

В рамках второй задачи требуется получить аналитические решения уравнения теплопроводности для двух предельных случаев (стационарное распределение температуры и быстрое охлаждение без учета теплопереноса) и выполнить численное решение нестационарного уравнения теплопроводности с применением метода сеток. Затем необходимо сравнить аналитическое и численное решения с экспериментом, определить параметры теплопереноса путем согласования модельного и экспериментального поля температуры с выводом данных на экран ПК.

3.1. Теория явления

Как известно, в неравномерно нагретых телах вследствие явления теплопроводности возникают тепловые потоки $q = -l \nabla T$, направленные в область более низких значений температуры T . В случае длинного стержня $l \gg d$ (l и d - длина и диаметр стержня) можно не рассматривать изменение температуры поперек стержня, ограничившись изучением распределения $T(x)$ вдоль стержня. При этом необходимо учитывать теплоотвод с его поверхности потоками воздуха, возникающими вокруг нагретого стержня (естественная конвекция).

Уравнение теплопроводности

Одномерное уравнение теплопроводности при учете отвода тепла с боковой поверхности стержня имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - b(T - T_c) \quad (3.1)$$

где $a = l / cr$ - коэффициент температуропроводности; l, c, r - коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность металла, соответственно; b - коэффициент теплоотдачи с боковой поверхности стержня (определяемый конвекцией);

Для решения уравнения в частных производных вида (3.1) требуется учесть граничные условия на обоих концах рассматриваемого участка стержня ($l > x > 0$), которые можно записать в виде:

$$\text{при } x = 0 \quad T = T_0(t), \quad (3.2)$$

$$\text{при } x = l \quad T = T_c, \quad (3.3)$$

а также начальное условие (характеризующее первоначальное распределение температуры вдоль стержня):

$$\text{при } t = 0 \quad T = T_b(x). \quad (3.4)$$

При решении уравнения (3.1) удобно ввести новую переменную $U(x, t) = T(x, t) - T_c$, представляющую собой превышение температуры в данной точке x в момент времени t над температурой воздуха T_c .

Тогда равенства (3.1) - (3.4) принимают вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - bU, \quad (3.5)$$

$$\text{при } x = 0 \quad U = U_0(t), \quad (3.6)$$

$$\text{при } x = l \quad U = 0, \quad (3.7)$$

$$\text{при } t = 0 \quad U = U_b(x), \quad (3.8)$$

где $U_0 = T_0 - T_c$, $U_b = T_b - T_c$.

Если исследуется нагрев первоначально холодного стержня, то при $t=0$ следует принять $T_b = T_c$ и $U_b = 0$.

Аналитические решения

Уравнение (3.5) существенно упрощается и имеет простые аналитические решения в двух предельных случаях:

1. для стационарного состояния, когда приток тепла со стороны нагреваемого конца стержня точно скомпенсирован теплоотдачей через боковую поверхность и охлаждаемый конец,
2. для режима быстрого независимого остывания отдельных участков сильно нагретого стержня за счет конвективного теплоотвода через боковую поверхность, когда перенос тепла вдоль стержня посредством теплопроводности мал.

В первом случае имеем $\partial U / \partial t = 0$ и уравнение (3.5) становится обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - k^2 U = 0, \quad (3.9)$$

где $k^2 = b/a$. При его решении используются лишь граничные условия (3.6), (3.7) с $U_0 = \text{const}$, необходимые для поиска двух постоянных интегрирования.

Во втором случае можно приближенно принять $\partial^2 U / \partial x^2 = 0$ и из (3.5) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} + bU = 0, \quad (3.10)$$

при решении которого используется лишь начальное условие (3.8). Например, если вначале стержень был нагрет до установления в нем стационарного распределения температуры, а затем источник нагрева был отключен, то этот момент можно принять за начало отсчета времени $t = 0$ и положить в (3.8) $U_b = T_s - T_c$, где $T_s(x)$ - установившееся после нагрева стационарное значение температуры в рассматриваемой точке x .

