5. Моделирование случайных процессов

5.1. Случайные процессы и величины

В главе 3 было показано, что координаты и скорости физических объектов, движущихся под действием заданных сил, однозначно определяются для любого будущего момента времени, если заданы их начальные значения (т.е. начальные условия для уравнений движения). Подобные процессы называют детерминированными. В настоящем разделе будут рассматриваться процессы, для которых изменение во времени некоторой величины не является однозначной функцией начальных условий, а может быть различным в зависимости от случайного стечения обстоятельств (неконтролируемых физических факторов). Такие процессы называют случайными или вероятностными, так как можно указать лишь вероятности перехода системы (или единичного объекта) из данного состояния в одно из других возможных состояний.

Величина, принимающая в зависимости от случая некоторые значения из возможного интервала (набора) значений, называется случайной величиной (СВ).

Если СВ может принимать только *одно из дискретных значений* $x_1, x_2, ..., x_n$ с соответствующими им вероятностями $P_1, P_2, ..., P_n$, то такая СВ называется дискретной. Таким образом дискретная случайная величина определяется заданием полного набора (дискретного множества) ее возможных значений и набора соответствующих вероятностей.

Если СВ может принимать *любое значение* из некоторого интервала (a,b), то она называется непрерывной. Непрерывная случайная величина определяется заданием интервала (a,b), содержащего все возможные значения этой величины, и функции $p(x)$, называемой плотностью вероятности. В случае непрерывной СВ можно говорить лишь о вероятности ее реализации в пределах некоторого конечного интервала $x_2 \geq x \geq x_1$ (где $x_1 \geq a,\ x_2 \leq b$) внутри полного интервала возможных значений (a,b). Такая вероятность определяется равенством

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx. \qquad (5.1)$$

В случае достаточно узкого интервала (например, $x_1 = x$, $x_2 = x + \Delta x$, где $\Delta x << x$) имеем

$$P(x, x+\Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} p(x)dx \approx p(x)\Delta x, \qquad (5.2)$$

откуда видно, что плотность вероятности есть отношение вероятности реализации СВ в интервале от x до $x+\Delta x$ к длине данного интервала, т.е. $p(x) = P(x, x+\Delta x)/\Delta x$, когда $\Delta x \to 0$.

5.2. Краткие сведения из теории вероятностей

5.2.1. Закон сложения вероятностей

Если два каких-либо события (т.е. реализация возможных значений СВ) не могут произойти совместно, то вероятность наступления любого из них равна сумме вероятностей этих отдельных событий.

Для дискретных СВ имеем

$$P_{k \text{ или } m} = P_k + P_m, \qquad (5.3)$$

а для непрерывных СВ (с учетом (5.1))

$$P(x_1, x_2 \text{ или } x_3, x_4) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} p(x)dx \qquad (5.4)$$

Если при этом $x_2 = x_3$, то

$$P(x_1, x_4) = \int_{x_1}^{x_4} p(x)dx.$$

Из (5.3), (5.4) в частности следует, что вероятность наступления хотя бы одного из всех возможных событий равна единице, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = 1, \qquad \int_{a}^{b} p(x)dx. \qquad (5.5)$$

5.2.2. Закон умножения вероятностей

Если два каких-либо события являются независимыми, то вероятность последовательного наступления одного из них, а затем второго равна произведению вероятностей событий.
Для дискретных СВ

$$P_{k\text{ и }m} = P_k \cdot P_m, \tag{5.6}$$

а для непрерывных СВ

$$P(x_1, x_2 \text{ и } x_3, x_4) = P(x_1, x_2) \cdot P(x_3, x_4) \tag{5.7}$$

В частности, если $x_2 = x_1 + \Delta x$ и $x_4 = x_3 + \Delta x$ (где $\Delta x = \text{const}$ - размер достаточно узкого интервала значений СВ), то из (5.2), (5.7) имеем

$$P(x_1, x_1 + \Delta x \text{ и } x_3, x_3 + \Delta x) = p(x_1)p(x_3)(\Delta x)^2. \tag{5.8}$$

5.2.3. Математическое ожидание СВ

Зная полный набор вероятностей дискретной СВ или плотность вероятности непрерывной СВ, можно вычислить математическое ожидание СВ:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i, \qquad \bar{x} = \int_a^b x\, p(x)dx. \tag{5.9}$$

Легко заметить, что математическое ожидание представляет собой среднее значение СВ, так как более вероятные значения x входят в сумму (или в интеграл) с большими весами.

