный случай ($n \to \infty$). Совокупность результатов бесконечного числа измерений называется **генеральной совокупностью**. Истинное значение измеряемой величины X – определяется средним значением генеральной совокупности и называется **математическим ожиданием**. Функция f(x), показывающая с какой скоростью изменяется вероятность наблюдения величины x при ее изменении, называется **плотностью вероятности** (см. плавную линию на рис. 1).

Вместе с тем, исследователь всегда располагает ограниченым набором значений измеряемой величины, называемой **выборкой**. Выборка является случайным набором измерений. По выборке нельзя рассчитать истинное значение измеряемой величины. Можно лишь вычислить **доверительный интервал** – интервал, в котором с доверительной вероятностью (заданной экспериментатором вероятностью) находится истинное значение измеряемой величины. На практике, если специально не оговариваться, доверительная вероятность выбирается равной 0,95 (95%).

Введем величину, называемой **среднеквадратичным отклонением выборки**.

$$\boldsymbol{S}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{x}_i^{\,2}}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)}}$$

Произведение $t_{\alpha,n}S_{\bar{x}}$ определяет полуширину доверительного интервала и называется **абсолютной погрешностью измерения**, где $t_{\alpha,n}$ (табличный коэффициент Стьюдента) определяется не только доверительной вероятностью α, но и объемом выборки n. Госсет определил (опубликовал под псевдонимом "Стьюдент") плотность вероятности для этой величины t. В таб. 1 приведены значения коэффициента при различных значениях n для доверительной вероятности 0,95.

Таблица 1.

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t_{0,95}$	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	1,96

Следовательно, границы доверительного интервала для истинного значения измеряемой величины можно написать в виде:

$\bar{x} - t_{\alpha,n} S_{\bar{x}} \le X \le \bar{x} + t_{\alpha,n} S_{\bar{x}}$. *или*

$$X = \bar{x} \pm t_{\alpha,n} S_{\bar{x}} \qquad \textbf{(3)}$$

Порядок выполнения работы

На основании вышеизложенного можно предложить следующий порядок операции для выборки небольшого объема при обработке результатов прямых наблюдений.

1. Результаты каждого измерения записываются в таблицу 2.
2. Вычисляется среднее значение из n измерений $\boldsymbol{\bar{x}} = \frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}$
3. Находятся абсолютные отклонения отдельных измерений $\Delta \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{\bar{x}} - \boldsymbol{x_i}$
4. Вычисляются квадраты абсолютных отклонений отдельных измерений $\Delta \boldsymbol{x_i}^2 = (\boldsymbol{\bar{x}} - \boldsymbol{x_i})^2$
5. Вычисляется среднеквадратичное отклонение выборки

$$\boldsymbol{S}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{x_i}^2}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)}}$$

6. Задается значение доверительной вероятности. Обычно α=0,95.
7. По данным таблицы 1 определяется коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}$.
8. Находится абсолютная погрешность среднего значения $\Delta \bar{x} = t_{\alpha,n} S_{\bar{x}}$
9. Окончательный результат записывается в виде: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\bar{x}} \pm \boldsymbol{t_{\alpha,n}} \boldsymbol{S}_{\bar{x}}$.
10. Для оценки точности измерения вводится понятие относительной погрешности ε равной $\varepsilon = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\bar{x}}}$. Обычно эта погрешность выражается в процентах: $\varepsilon = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\bar{x}}} \cdot 100\%$.

Современные микро калькуляторы позволяют в режиме статистических расчетов вычислять $\bar{x}$ и $S_{\bar{x}}$. При отсутствии таковых расчеты $\bar{x}$ и $S_{\bar{x}}$ можно проводить, последовательно вычисляя и заполняя столбцы табл. 2.

Таблица 2.

N	x_i	$\Delta \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{\bar{x}} - \boldsymbol{x_i}$	$\Delta \boldsymbol{x_i}^2 = (\boldsymbol{\bar{x}} - \boldsymbol{x_i})^2$
1			
2			
3 и т.д.			
	$\boldsymbol{\bar{x}} =$		$\sum \Delta \boldsymbol{x_i}^2 =$

Особо следует остановиться на количестве значащих цифр в окончательной записи результатов. У чисел больше единицы под значащими цифрами понимают последовательность всех цифр без учета места запятой, а для чисел меньше единицы – без учета нуля перед запятой и всех последующих за ним нулей. Например, в числе 4,97 три значащие цифры 4;9;7, в числе 0,07452 – четыре значащие цифры 7;4;5;2, а в числе 156,230 – шесть значащих цифр 1;5;6;2;3;0. Пусть измерения некоторых величин проводятся с j значащими цифрами. В окончательной записи результатов измерений среднее значение измеряемой величины должно также иметь j значащих цифр, абсолютная погрешность среднего значения (полуширина доверительного интервала) не должна увеличивать среднее значение до последующей значащей цифры. Из изложенного следует, что все промежуточные вычисления окончательного результата следует проводить с числом значащих цифр, превышающих на единицу число значащих цифр, полученных при измерениях. После чего округлить полученный результат.
Из равенства (3) с учетом того, что с ростом объема выборки уменьшается коэффициент Стьюдента, следует, что увеличивая число измерений, мы уменьшаем абсолютную погрешность среднего значения. Может, показаться, что проведя достаточно большое число измерений. Однако это не совсем так. Суть дела заключается в том, что случайная погрешность становиться сравнимой с погрешностью, вносимой измерительным прибором (приборная погрешность), определяемой его классом точности. Если же случайная погрешность оказывается гораздо меньше, чем приборная погрешность определяет погрешность измерения. Тогда при измерении данным приборам получается один и тот же результат. В этих случаях при вычислении погрешности измерения необходимо учитывать и погрешность измерительного прибора.
В заключении следует, что распределение Стьюдента кроме определения полуширины доверительного интервала позволяет сравнить и значения среднеарифметических величин двух выборок одной и той же генеральной совокупности.

