

4. Моделирование векторных полей

Векторное поле - область пространства, в каждой точке которой можно определить вектор $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. К векторным полям относятся силовые поля (тогда вектор \mathbf{A} - это сила, действующая на пробное тело, помещенное в данную точку пространства); поля скоростей для жидкости (тогда \mathbf{A} - это скорость течения жидкости в данной точке) и т.д.

Моделирование векторных полей сводится к двум задачам:

1. Определение вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в каждой точке заданной области пространства. Эта задача зависит от характера векторного поля, определяется физикой происходящих в нем процессов и является предметом математической физики.
2. Наглядное изображение силового поля в виде карты линий поля или силовых линий, дающее представление о топологии поля. Наибольшей наглядностью при этом обладают двумерные поля или поля, обладающие аксиальной симметрией, для которых можно построить двумерные карты линий поля.

4.1. Силовые линии поля

Силовая линия или линия поля - это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором \mathbf{A} . Согласно этому определению, можно записать уравнения силовой линии (см. рис.4.1):

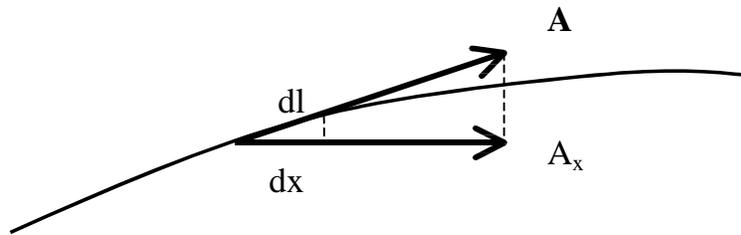


Рис. 4.1

$$dx/dl = A_x/|A|, \quad dy/dl = A_y/|A|, \quad dz/dl = A_z/|A|. \quad (4.1)$$

Если вектор \mathbf{A} в каждой точке выделенной области определен однозначно, то силовые линии нигде не пересекаются в этой области. Интерес представляют поля, для которых в рассматриваемой области выполняется условие:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \quad (4.2)$$

При условии (4.2), согласно формуле Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = 0$$

т.е. поток вектора \mathbf{A} через замкнутую поверхность S , ограничивающую некоторый объем V , равен нулю.

Возьмем произвольный замкнутый контур L и через каждую его точку проведем силовую линию. Получим так называемую силовую трубку. Возьмем кусок этой трубки, ограниченный с торцов поперечными сечениями S_1 и S_2 (см. рис. 4.2). Положительную нормаль к S определим в сторону вектора \mathbf{A} . Легко показать, что поток вектора \mathbf{A} в любом сечении силовой трубки один и тот же.

Если трубка бесконечно тонкая, а сечения S_1 и S_2 нормальны к \mathbf{A} ,

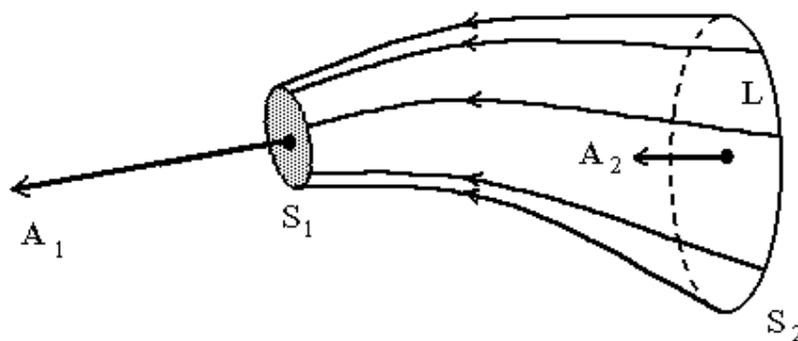


Рис. 4.2

то $A_1 S_1 = A_2 S_2$ или $A_1 / A_2 = S_1 / S_2$.

Таким образом, если поле увеличивается, то трубка сужается, т.е. силовые линии идут гуще. Необходимо отметить, что этот вывод справедлив только для картины бесконечно близких силовых линий. Поэтому любая реальная картина силовых линий дает только приблизительное представление о топологии векторного поля, тем более точное, чем большее число силовых линий на ней представлено.

Построение силовой линии сводится к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка (4.1) с заданными начальными условиями. В качестве начальных условий можно выбрать координаты некоторой точки пространства, которую в дальнейшем будем называть начальной (x_0, y_0, z_0) . Решением (4.1) является уравнение силовой линии:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Поскольку через любую точку пространства можно провести силовую линию, то выбор начальной точки (x_0, y_0, z_0) - произволен.

Карта силовых линий в некоторой области поля представляет собой семейство силовых линий с разными значениями $f(x_0, y_0, z_0)$. Чтобы эта карта адекватно изображала топологию поля, в частности, чтобы густота силовых линий соответствовала величине A , необходимо установить правило выбора начальных точек для разных силовых линий. Общего алгоритма здесь нет. Ниже будут приведены способы выбора начальных точек для полей, имеющих определенную симметрию.

4.1.1 Алгоритм построения силовой линии.

Численный алгоритм построения силовой линии выглядит следующим образом.