Метод сеток для численного решения нестационарного уравнения теплопроводности

Для численного решения полного уравнение (3.5) воспользуемся методом сеток: разобьём отрезок $l > x > 0$ на N равных частей (где $N = l/h$, h -шаг по координате), а изменение температуры будем вычислять через одинаковые интервалы времени t (т.е. t - временной шаг).

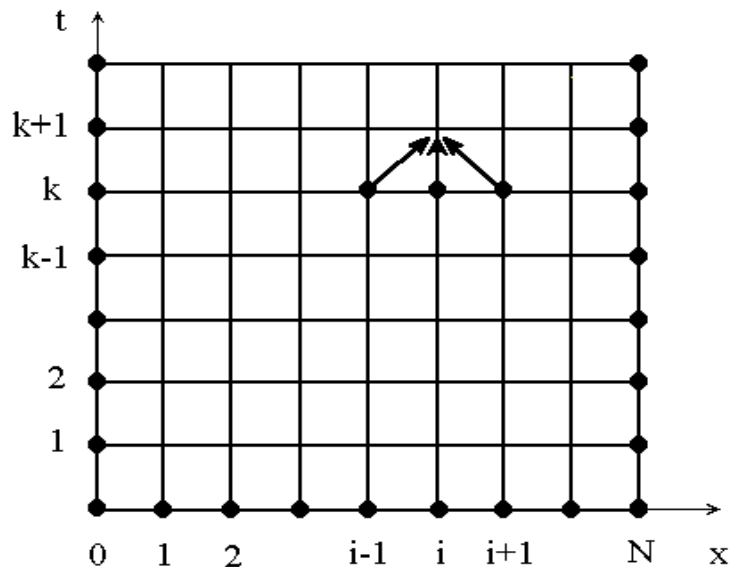


Рис.3.1. Узлы сетки в плоскости время-координата.

Тогда область поиска решения, как видно из рис.3.1, будет представлять собой сетку с узлами, соответствующими дискретным значениям координаты $x = ih$ ($i=0,1,2,\dots,N$) и времени $t = kt$ ($k=0,1,2,\dots$).

Значение переменной $U(x,t)$ в узле i, k будем обозначать как $U_{i,k}$. Производную по времени в точке $x = ih$ для момента $t = kt$ заменим разностью

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i,k} = \frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{t} = 0. \quad (3.11)$$

Для аппроксимации значения второй производной в узле i,k найдем сначала первые производные в середине между двумя узлами, т.е.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i-1/2,k} = \frac{U_{i,k} - U_{i-1,k}}{h}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i+1/2,k} = \frac{U_{i+1,k} - U_{i,k}}{h}. \quad (3.12)$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,k} = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i+1/2,k} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i-1/2,k}}{h} = \frac{U_{i+1,k} + U_{i-1,k} - 2U_{i,k}}{h^2}. \quad (3.13)$$

Подставляя значения производных, определённых равенствами (3.11), (3.13), в уравнение (3.5), получаем:

$$U_{i,k+1} = (1 + bt)U_{i,k} + \frac{at}{h^2}(U_{i+1,k} + U_{i-1,k} - 2U_{i,k}). \quad (3.14)$$

Соотношение (3.14) позволяет находить значения температуры на следующем временном слое $k + 1$ (т.е. в момент $t + t$, где $t = kt$, если известны её значения на предыдущем слое k (т.е. в момент $t = kt$). Поэтому для решения задачи требуется начальное условие, т.е. значение температуры при $t = 0$ ($k = 0$) для всех $N > i > 0$. Тогда, полагая в (3.14) $k = 0$ и пользуясь заданными начальными значениями $U_{i,0}$, находим $U_{i,1}$. Затем, зная эти значения и полагая в (3.14) $k = 1$, получаем $U_{i,2}$ и т.д.