5.2.4. Равномерно распределенная СВ

Если плотность вероятности случайной величины x во всем интервале ее реализации $b \ge x \ge a$ оказывается постоянной ($p(x) = \text{const}$), то такую величину называют *равномерно распределенной*. Используя условие (5.5), легко находим $p = 1/(b-a)$.

Если СВ является равномерно распределенной в интервале от 0 до 1 (т.е. имеет место частный случай $a = 0,\ b = 1$) , то ее называют *стандарт-*

ной случайной величиной (ССВ), которую далее будем обозначать как R. Очевидно, что плотность вероятности ССВ равна $p=1$, а интервал возможных значений - от 0 до 1.

Программа, дающая с равной вероятностью случайные значения из некоторого интервала (a, b), называется *генератором случайных чисел*. Например, выражение **R := Random** в программе, написанной на Delphi, будет присваивать величине **R** произвольные значения из интервала (0, 1), т.е. будет давать случайные реализации ССВ.

5.2.5. Розыгрыш произвольной случайной величины

Процесс получения случайной реализации (случайного значения s) некоторой СВ x путем преобразования ССВ R называется *розыгрышем* случайной величины. Если непрерывная СВ x может принимать значения в пределах интервала (a, b) и характеризуется плотностью вероятности $p(x)$, то формула для такого преобразования (формула розыгрыша) имеет вид

$$P(s)=\int_a^s p(x)dx=R. \tag{5.10}$$

Величина $P(s)$ представляет собой вероятность получения случайного числа, меньшего или равного s. Данный метод розыгрыша можно пояснить следующим образом. Так как наименьшее значение x равно a, а наибольшее - b, то при изменении в этих пределах значения s интеграл (9) меняется от 0 до 1. Но такой диапазон как раз соответствует пределам изменения ССВ R. Поэтому, получая с помощью генератора случайных чисел различные значения R, можно вычислять неизвестные значения s с помощью обращения выражения (5.10)

$$s=P^{-1}(R).$$

Вычисленные таким образом значения s будут охватывать весь интервал (a, b) при изменении R лишь в интервале (0 ,1).

Рассмотрим в качестве примера розыгрыш равномерно распределенной в интервале (a, b) случайной величины x, для которой $p(x)=0$ при $x<a$ или $x>b$ и $p=1/(b-a)$ при $b \ge x \ge a$. Подставляя данное значение $p(x)$ в формулу (5.5), имеем $(s-a)p=R$, откуда с учетом величины p получаем:

$$s = a + (b - a)R. \qquad (5.11)$$

Хотя ССВ R принимает значения лишь в пределах от 0 до 1, случайные реализации s, как видно из (5.11), лежат в интервале от a до b.

5.3. Определение площади по методу Монте-Карло

Иногда случайный по своей природе процесс можно использовать для определения вполне детерминированной величины. Классическим примером является определение площади сложной фигуры по методу Монте-Карло. Предположим, что внутри прямоугольника площадью S_0 изображена произвольная фигура, площадь S которой требуется определить. Если бы удалось организовать произвольную стрельбу из винтовки по этому прямоугольнику таким образом, чтобы вероятность попадания в любую его точку была одинаковой, то отношение площадей было бы приблизительно равно отношению числа попаданий M в фигуру к полному числу выстрелов N, т.е. $S/S_0 \approx M/N$. Очевидно, что точность данного соотношения будет возрастать с увеличением N. Тогда неизвестная площадь может быть найдена как $S \approx S_0 M/N$. Подобный процесс легко организовать на ПК, изобразив на экране прямоугольник (с координатами x_1, y_1 левого верхнего и x_2, y_2 - правого нижнего углов) и расположенную внутри него произвольную фигуру. Затем можно начать «стрельбу», многократно разыгрывая координаты «пули» x и y (которые будем считать равномерно распределенными величинами) по соотношению (5.11). Следы от «пуль» можно также изображать на экране. Затем остается подсчитать число попаданий M в фигуру и, зная число испытаний (выстрелов) N, найти площадь фигуры, учитывая, что $S_0 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$.