1. Задаются координаты начальной точки (x_0, y_0, z_0) .
2. С помощью физических законов, описывающих векторное поле, определяются значения A_x, A_y, A_z в этой точке.
3. Решая уравнения (4.1) для \mathbf{A} численными методами с заданным шагом, определяются координаты следующей точки силовой линии (x_1, y_1, z_1) .

Шаги 1-3 повторяются для точки с координатами (x_1, y_1, z_1) и вычисляется координаты следующей точки.

Начальная точка и вся силовая линия должны лежать внутри выделенной области пространства, где выполняется условие (4.2). Особые точки пространства, где расположены источники поля (электрические заряды для электрического поля, проводники с током для магнитного поля и т.д.) должны быть исключены из этой области пространства. Подробно эта процедура описана в следующих разделах пособия. Завершается построение силовой линии, когда она выходит за пределы выделенной области пространства.

Ниже приведен фрагмент программы построения силовой линии поля, в котором реализован алгоритм Эйлера решения системы дифференциальных уравнений (4.1). Точность алгоритма определяется величиной шага dl . В этом фрагменте вычисляются координаты каждой точки линии. "**Image(x,y,z)**" - имя процедуры, которая выводит в том или ином виде на экран силовую линию, "**Afield(x,y,z)**" - условное обозначение процедуры вычисления компонент и абсолютной величины вектора \mathbf{A} . Текст этой процедуры будет приведен ниже для конкретных силовых полей, рассматриваемых в пособии.

```

.....
{координаты начальной точки силовой линии x1,y1,z1 предвари-
  тельно подготавливаются по специальному алгоритму}
x:=x1;
y:=y1;
z:=z1;
repeat
  Image(x,y,z);
  Afield(x,y,z);
  dx:=dl*Ax/A;
  dy:=dl*Ay/A;
  dz:=dl*Az/A;
  x:=x+dx;
  y:=y+dy;
  z:=z+dz;
until ..... {условие конца силовой линии}
.....

```

(a1)

4.2. Силовые линии электрического поля.

Источником электрического поля являются заряженные тела. В качестве модельной задачи рассмотрим построение силовых линий поля системы точечных зарядов. Электрическое поле характеризуется вектором напряженности \mathbf{E} . Согласно уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (4.3)$$

где ρ - объемная плотность электрических зарядов в точке наблюдения, ϵ_0 - электрическая постоянная. В областях пространства, где электрические заряды отсутствуют ($\rho = 0$), из (4.3) получим:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad (4.2')$$

Дальше будем рассматривать поля, создаваемые точечными электрическими зарядами. Для системы N точечных зарядов величина \mathbf{E} определяется из закона Кулона:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^2} \quad (4.4)$$

здесь \mathbf{E}_i - напряженность поля, создаваемого i -ым точечным зарядом в точке наблюдения, \mathbf{r}_i - радиус-вектор, проведенный из i -ого заряда в точку наблюдения, q_i - его величина, ϵ_0 - электрическая постоянная.

Учитывая, что $\mathbf{r}_i = \mathbf{r} - \mathbf{R}_i$, где \mathbf{r} - радиус-вектор точки наблюдения, а \mathbf{R}_i - радиус-вектор i -ого заряда и, расписывая (4.4) по координатам, получим:

$$E_x = \sum E_{x_i} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_i}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{3/2}} \quad (4.5)$$

$$E_y = \sum E_{y_i} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y_i}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{3/2}} \quad (4.6)$$

$$E_z = \sum E_{z_i} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - z_i}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{3/2}} \quad (4.7)$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \quad (4.8)$$

здесь x_i, y_i, z_i - координаты i -ого точечного заряда, x, y, z - координаты точки наблюдения.

Для построения силовой линии необходимо знать величины $E_x/E, E_y/E, E_z/E$, поэтому выражения (4.5)-(4.8) удобно привести к безразмерному виду путем деления на величину $q_0/4\pi\epsilon_0 l_0^2$, где l_0 - пространственный масштаб, q_0 - единица измерения заряда. В качестве этой единицы можно взять один из зарядов, например q_1 . Таким образом вместо (4.5)-(4.7) получим выражения:

$$E'_x = \sum E'_{x_i} = \sum_{i=1}^N q'_i \frac{x' - x'_i}{\left[(x' - x'_i)^2 + (y' - y'_i)^2 + (z' - z'_i)^2 \right]^{3/2}} \quad (4.5')$$

$$E'_y = \sum E'_{y_i} = \sum_{i=1}^N q'_i \frac{y' - y'_i}{\left[(x' - x'_i)^2 + (y' - y'_i)^2 + (z' - z'_i)^2 \right]^{3/2}} \quad (4.6')$$

$$E'_z = \sum E'_{z_i} = \sum_{i=1}^N q'_i \frac{z' - z'_i}{\left[(x' - x'_i)^2 + (y' - y'_i)^2 + (z' - z'_i)^2 \right]^{3/2}} \quad (4.7')$$

Вычисление напряженности электрического поля удобно оформить в виде подпрограммы. Пример такой подпрограммы для вычисления поля одного точечного заряда приведен ниже.