Из соотношения (3.14) и рис.3.1 также видно, что для расчёта температуры в i -ом узле в $(k + 1)$ -ый момент требуется знать в k -ый момент температуру не только в i -ом узле, но и в двух соседних. Отсюда легко заметить, что температура в узлах $x = 0$ и $x = l = Nh$ не может быть вычислена, (эти узлы не имеют "соседа" слева или справа) а должна быть задана для

всех моментов времени t (при всех $k > 0$). Этот факт наглядно демонстрирует необходимость задания двух граничных условий (3.6),(3.7) для решения уравнение (3.5).

Подобная простейшая схема вычислений, в которой значения решения в каждом последующем временном слое определяются непосредственно через значения в предыдущем слое, называется *явной*. Ее существенным недостатком является возможная *неустойчивость решения*, т.е. рост ошибок округления результата при переходе с одного временного слоя на следующий. В итоге такие нарастающие ошибки начинает превалировать над самим решением, что приводит к осцилляциям получаемых значений, теперь ничего общего с истинным решением не имеющими. Как показывают теоретические оценки, чтобы избежать этого эффекта, временной и пространственный шаги τ и h необходимо выбирать не произвольным образом, а согласно соотношению

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a},$$

обеспечивающему устойчивость данной вычислительной схемы. Из этого соотношения видно, что при уменьшении шага по координате шаг по времени τ надо уменьшать более значительно. Этим явная схема неудобна, так как требует использования слишком большого числа временных слоев.

3.2. Лабораторная установка

При выполнении данной лабораторной работы используется установка, схема которой приведена на рис.3.2. Конструктивно она состоит из трех блоков: а) бокса со стержнем, нагревателем, термопарами, предварительными усилителями и источником питания для них; б) интерфейсной платы с аналогово-цифровым преобразователем, расположенной внутри компьютера; в) персонального компьютера. С помощью нагревателя 2 поддерживается высокая температура одного из концов стержня 1. Второй конец стержня прикреплен к радиатору и его температура близка к комнатной. Распределение температуры по длине стержня исследуется при помощи пяти датчиков (термопар) 3, расположенных на определенном расстоянии друг от друга, причем положение первой термопары (у нагревателя) принято за точку отсчета, а последующие расположены от нее на расстоянии 5, 10, 30 и 100 мм. Длина стержня, выполненного из латуни,

составляет 300 мм. В работе используются хромель-алюмелевые термопары (хромель - 90% Cr, 10% Ni; алюмель - 95% Ni, остальное- Al, Si, Mn), обладающие хорошей линейностью в области температур 0-400°C, и достаточно высокой термо-ЭДС, порядка 0.04 мВ на 1°C. Сигналы с выходов термопар поступают на входы предварительных усилителей 4, которые прокалиброваны так, что шаг квантования АЦП соответствует 4.5°C. Далее по сигнальным линиям они приходят на входы мультиплексора 5, задачей которого является коммутация определенного входа с единственным выходом. Номер входа, подключенного в данный момент к выходу мультиплексора, зависит от адреса S3, поступающего от ПК. С выхода мультиплексора выбранный сигнал поступает через согласующий усилитель 6 на вход аналогово-цифрового преобразователя (АЦП) 7, а с его выхода – в компьютер 8.