Задания

1. "Высыпание зерна". Исследовать процесс накопления зерен вдоль некоторой линии $1 > x > -1$, считая, что плотность вероятности $p(x)$ попадания отдельного зерна на эту линию зависит от x следующим образом:

$$\begin{aligned}
&p(x) = 1 + x && \text{при } 0 > x > -1\\
&p(x) = 1 - x && \text{при } 1 > x > 0\\
&p(x) = 0 && \text{при } |x| > 1
\end{aligned}$$

Используя данную плотность вероятности $p(x)$, получить вначале (аналитически!) по формуле розыгрыша (5.10) соотношение, связывающее случайное значение координаты s со стандартной случайной величиной R. Далее разыграть N раз (N=10-1000) в программе значение R и при полученных случайных значениях координаты s изображать «упавшие зерна» кружками (добавляя их по вертикали в случае появления одинаковых значений s, т.е. при повторных падениях «зерен» в ту же точку).

2. Найти площадь круга по методу Монте-Карло, проверяя попадание внутрь круга путем использования уравнения окружности. Исследовать зависимость точности определения площади от числа испытаний ("выстрелов").

3. Найти площадь равностороннего треугольника по методу Монте-Карло, проверяя попадание внутрь треугольника путем анализа цвета фигуры. Исследовать зависимость точности определения площади от числа испытаний ("выстрелов").

5.4. Случайные столкновения

В качестве примера случайного процесса рассмотрим движение частицы в среде из случайно расположенных препятствий. Подобный процесс имеет место при движении отдельной молекулы среди других молекул газа, при движении электронов в газоразрядных приборах, при прохождении нейтронов через вещество и во многих других случаях, изучаемых методами статистической физики.

Так как препятствия (с площадью перекрытия σ, называемой эффективным сечением столкновения) распределены в пространстве случайным образом, то длина свободного пробега частицы l (т.е. отрезок траектории, проходимый без столкновений) будет непрерывной случайной величиной, принимающей любые положительные значения из интервала $(0, \infty)$. Конечно, вероятность пройти бесконечно большое расстояние (или, хотя бы расстояние в 1 м), ни разу не столкнувшись, для молекулы азота (или кислорода) в окружающем нас воздухе очень мала, но она все же отлична от нуля.

Так как длина свободного пробега является непрерывной СВ, то можно говорить лишь о вероятности реализации значения длины в пределах некоторого интервала. Определим $dP = p(x)dx$ как вероятность того, что значение длины пробега лежит в пределах от x до $x + dx$, где $dx << x$, а $p(x)$ есть соответствующая плотность вероятности. Данное событие можно рассматривать как последовательность двух независимых случайных событий:

1) вначале частица проходит без столкновений расстояние x;

2) затем она сталкивается с препятствием в пределах малого отрезка dx (см. рис.5.1).

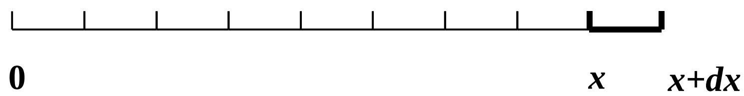

Рис. 5.1

Очевидно, что в силу закона умножения вероятностей (5.6) вероятность данного сложного события будет равна

$$dP = p(x)dx = P_1(x) \cdot dP_2, \qquad (5.12)$$

где $P_1(x)$- вероятность прохождения без столкновений расстояния x, а dP_2 - вероятность столкновения частицы с препятствием при прохождении слоя толщиной dx.

Вычислим вначале вероятность dP_2 для среды с количеством препятствий N в единице объема (например, в случае воздуха у поверхности земли $N \approx 2 \cdot 10^{25}$ молекул/м^3). Для этого возьмем цилиндр длиной dx (см. рис.5.2) и будем считать, что в произвольной точке его основания (площадью S) в слой входит частица. Тогда вероятность столкновения будет равна отношению площади, перекрытой препятствиями, к площади основания, т.е. $dP_2 = S_\sigma / S$. Число препятствий в цилиндре объемом $V = S dx$ будет равно NV, так что перекрытая ими площадь составит $S_\sigma = \sigma N S dx$(толщину dx следует взять достаточно малой, чтобы препятствия не перекрывали друг друга!). В итоге получаем $dP_2 = dx/\lambda$, где введено обозначение $\lambda = 1/\sigma N$. Вероятность пройти данный слой *не сталкиваясь* будет очевидно равна $dP_1 = 1 - dx/\lambda$, так как в силу закона сложения вероятностей (5.5) $dP_1 + dP_2 = 1$ (частица или столкнется, или не столкнется).