{ x,y,z - координаты точки наблюдения, x_0,y_0,z_0 – координаты точечного заряда, q - величина заряда}

```

Procedure Efield(x,y,z: real);
var
    r : real;
begin
    r:= sqrt(sqrt(x-x0)+sqrt(y-y0)+sqrt(z-z0));
    Ex:= q*(x-x0)/(r*r*r);
    Ey:= q*(y-y0)/(r*r*r);
    Ez:= q*(z-z0)/(r*r*r);
    E:= sqrt(sqrt(Ex)+sqrt(Ey)+sqrt(Ez));
end;

```

(a2)

Для построения одной силовой линии можно использовать алгоритм (a1), где вместо процедуры "Afield(x,y,z)" необходимо включить процедуру "Efield(x,y,z)".

Отметим, что для построения силовых линий в выделенной области пространства, в ней не должны находиться источники поля (см. замечание к условию (4.2')). Если точечный заряд находится внутри этой области, то силовая линия должна прерваться в некоторой малой окрестности заряда, т.к. вблизи заряда напряженность электрического поля неограниченно возрастает. Таким образом окрестность точечного заряда исключается из области пространства, в которой строятся силовые линии. Условие конца силовой линии в программе (a1) таким образом означает, что линия подошла к границе выделенной области пространства или к точечному заряду.

Необходимо отметить, что поле системы точечных зарядов принципиально трехмерное и на плоском экране приходится отображать трехмерную картину силовых линий. В отдельных случаях, например, когда система зарядов обладает аксиальной симметрией, для характеристики поля достаточно изобразить картину силовых линий в плоскости, перпендикулярной оси симметрии. В этом случае изображаемые линии целиком лежат в плоскости рисунка и картина силовых линий двумерная (в программе (a1) $z \equiv 0$).

4.2.1. Выбор начальных точек для карты силовых линий.

Как уже отмечалось, для построения карты силовых линий надо задать алгоритм выбора начальных точек для линий. Для этого можно воспользоваться тем, что вблизи точечного заряда его собственное поле значительно превосходит по величине поля остальных зарядов. Поэтому картина силовых линий вблизи точечного заряда практически не отличается от картины силовых линий одиночного заряда. Учитывая, что силовые линии точечного заряда расходятся в виде лучей симметрично относительно точки расположения заряда (напряженность электрического поля точечного заряда зависит только от расстояния до него), в качестве начальных точек для силовых линий можно выбрать точки окружности малого радиуса ρ проведенной вокруг заряда, расположенные равномерно через угол $\alpha = \pi/N$, где N - число силовых линий (см. рис.4.3).

Для начальной точки j -ой силовой линии таким образом имеем:

$$x_j = x_0 + \rho \cos j\alpha, \quad y_j = y_0 + \rho \sin j\alpha \quad (4.9)$$

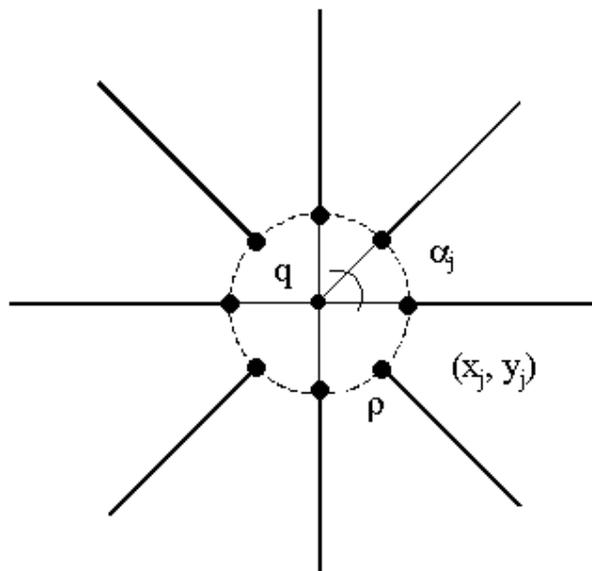


Рис. 4.3

здесь x_0, y_0 - координаты точечного заряда.

При таком выборе начальных точек исключается из рассмотрения область вокруг особой точки - места расположения точечного заряда, где $E \rightarrow \infty$. После выбора начальной точки (4.9) строится силовая линия согласно алгоритму (a2).

Если имеется несколько электрических зарядов, подобный способ позволяет построить набор силовых линий, исходящих из каждого заряда. Так как одна и та же силовая линия начинается на одном заряде и заканчи-

вается на другом, возникают проблемы совместимости систем силовых линий, исходящих из разных зарядов. В такой постановке общего решения задача *не имеет*. Следовательно, описанный способ, в принципе, неприменим для построения карты силовых линий *системы* зарядов. В общем случае такая задача вообще не имеет решения. Ниже описан способ построения силовых линий как изолиний потока вектора напряженности, который позволяет построить карту силовых линий для частного случая системы зарядов, имеющих аксиальную симметрию.

Задания

1. Построить карту силовых линий поля одиночного заряда, расположенного в точке с координатами (x_0, y_0) . Число силовых линий должно быть пропорционально величине заряда.

2. Построить карту силовых линий и изолиний потенциала поля двух точечных зарядов (одноименных и разноименных). Алгоритм построения изолиний описан ниже в разделе 4.4.1. Сближая заряды, исследовать поле на больших расстояниях от них.

3. Построить модель плоского конденсатора. Пластины конденсатора представить как линейку точечных зарядов, расстояние между которыми много меньше, чем длина линейки и расстояния между пластинами. Нарисовать карту силовых линий и линий равного потенциала.