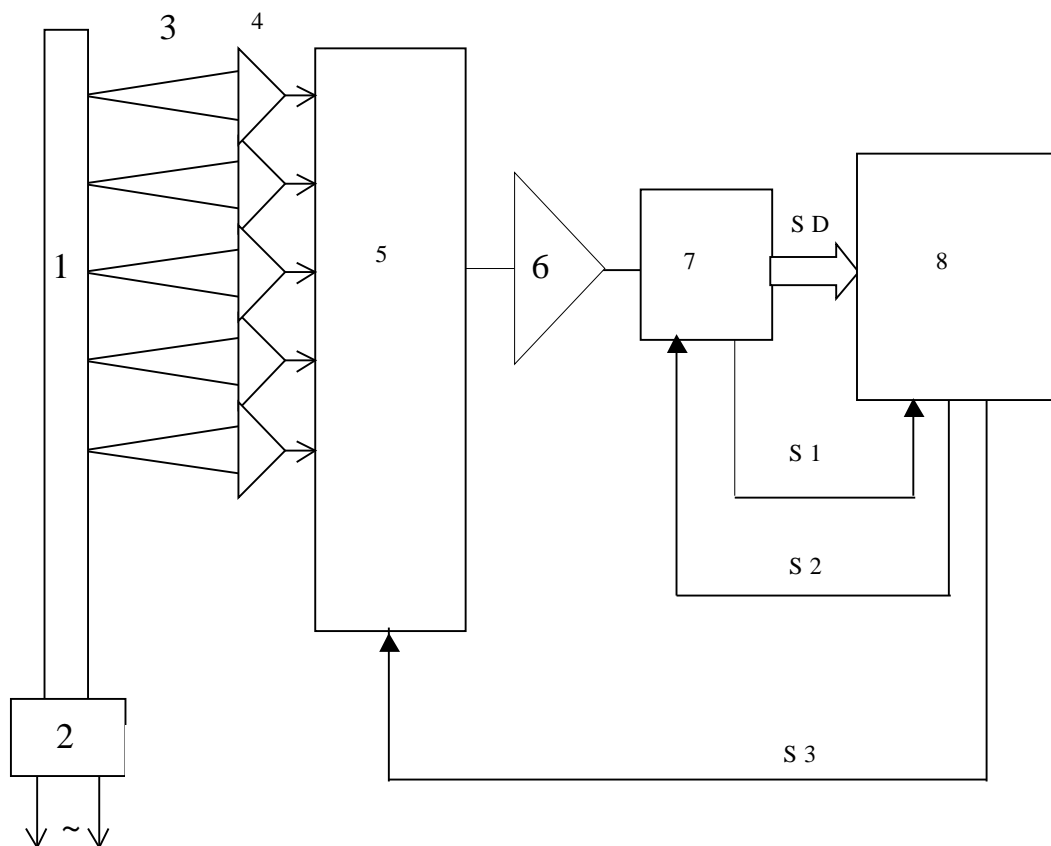


Рис.3.2. Структурная схема лабораторной установки: 1– стержень; 2– нагреватель; 3– датчики температуры– термопары; 4– предварительные усилители; 5– мультиплексор аналоговых сигналов; 6– согласующий усилитель; 7– АЦП; 8– ПК; S1– сигнал «Готовность» АЦП; S2– сигнал «Запуск» АЦП; S3– адрес активного канала; SD– шина данных.

Обмен сигналами управления и данными между ЭВМ и интерфейсной платой осуществляется при помощи портов ввода-вывода компьютера (см. раздел 1.2.). В адресном пространстве ввода-вывода компьютера интерфейсная плата резервирует адреса 1000 – 1003 .

В табл.3.1 приводится список используемых портов. Для работы с ними здесь, как и прежде, нужно воспользоваться процедурами **inport(adress,data)** и **outport(adress,data)**, из модуля **ports**.

Таблица 3.1

Адрес порта	Направление передачи	Назначение порта
1000	Считывание	Содержит младший байт данных (8 бит) АЦП
1001	Считывание	Содержит старшие два бита данных АЦП и сигнал готовности
1002	Считывание	При операции считывания запускает АЦП, информации не содержит
1003	Запись	Хранит 3 бита адреса активного канала

Программирование интерфейса

Рассмотрим подробнее организацию взаимодействия с интерфейсом при помощи портов ввода-вывода. Последовательность действий, необходимых для получения цифровых кодов преобразованного входного аналогового напряжения со всех пяти каналов, состоит в следующем:

1. Сделайте активным канал под номером 1, из которого будет производиться считывание; Для этого записать в порт по адресу 1003 число 0 согласно процедуре

outport(1003,0{1..4})

Для активизации любого другого канала по этому адресу записывается соответствующее число от 1 до 4. Установленный канал остаётся активным до последующего изменения содержимого этого порта.