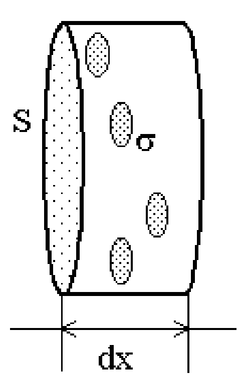

Рис. 5.2

Если разделить отрезок x на $n = x/dx$ частей, то прохождение без столкновений расстояния x можно рассматривать как сложное событие, сводящееся к последовательному наступлению n независимых случайных событий (прохождения без столкновения последовательности отрезков dx), каждое из которых характеризуется вероятностью dP_1. Тогда в силу закона умножения вероятностей получаем:

$$P_1(x) = (dP_1)^n = (1 - dx/\lambda)^n .$$

Логарифмируя это соотношение, имеем

$$\ln(P_1) = n \cdot \ln(1 - dx/\lambda)$$

Учитывая, что при $|a| << 1$ $\ln(1+a) \approx a$ и подставляя значение n, находим $\ln(P_1) = -x/\lambda$, откуда имеем $P_1(x) = \exp(-x/\lambda)$. Подставляем значения P_1 и dP_2 в (5.12), находим:

$$dP = pdx = \exp(-x/\lambda)dx/\lambda \qquad (5.13)$$

Используя найденное значение плотности вероятности $p(x)$ и подставляя его в соотношение (5.9), можно найти среднее значение длины свободного пробега, которое оказывается равным $\bar{x} = \lambda$. В случае воздуха $\sigma \approx 10^{-19}$ м^2 и $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$ м при нормальном давлении.

Случайные реализации длины пробега можно получать путем розыгрыша величины x, т.е. с помощью формулы (5.10). Подставляя в нее значение плотности вероятности (5.13), после выполнения интегрирования получаем:

$$s = -\lambda \ln(1 - R). \qquad (5.14)$$

Из соотношения (5.14) видно, что при изменении стандартной случайной величины R от 0 до 1 случайные реализации длины пробега меняются в диапазоне от нуля до бесконечности, а при R=1/2 имеем $s = \lambda \ln 2 \approx 0{,}7\lambda$.

Задания

Примечание. В следующих заданиях построение траектории движения частицы проводить по алгоритмам, изложенным в главе 3.

4. Вычислить и изобразить траекторию частицы при наличии случайных столкновений, приводящих к изменению направления движения частицы на произвольный угол (в интервале от 0 до 2π) без изменения модуля скорости. Силовые поля отсутствуют. Средняя длина пробега равна λ. Розыгрыш длины пробега проводить согласно формуле (5.14).

5. Вычислить траекторию частицы согласно предыдущему заданию, но в отличие от него проверять возможность случайного столкновения на каждом шаге по времени, учитывая, что вероятность столкновения на расстоянии $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ равна $dP_2 = dl/\lambda$. Построить гистограмму распределения числа столкновений по соответствующим длинам пробега. Сравнить полученную зависимость $\Delta N/\Delta l$ с формулой (5.13).

6. Промоделировать "расплывание" сгустка одного сорта частиц вследствие диффузии в газе частиц другого сорта. Для этого рассмотреть движение N частиц, стартующих одновременно с одинаковыми скоростями из начала координат и испытывающих случайные столкновения. Столкновения приводят к изменению направления движения частицы на произвольный угол (в интервале от 0 до 2π) без изменения модуля скорости. Силовые поля отсутствуют. Средняя длина пробега равна λ. Построить зависимость от времени среднего квадрата расстояния частиц от точки старта $< R^2 >$. Убедиться в том, что при достаточно большом числе частиц зависимость $< R^2 >$ от t имеет линейный характер в соответствии с законом диффузии.

7. Построить для задания 6 гистограмму распределения числа частиц по расстоянию от точки старта для каждого момента времени. Показать, что "расплывание" сгустка описывается двумерным распределением Гаусса вида $\Delta N \propto R \cdot \exp\left(-R^2/2 < R >^2\right)$.

8. Прохождение нейтронов сквозь пластинку.

На однородную бесконечную пластинку толщиной d вдоль оси X падает поток нейтронов. При столкновении с атомом вещества с вероятностью P_1 нейтрон поглощается, а с вероятностью $P_2 = 1 - P_1$ упруго рассеивается, причем все направления движения нейтрона после рассеяния равновероятны. Средняя длина свободного пробега равна λ. Промоделировав траектории движения N =100 нейтронов, определить, сколько нейтронов N_1 поглотилось в пластинке, сколько нейтронов N_2 отразилось от пластинки и сколько нейтронов N_3 прошло сквозь пластинку. Меняя отношение λ/d от 0,1 до 10, выяснить его влияние на значения N_1, N_2, N_3.