4. Построить силовые линии поля точечного диполя, расположенного в точке с координатами (x_0, y_0) :

$$E_x = \frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{r^5}, \quad E_y = \frac{2(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{r^5},$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

4.3. Силовые линии магнитного поля.

Задача построения силовой линии магнитного поля (линии магнитной индукции) аналогична задаче построения силовой линии электрического поля, так как для магнитного поля тоже справедливо условие (см. (4.2)):

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad (4.2'')$$

Величина \mathbf{B} определяется из уравнения Максвелла для постоянного магнитного поля в вакууме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (4.10)$$

где \mathbf{j} - плотность тока в данной точке пространства, μ_0 - магнитная постоянная.

Источником магнитного поля является система электрических токов. Магнитное поле в отличие от электрического - вихревое. Это проявляется в отсутствии магнитных зарядов, аналогичных точечным электрическим. Элементарным источником стационарного магнитного поля можно считать кольцо с током. Это наиболее простая конфигурация замкнутой цепи с постоянным током. Кольцо имеет в отличие от точечного заряда конечные размеры. Для определения магнитной индукции \mathbf{B} кольца с током в произвольной точке пространства, разобьем кольцо на элементы с током $d\mathbf{l}$ (см. рис.4.4). Магнитная индукция от элемента тока $I d\mathbf{l}$ определяется законом Био-Савара, который является следствием (4.10):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}] \quad (4.11)$$

Здесь I - ток, протекающий в контуре, $d\mathbf{l}$ - элемент контура, направление вектора $d\mathbf{l}$ совпадает с направлением тока, \mathbf{r} - радиус-вектор, проведенный из точки расположения элемента тока в точку наблюдения.

Делением на $(\mu_0/4\pi)(I_0/l_0)$ (где I_0 - единица измерения тока, l_0 - пространственный масштаб) выражение (4.11) можно привести к безразмерному виду:

$$d\mathbf{B}' = \frac{I'}{r'^3} [d\mathbf{l}' \cdot \mathbf{r}'] \quad (4.11')$$

Суммарное поле \mathbf{B} определяется путем интегрирования выражения

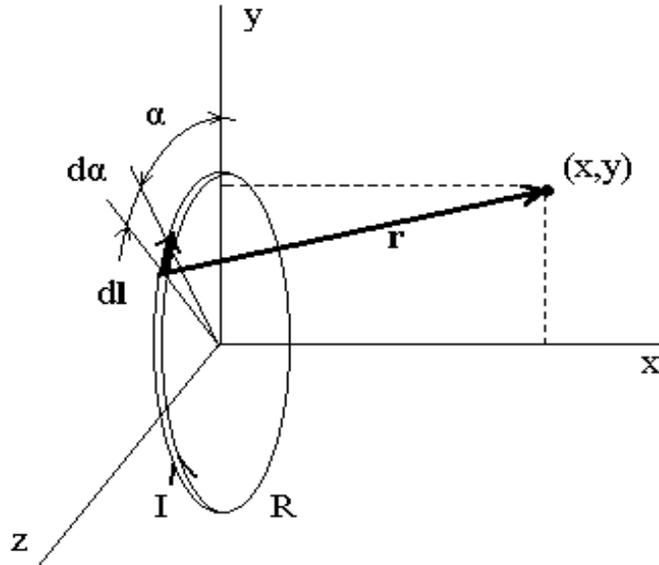


Рис. 4.4

(4.11) по контуру с током. Как показано на рис.4.4 за ось X примем ось симметрии, проходящую через центр кольца перпендикулярно его плоскости. В силу аксиальной симметрии плоскость (X, Y) можно провести через точку наблюдения и ось симметрии. Компоненты магнитного поля $d\mathbf{B}$ от элемента кольца с током $d\mathbf{l}$ определяются выражениями:

$$dB_x = \frac{IR^2}{r^3} d\alpha - \frac{I yR \cos \alpha}{r^3} d\alpha \quad (4.12)$$

$$dB_y = \frac{I xR \cos \alpha}{r^3} d\alpha \quad (4.13)$$

$$dB_z = \frac{I xR \sin \alpha}{r^3} d\alpha \quad (4.14)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + R^2 - 2yr \cos \alpha} \quad (4.15)$$

здесь R - радиус кольца с током, r - расстояние от точки наблюдения до элемента с током $d\mathbf{l}$, α - азимутальный угол, на который повернут элемент с током $d\mathbf{l}$ относительно плоскости (X, Y) .

Для нахождения суммарного поля от кольца надо (4.12)-(4.14) проинтегрировать по азимутальному углу α от 0 до 2π . При этом компонента

поля B_z обратится в 0 в силу аксиальной симметрии. Для оставшихся компонент B_x и B_y получим:

$$B_x = I R^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{r^3} - I y R \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{r^3} \quad (4.16)$$

$$B_x = I x R \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{r^3} \quad (4.17)$$

Уравнения (4.15), (4.16), (4.17) определяют магнитную индукцию кольца с током в произвольной точке плоскости (X, Y) в безразмерном виде.