Построение функции плотности вероятности прямых измерений

При большом объеме выборки удается приблизительно установить графический ход плотности вероятности f(x). Чаще всего это делают с помощью так называемой **гистограммы –** ступенчатой кривой.

Построение гистограммы производится в следующей последовательности.

1. В совокупности результатов измерений x_1, x_2,… x_n находится наибольшее и наименьшее значение x_{max} и x_{min}.
2. определяется диапазон измеряемой величины $(x_{max} - x_{min}) = \delta$.
3. Весь диапазон измерения измеряемой величины δ разбивается на несколько равных интервалов. Число их должно быть достаточно велико (~10).
4. Подсчитывается число N результатов измерения, попавших в каждый интервал. Значения, совпадающие с границами интервала, относятся к последующему интервалу. Подсчет числа N удобно делать с помощью штриховых отметок, разбиваемых на группы по 5 штрихов. Каждый штрих соответствует одному попаданию. Так, если после подсчета получается следующая штриховая запись, то это означает, что в данный интервал попало 13 измерений. Результаты подсчета следует внести в следующую таблицу.

Таблица 3.

Границы интервалов	Штриховые отметки	N

5. В декартовых координатах по оси абсцисс откладывается интервалы, и на каждом интервале строится прямоугольник, высота которого равна N.
6. Обведя гистограмму плавной линией, как это сделано на рис. 1, получим экспериментальную кривую, которая приближенно определяет ход плотности вероятности.

Задание 2.

1. Измерить 100 раз время какого-нибудь процесса, указанного преподавателем. Запишите в строчку результаты измерения.
2. Постройте функцию плотности вероятности по результатам измерения. Подсчет числа попаданий измерений в интервалы производите согласно таб.3. Сделайте качественные выводы о свойствах плотности вероятности: о симметричности распределения, о вероятности появления больших погрешностей.

Приложение

Обработка результатов косвенных измерений

Пусть не возможно прямое измерение величины y=F(x,z), зависящей от двух переменных: x и z. Среднее значение определяемой величины y вычислим по зависимости y=F(x,z) при x=$\bar{x}$ и z=$\bar{z}$. Для того, чтобы вычислить абсолютную погрешность Δy косвенного измерения величины y, вначале вычисляем абсолютные погрешности прямых измерений величин x и z, т.е. Δx и Δz. Тогда:

$$\Delta \boldsymbol{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2 \cdot (\Delta \boldsymbol{x})^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)^2 \cdot (\Delta \boldsymbol{z})^2}\,, \qquad (4)$$

где значения частых производных $\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)$ и $\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)$вычисляем также при x=$\bar{x}$ и z=$\bar{z}$. Окончательный результат косвенного измерения величины y, как и в случае прямых измерений, представляем в виде: $y = \bar{y} + \Delta y$

В случае числа переменных больше двух, соответственно, увеличивается и количество членов в выражении (13).

Пример. Для измерения плотности твердого тела, определяемой соотношением ρ=M/V, проведены прямые измерения массы M и объема V. После статистической обработки результатов измерений массы и объема получены следующие значения:

$\bar{M}$ = 420,0 г, ΔM= 0,5 г; $\bar{V}$ =50 см^3, ΔV=1 см^3.

Вычисляем среднее значение плотности и соответствующие частные производные: ρ=420/50=8,4 г/см^3,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial M}\right) = \left(\frac{1}{\bar{V}}\right) = \left(\frac{1}{50}\right) = 0.02\,cm^{-3},$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right) = \left(\frac{-\bar{M}}{\bar{V}^2}\right) = \left(\frac{-420}{50 \cdot 50}\right) = -0{,}168\,г / cm^6$$

По формуле (13) вычисляем абсолютную погрешность измерения плотности:

$\Delta\rho = 0.0004 \cdot 0.25 + 0.0282224 \cdot 1 = 0.2\,г / cm^3$.

Согласно (14) ответ представляем в виде:

ρ=(8,4+0,2)г/см^3.

Относительная погрешность измерения плотности ε=2,4%.

Контрольные вопросы

1. что такое генеральная совокупность?
2. Что такое математическое ожидание?
3. Что показывает функция распределения?
4. Что такое выборка? Что называется объемом выборки?
5. Что такое доверительный интервал?
6. Что принимают за абсолютную погрешность измерения? Чему она равна?
7. Что называется относительной погрешностью измерения?

Рекомендуемая литература

1. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука. 1970
2. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир. 1970
3. Закс Л. Статистическое оценивание. М.: Статистика. 1976.

Глазунов Олег Олегович,

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Подписано в печать 26.01.03 . Формат 60Х90 1/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Гарнитура Times.
Усл.печ.л. 0,8.Уч.-изд. л. 0,7. Тираж 150 экз. План 2003г. Поз.

Редакционно - издательский отдел
Иркутского государственного университета