Указание: Считать, что ось X перпендикулярна к пластинке, а движение и рассеяние нейтронов происходят в плоскостях XOY. Если поверхность, на которую падают нейтроны, расположить при x= 0, а вторую поверхность при $x=d$, то условием прохождения будет $x>d$, а условием отражения - $x<0$.

5.5. Движение частиц в силовом поле при наличии столкновений

При рассмотрении движения некоторой выделенной частицы в газе (или плазме) с хорошей точностью можно считать, что траектория частицы состоит из набора участков, соответствующих регулярному (детерминированному) движению по инерции или под действием внешних сил, и точек столкновения, где происходит мгновенное случайное изменение направления скорости частицы без изменения ее координат.

Для расчета траектории частицы в условиях данной идеализации (мгновенные точечные столкновения) можно использовать алгоритм, состоящий из следующих этапов:

1. Задание начальных координат (x, y, z) и скоростей (v_x, v_y, v_z) частицы.
2. Розыгрыш будущей длины свободного пробега s согласно соотношению (5.14).
3. Расчет регулярной траектории частицы путем численного интегрирования уравнений движения (см. главу 3).
4. Подсчет длины пройденного участка траектории

$$l = \sum_{k=1} dl_k$$

   на каждом шаге интегрирования уравнений движения. Здесь $dl = \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)^{1/2}$, dx, dy, dz - изменения координат частицы на данном временном шаге.
5. Сопоставление пройденного пути l с полученной выше случайной длиной пробега s: а) в случае $l < s$ расчет траектории продолжается, б) в случае $l \geq s$ считается, что произошло столкновение, и осуществляется переход к следующему этапу.
6. Розыгрыш угла рассеяния и вычисление новых значений компонент скорости частицы (в случае упругих столкновений модуль скорости частицы $v = \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)^{1/2}$ не меняется, а происходит лишь перераспределение скоростей v_x, v_y, v_z).

Шаги 2-6 повторяются после каждого столкновения.

В качестве примера рассмотрим расчет траектории движения частицы в постоянном гравитационном поле (направленном вдоль оси Y) при наличии столкновений. Для упрощения задачи будем считать, что траектория частицы лежит в плоскости XOY и остается в ней даже после столкновения. В этом случае достаточно разыграть угол между направлениями скорости до столкновения и после него. Если рассеяние является упругим и изотропным, то угол будет равномерно распределенной случайной величиной в интервале от 0 до 2π. Поэтому компоненты скоростей частицы после столкновения можно определить через модуль скорости (который не меняется) и случайное значение угла f между новым направлением скорости и осью X. Согласно формуле (5.11) случайные реализации угла определяются как $f = 2\pi R$, где R-стандартная СВ. В данной постановке отрезки траектории между столкновениями будут определяться путем решения системы из трех уравнений

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \qquad \frac{dy}{dt} = v_y, \qquad \frac{dv_y}{dt} = g,$$

где g - ускорение силы тяжести. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
..........................................
              {начальные условия}
t:=0;
x:=0;
y:=0;
vx:=0;
vy:=0;
repeat
  s:=-ll*ln(1-Random);
  l:=0;           {розыгрыш длины пробега (ll-средняя длина)}
  repeat                       {расчет траектории}
    vy:=vy+g*H;
    dx:=vx*H;
    dy:=vy*H;
    dl:=sqrt(dx*dx+dy*dy);
     l:=l+dl;
     x:=x+dx;
     y:=y+dy;
```

```
    t:=t+H;
  until  l >= s;                    {условие столкновения}
  v:=sqrt(vx*vx+vy*vy);
  f:=2*pi*Random;                   {розыгрыш угла рассеяния}
  vx:=v*cos(f);
  vy:=v*sin(f);
until  t > t1;
…………………………………………….
```

Задания

6. Движение в электромагнитном поле при наличии столкновений (анизотропный закон Ома).

Имеется постоянное электрическое поле $E_x = \text{const}$, в которое при t=0 помещается 100 неподвижных частиц с координатами x=0 и y=0. При своем движении в электрическом поле частицы испытывают случайные столкновения, приводящие к изменению направления их движения и уменьшению модуля скорости V до значения k*V, где k=0-1 - случайное число. Проследить изменение во времени распределения частиц в пространстве, изображая их в виде перемещающихся кружков. Вывести на экран график зависимости $<V_x>$ от t, где $<V_x>$- среднее (по всем частицам) значение x-компоненты скорости. Исследовать влияние величины E_x и средней длины пробега λ на величину средней скорости.