Для вычисления интегралов можно использовать метод трапеций. Соответствующая подпрограмма может выглядеть так:

{В данной процедуре используются глобальные константы: $x0, y0$ - координаты центра кольца; $R0$ - радиус кольца}

Procedure Bfield(x,y: real);

const

N = 100; {число шагов интегрирования}

var

j : integer;

r,alpha,delta,s1,s2 : real;

begin

alpha := 0;

s1:=0;

s2:=0;

delta:=2*Pi/N;

for j:=1 to N do

begin

r:=sqrt(sqr(x-x0)+sqr(y-y0)+sqr(R0)-2*(y-y0)*R0*cos(alpha));

s1:=s1+delta/(2*r*r*r);

s2:=s2+cos(alpha)*delta/(2*r*r*r); (a3)

alpha:=alpha+delta;

r:=sqrt(sqr(x-x0)+sqr(y-y0)+sqr(R0)-2*(y-y0)*R0*cos(alpha));

s1:=s1+delta/(2*r*r*r);

s2:=s2+cos(alpha)*delta/(2*r*r*r);

end;

Bx:=I*sqr(R0)*s1-I*(y-y0)*R0*s2;

By:=I*(x-x0)*R0*s2;

end;

Построение силовой линии магнитного поля полностью аналогично построению силовой линии электрического поля. Для этого можно использовать программу (a1), заменив процедуру **Afield(x,y)** на **Bfield(x,y)**. Для более точных вычислений вместо (a3) можно использовать метод Симпсона.

При построении силовых линий магнитного поля надо учесть, что они замкнуты вокруг токов, их вызывающих. Поэтому необходимо

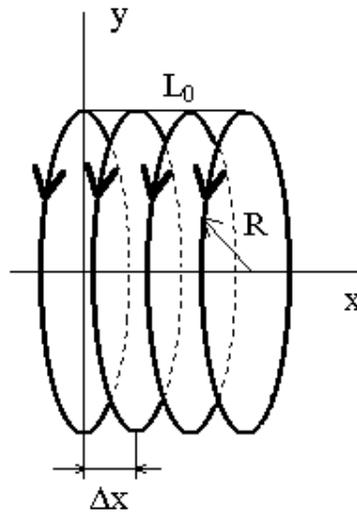


Рис.4.5

выбирать более точный алгоритм численного решения системы (4.1), например метод Рунге-Кутты.

Более сложную систему токов, соленоид, можно рассматривать как набор колец, плотно прижатых друг к другу (см. рис.4.5). Для вычисления магнитной индукции необходимо просуммировать в каждой точке поля, создаваемые каждым кольцом в отдельности, видоизменив соответствующим образом подпрограмму (a3).

4.3.1. Построение карты силовых линий.

Для выбора начальных точек для карты силовых линий можно использовать симметрию задачи, в частности то, что силовые линии перпендикулярны плоскости кольца с током (это является следствием того, что картина силовых линий симметрична относительно плоскости кольца). Начальные точки для силовых линий при этом надо выбирать на линии, являющейся проекцией кольца с током на плоскость экрана (см.

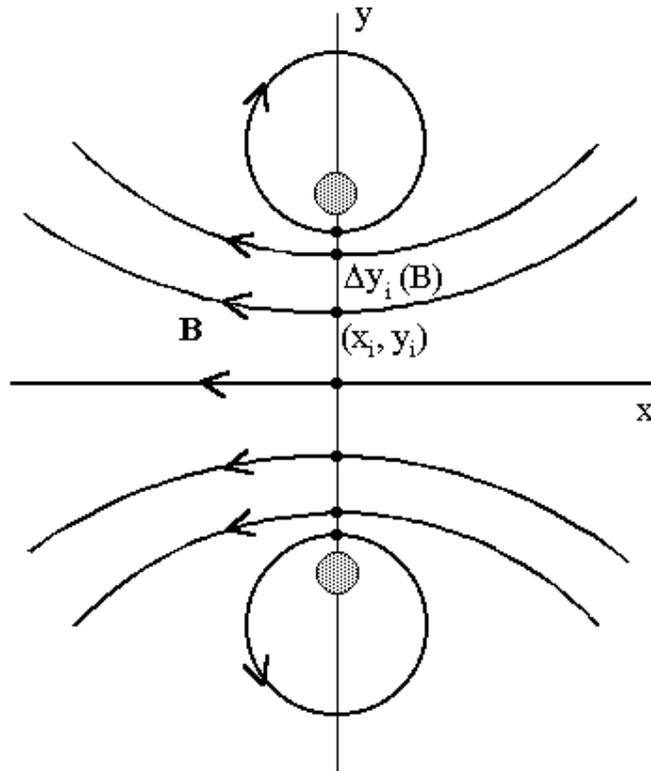


Рис.4.6

рис.4.6). Расстояние между соседними линиями должно быть обратно пропорционально величине B , т.е.

$$\Delta y = \frac{C_1}{B(y)} \quad (4.18)$$

где C_1 - константа, координата y отсчитывается от оси.

При этом первая силовая линия находится на оси, остальные распределены симметрично относительно оси. Область вблизи кольца с током должна быть исключена, т.к. это особая точка (там поле неограниченно растет).

Задания.

5. Построить карту силовых линий магнитного поля кольца с током.
6. Построить карту силовых линий магнитного поля двух параллельных колец с токами, текущими в одинаковых и противоположных направлениях.
7. Построить карту силовых линий магнитного поля прямолинейного проводника с током. Проводник направить перпендикулярно плоскости

экрана. Начальные точки выбирать согласно алгоритму, описанному в п. 4.3.1. Начальные точки расположить на линии, проходящей через проводник с током.