2. Запустить АЦП на преобразование. Для этого следует произвести операцию считывания из порта с адресом 1002, т.е. достаточно в любую переменную с типом **byte**, например **z**, считать значение данного порта:

inport(1002,z).

3. Организовать цикл ожидания готовности, для чего необходим анализ сигнала «Готовность». Отметим, что в данной ИВС используется десятиразрядный АЦП, тогда как регистры, адресуемые портами, являются восьмиразрядными (однобайтовыми). Поэтому для записи выходного сигнала АЦП необходимо использовать два регистра адресуемые портами 1 и 2 (см табл.3.1). Содержимое этих регистров представляет собой разделенное на два байта 16-ти разрядное слово состояния интерфейса.

Значения отдельных битов этого слова иллюстрирует табл.3.2, из которой видно, что значение сигнала готовности (бит Г –“Готовность”) находится во втором разряде старшего байта этого слова, биты D0-D9 содержат данные, получаемые с выхода АЦП, а остальные биты не используются. При этом D0-D7 находятся в регистре, адресуемом по адресу 1000 (порт 1); D8, D9, Г – в регистре по адресу 1001 (порт 2).

Таблица 3.2

Порт 1001						Порт 1000									
1	1	1	1	1	Г	D9	D8	D7	D6	D5	D4	D3	D2	D1	D0
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Для того, чтобы выделить бит готовности, используется стандартная операция-«**and**» (побитовое умножение). Для этого необходимо произвести операцию побитового умножения содержимого регистра (порт 1001) и двоичного числа 00000100 (так называемое «наложение маски»). В десятичной записи это будет число $2^2 = 4$. Алгоритм выделения сигнала «Готовность» имеет следующий вид:

```
inport(1001,datah);  
ready:=(datah and 4);
```

Значение переменной **ready** будет равно 0, если АЦП готов к считыванию и равно 4 – если не готов. Для корректного считывания данных цикл ожидания готовности следует организовать следующим образом:

```
repeat  
inport(1001,datah);  
until (datah and 4)<>0;.
```

4. Чтобы получить выходные данные АЦП, необходимо из слова состояния интерфейса выделить десятибитный выходной код (слово данных). Для его формирования необходимо выделить младшие два бита из байта порта 2, сдвинуть их на 8 бит влево (умножить на 256) и прибавить к

полученному результату значение младшего байта порта 1. Чтобы выделить два младших бита из порта 2, необходимо наложить маску по «**and**», равную 3, на значение порта 2:

```
inport(1001,datah);  
datah:=(datah and 3);
```

Затем нужно считать значение порта 1 в некоторую переменную **datal**:

```
inport(1000,datal);
```

Для получения полного выходного кода АЦП переменной **data** следует присвоить следующее значение:

```
data:=256*datah+datal;
```

В итоге мы получили десятиразрядное двоичное число, пропорциональное амплитуде входного аналогового сигнала.

5. Для получения сигналов всех термопар необходимо повторить шаги 1-4 для каналов № 2..5.

Фрагмент программы для работы с АЦП приведен ниже. Программа заполняет массив **CHDATA[]** из пяти элементов целыми числами – значениями величин, считанных из соответствующих каналов.

{ переменные должны быть описаны в разделе описания процедуры, в которой используется этот фрагмент программного кода:

```
n,data : integer;  
datah,datal, z : byte;  
sm : array [1..5] of integer;  
chdata : array [1..5] of integer;}
```

```
.....  
sm[1]:=-41;  
sm[2]:=-46;  
sm[3]:=-47;  
sm[4]:=-48;  
sm[5]:=-49;  
for n:=1 to 5 do  
begin  
    outport(1003,n-1);{ установка номера канала}  
    outport(1003,n-1);  
    outport(1003,n-1);  
    inport(1002,z);{запуск АЦП}  
end
```

```

repeat    {цикл ожидания готовности}
  inport(1001,datah);
until (datah and 4)=0;
inport(1001,datah);{старший байт данных}
inport(1000,datal);{младший байт данных}
datah:=datah and 3;
data:= 256*datah + datal + sm[n];{полный выходной код АЦП}
chdata[n]:=data;
end;
.....