8. Построить карту силовых линий магнитного поля двух прямолинейных проводников с током для случаев параллельных и антипараллельных токов.

9. Построить карту силовых линий магнитного поля соленоида конечной длины.

4.4. Построение изолиний.

Наглядное представление о характере и топологии силового поля дают карты изолиний, т.е. линий *равного значения* некоторой величины, характеризующей поле. Если силовое поле характеризуется вектором \mathbf{A} , то такой величиной может быть некоторая скалярная функция $f(\mathbf{A})$. Изолиниями являются эквипотенциальные линии электростатического поля, а также горизонтальности на топографических картах. Можно показать, что в условиях аксиальной симметрии задачи, линии напряженности электрического поля представляются как изолинии потока вектора \mathbf{E} , а силовые линии магнитного поля - как изолинии магнитного потока.

Алгоритм построения изолиний не связан с решением дифференциальных уравнений типа (4.1), поэтому здесь нет проблемы выбора начальных точек для построения линии. Это позволяет строить карты силовых линий для систем зарядов и токов, где использованный выше метод неприменим. Набор изолиний проводится таким образом, чтобы значение $f(\mathbf{A})$ на соседних линиях отличалось на одну и ту же величину:

$$\Delta f = f_{i+1}(\mathbf{A}) - f_i(\mathbf{A}).$$

Необходимо отметить, что данный метод требует вычисления величины $f(\mathbf{A})$ в каждой точке выделенной области пространства, что может потребовать значительного времени, поэтому этот метод годится для использования в вычислительных машинах с большой производительностью.

4.4.1. Изолинии потенциала.

Рассмотрим алгоритм построения изолиний на примере эквипотенциальных линий электростатического поля.

Для потенциального поля ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$) в каждой точке можно ввести потенциал $\phi(\mathbf{r})$ так, что

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (4.19)$$

Точки, имеющие одинаковый потенциал образуют эквипотенциальную поверхность. Линия равного потенциала на плоскости является линией пересечения этой плоскостью эквипотенциальной поверхности.

Всегда можно однозначно определить потенциал некоторой точки пространства, приняв, например, за нуль потенциал точки, бесконечно удаленной от системы зарядов. В этом случае потенциал точки с координатами (x, y) для системы точечных зарядов определяется по формуле:

$$\varphi(x, y) = \sum \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} \quad (4.20)$$

$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} \quad (4.21)$$

Здесь r_i - расстояние от i -ого заряда до точки, в которой вычисляется потенциал, x_i, y_i, z_i - координаты i -ого заряда, x, y, z - координаты точки наблюдения.

Приведя (4.20)-(4.21) к безразмерному виду, получим:

$$\varphi(x, y) = \sum \varphi_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \quad (4.20')$$

Построение изолиний сводится к определению потенциала всех точек заданной области пространства и выделению тем или иным образом точек с потенциалом, равным заданному.

Подпрограмма определения потенциала для одного точечного заряда приведена ниже:

```
Procedure Pot(x,y,z: real);
var
  r : real;
begin
  r:=sqrt(sqrt(x-x0)+sqrt(y-y0)+sqrt(z-z0));
  phi:=q/r;
end;
(a4)
```

Для построения изолинии необходимо по заданному алгоритму просканировать все точки заданной области пространства. В при-

веденном ниже фрагменте программы построения изолинии с $\varphi = \varphi_0$, она определяется как граница раздела областей с $\varphi \leq \varphi_0$ и $\varphi > \varphi_0$. Отметить эту границу позволяет использование логической переменной **flag**.

```

.....
flag:=false;
{сканируется прямоугольная область пространства от xmin до xmax и от
  ymin до ymax на экране}
for i:=xmin to xmax do
  for j:=ymin to ymax do
    begin
      Pot(i,j);
      if (phi>phi0)and(not flag) then
        begin
          Canvas.Pixels(i,j);
          flag:=true;
        end;
      if (phi<=phi0)and(flag) then
        begin
          Canvas.Pixels(i,j);
          flag:=false;
        end;
      end;
      flag:=false;
    end;
.....

```

(a5)

Для построения карты эквипотенциальных линий необходимо задать значения потенциала на каждой линии. Обычно эквипотенциальные линии проводятся через равные промежутки $\Delta\varphi$, т.е.:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta\varphi$$

Заметим, что область вблизи точечного заряда необходимо исключить из рассмотрения.

Метод "цветового" кодирования.

Более простой метод построения эквипотенциалей заключается в окрашивании в определенный цвет области, потенциал в которой лежит в пределах от φ_1 до φ_2 . Для этого достаточно рассчитать потенциал в каждой точке и окрасить ее в нужный цвет. Эквипотенциалами в данном случае будут границы областей, окрашенных разными цветами.

Задания

10. Построить карту изолиний потенциала одиночного заряда тремя способами:

- а) как линии, перпендикулярные силовым линиям (с равным шагом по радиусу);
- б) способом цветового кодирования (с равным шагом по величине потенциала);
- в) как линии равного потенциала (с равным шагом по величине потенциала).

11. Построить карту эквипотенциалей для системы точечных зарядов произвольной величины, расположенных в плоскости экрана случайным образом. Какой вид имеет поле на больших расстояниях от системы зарядов?

4.4.2. Силовые линии электрического поля как изолинии потока вектора напряженности.

Как уже отмечалось поток вектора \mathbf{E} внутри силовой трубки остается постоянным в любом ее сечении (см. раздел 4.1). Две соседние силовые линии на плоскости можно представить как следы пересечения этой плоскостью силовой трубки. Если картина силовых линий двумерная, т.е. эти линии из плоскости не выходят, то их можно рассматривать как изолинии потока вектора \mathbf{E} . При этом поток вычисляется относительно осевой линии трубки. Это свойство электрического поля можно использовать для построения карты силовых линий при аксиально-симметричном расположении зарядов.

Рассмотрим точечный заряд (см. рис.4.7). Силовые линии 0, 1, 2 проведены через равные углы ϑ , т.к. напряженность поля точечного заряда не зависит от угла ϑ . Найдем поток вектора \mathbf{E} , заключенный в силовой трубке 1-1', опирающейся на линии 1 и 1' соответственно. Эта трубка представляет собой конус с вершиной в точке расположения заряда (на рис. 4.6

заштрихован). Интеграл будем вычислять по поверхности сферы радиусом

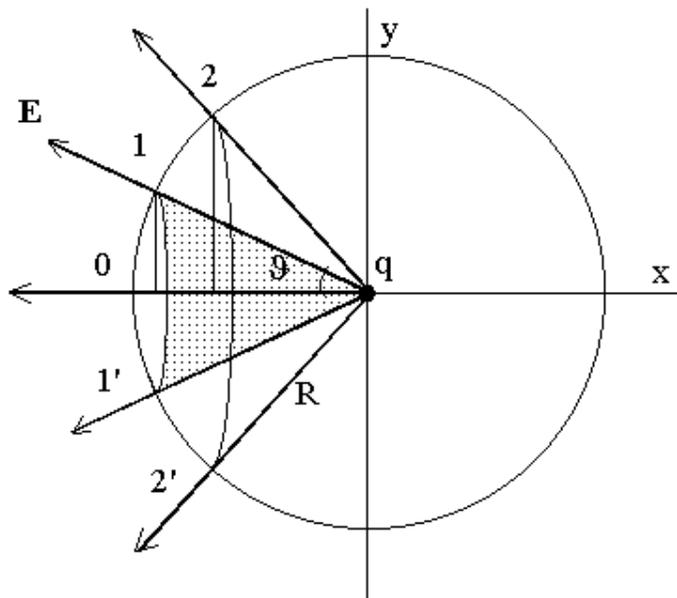


Рис. 4.7

R с центром в точке расположения заряда.

$$\Phi_1 = E \int_0^{\vartheta} R^2 \sin \alpha d\alpha = -2\pi ER^2(1 - \cos \vartheta) \quad (4.22)$$

Подставляя значение E для точечного заряда на поверхности этой сферы, получим:

$$\Phi_1 = -\frac{q}{2\epsilon_0}(1 - \cos \vartheta) \quad (4.22')$$

Соответственно для силовой трубки 2-2', опирающейся на линии 2 и 2' поток будет равен:

$$\Phi_2 = -\frac{q}{2\epsilon_0}(1 - \cos 2\vartheta)$$

Если имеется система $2N$ силовых линий, выходящих из точечного заряда, то для потока вектора \mathbf{E} силовой трубки, опирающейся на i -ю силовую линию, получим

$$\Phi_i = -\frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \cos \frac{i\pi}{N} \right) \quad (4.23)$$

В безразмерном виде, поделив (4.23) на $q_0/4\pi\epsilon_0$ (см. раздел 4.2) получим:

$$\Phi_i = -2\pi q \left(1 - \cos \frac{i\pi}{N} \right) \quad (4.23')$$

Величина Φ_i - это значение потока вектора \mathbf{E} , которое он принимает на i -ой силовой линии. Так как Φ не зависит от R , это значение сохраняется вдоль силовой линии. При этом поток Φ отсчитывается от нулевой линии, параллельной оси X и выходящей из заряда влево.

При построении карты силовых линий системы точечных зарядов как изолиний потока вектора \mathbf{E} необходимо задать значения потока Φ на каждой силовой линии. Рассмотрим систему точечных зарядов, расположенных на оси X (при этом выполняется условие аксиальной симметрии). Так как поле вблизи точечного заряда сферически симметрично и не зависит от наличия других зарядов, то величина потока вектора \mathbf{E} на i -ой силовой линии по-прежнему равна (4.23') и сохраняется вдали от заряда, когда структура поля меняется из-за влияния остальных зарядов системы. Таким образом, величины потоков (4.23') для поля системы точечных за-

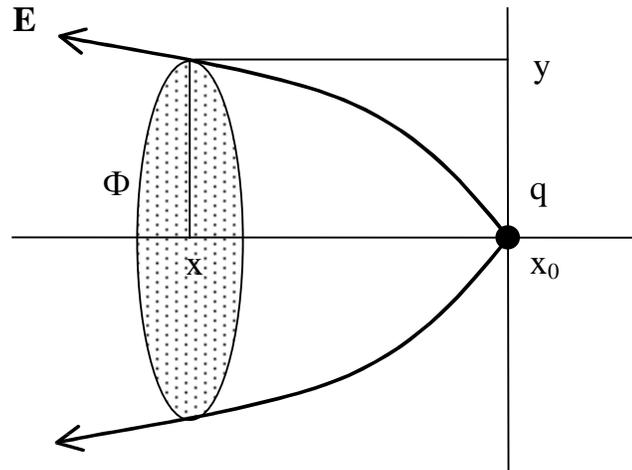


Рис. 4.8

рядов являются универсальными константами, не зависящими от характера распределения зарядов.