```

В строке, где формируется полный выходной код АЦП (**data:=...**), присутствует слагаемое – элемент массива - **sm[n]**, которое введено для компенсации постоянного смещения на выходе каждого из каналов, обусловленного входными усилителями. Все пять каналов имеют разные смещения, которые нужно учитывать при считывании. Значения отдельных смещений для каждого из каналов приводятся ниже, в табл.3.3.

Таблица 3.3

Номер канала, n	Код смещения, sm[n]
1	-41
2	-46
3	-47
4	-48
5	-49

Номера каналов указаны по мере удаления от нагревателя.

При написании программы необходимо учитывать, что в ходе лабораторной работы потребуется построить графики изменения температуры в течение всего процесса нагрева и остывания стержня, который продолжается около 30 минут. Поэтому отсчёты со всех пяти каналов необходимо производить с некоторой задержкой, подбираемой экспериментально. Кроме того, для улучшения шумовых характеристик считываемых данных, каждый отсчет необходимо сделать сто раз, а затем взять среднее из этих значений.

3.3. Задания

1. Рассмотрите процесс нагрева и охлаждения стержня и из физических соображений нарисуйте качественный график зависимости от времени температуры стержня в данной точке.
2. Составьте программу для ПК, обеспечивающую опрос одного из каналов ввода сигнала и примените созданную программу для измерения температуры T_c стержня при отсутствии нагрева. Результаты ряда последовательных измерений (т.е. опросов канала) отобразите на экране как функцию времени (т.е. функцию номера опроса). Определите среднюю температуру T_c по набору из 1000 измерений. Найдите среднеквадратичную погрешность измерения.
3. Составьте программу для последовательного опроса всех пяти каналов. Для уменьшения погрешности измерения предусмотрите усреднение каждого фиксируемого значения по результатам 100 опросов.
4. Проведите измерения температуры в пяти точках металлического стержня в различные моменты после включения источника нагрева вплоть до выхода температуры на стационарные значения. Результаты измерений выведите на экран ПК и запишите в файл данных.
5. Проведите измерения температуры в пяти точках металлического стержня в различные моменты после выключения источника нагрева (режим остывания). Результаты измерений выведите на экран ПК и запишите в файл данных.
6. Получите аналитическое решение уравнения теплопроводности для стационарного случая. Сравнивая (на экране ПК) стационарное решение с экспериментально полученным распределением температуры вдоль стержня, определите (методом подбора) отношение коэффициентов теплопроводности и теплоотдачи a/b .
7. Получите аналитическое решение для быстрого охлаждения без учета теплопроводности. Сравните его с экспериментальной зависимостью температуры от времени (в фиксированной точке стержня) в режиме охлаждения и определите коэффициент b .

8. Примените метод сеток для численного решения полного уравнения теплопроводности. В качестве начального условия взять $T(x,0) = T_c = \text{const}$; в качестве первого граничного условия - $T(0,t)$ взять временную зависимость температуры первого датчика $T_0(t)$, определенную экспериментально; в качестве второго граничного условия - $T(l,t) = T_c$. Определите параметры теплопереноса a и b путем согласования модельного и экспериментального поля $T(x,t)$.

4. Дифракционные явления

В работе изучается картина дифракции монохроматического светового потока на линейном объекте (проволочке или щели). Исследование проводится сначала экспериментально с помощью ИВС, позволяющей управлять процессом измерения и обрабатывать его результаты. На этом этапе студенту необходимо написать программу, обеспечивающую выполнение следующих операций: сканирование дифракционной картины посредством поворотного зеркала, управляемого шаговым двигателем; регистрацию сигнала фотодатчика с регулируемой чувствительностью; преобразование сигнала в цифровую форму с помощью многоканального АЦП; первичную обработку информации для улучшения соотношения сигнал-шум; запись информации в файл. Перечисленные задачи входят в