Отметим, что использование (4.23') для построения карты силовых линий произвольного аксиально-симметричного распределения зарядов

позволяет сравнить структуру этого поля с простейшим полем точечного заряда и проследить, как изменение распределения зарядов влияет на структуру поля.

Для построения изолиний потока вектора \mathbf{E} необходимо в каждой точке выделенной области пространства вычислить поток Φ и, сравнивая его с Φ_i , построить силовую линию, аналогично (а5). Силовая трубка, используемая для расчета потока вектора \mathbf{E} , образуется при вращении силовой линии вокруг оси симметрии (см. рис. 4.8). Для расчета потока выберем сечение этой трубки плоскостью, перпендикулярной оси X (на рисунке заштриховано). Тогда поток вектора \mathbf{E} в этой трубке можно определить по формуле (в безразмерном виде):

$$\Phi = 2\pi \int_0^y y E_x dy \quad (4.24)$$

При вычислениях надо иметь в виду, что выражение (4.24) справедливо для точек с координатами $x < x_0$, где x_0 - координата точечного заряда, т.е. слева от заряда. При переходе через заряд ($x > x_0$) осевая линия уже не является линией нулевого потока:

$$\Phi = 2\pi \int_0^y y E_x dy + \Phi_1 \quad (4.25)$$

Величину Φ_1 можно найти, проинтегрировав выражение в (4.22) по углу от 0 до π (в безразмерном виде):

$$\Phi_1 = 2\pi q \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = -4\pi q \quad (4.26)$$

Кроме того, при вычислениях надо иметь в виду, что область в окрестности точечного заряда должна быть исключена из рассмотрения.

Подпрограмма вычисления потока вектора \mathbf{E} приведена ниже. Для вычисления интеграла здесь используется метод трапеций.

```
{процедура вычисляет значение потока f в точке (x,y)}
Procedure Eflux(x,y: real);
const
  N = 100;    { число шагов интегрирования }
var
```

```

i      : integer;
y1, delta : real;
begin
  delta:=(y-y0)/N;
  y1:=0;
  for i:=1 to N do
    begin
      Efield(x,y1+y0);
      fl:=fl+2*Pi*y1*Ex*delta/2;
      y1:=y1+delta;
      Efield(x,y1+y0);
      fl:=fl+2*Pi*y1*Ex*delta/2;
    end;
  end;

```

(a6)

Для более точного расчета потока вблизи точечного заряда можно использовать более точные алгоритмы интегрирования, например метод Симпсона.

Алгоритм построения системы силовых линий как изолиний потока вектора **E** аналогичен (a5) и приведен ниже:

```

.....
flag:=false;
for i:=xmin to xmax do
  begin
    if i=x0 then {вариант исключения области вблизи заряда}
      i:=i+1;
    if i<x0 then
      fl:=0;
    if i>x0 then
      fl:=-4*pi*q;
    for j:=y0 to ymax do
      begin
        Eflux(i,j);
        {Проверка условий совпадения потоков для системы силовых линий}
        for k:=1 to N do
          begin
            if (fl>fl0[k])and(not flag[k]) then
              begin
                Canvas.Pixels(i,j);
                Canvas.Pixels(i,round(2*y0-j));
                flag[k]:=true;
              end

```

(a7)

```

    end;
    if (f1<=f10[k])and(flag[k]) then
    begin
        Canvas.Pixels(i,j);
        Canvas.Pixels(i,round(2*y0-j));
        flag[k]:=false;
    end;
end;
end;
end;
for k:=1 to N do
    flag[k]:=0;
.....

```

В этом фрагменте программы значения потоков для выделенных силовых линий Φ_i записаны в массиве **f10**. Изолиния с $\Phi = \Phi_i$, определяется как граница раздела областей с $\Phi \leq \Phi_i$ и $\Phi > \Phi_i$. Отметить эту границу также как и в алгоритме (а7) позволяет использование логической переменной **flag[i]**, которая является элементом массива **flag**.

4.4.3. Силовые линии магнитного поля как изолинии магнитного потока.

Для аксиально-симметричной системы токов силовые линии магнитного поля являются изолиниями магнитного потока, т.е. потока вектора **B**. В данном случае магнитный поток определяется так же, как и поток вектора напряженности электрического поля (см. раздел 4.2). При построении карты магнитных силовых линий необходимо задать значения магнитного потока на отдельных линиях таким образом, чтобы карта силовых линий удовлетворяла своему основному свойству - везде в выделенной области пространства большему значению **B** соответствует увеличение густоты силовых линий. При рассмотрении карты силовых линий электрического поля для нахождения Φ_i выбирали наиболее простую конфигурацию поля - поле точечного заряда, структура которого известна заранее. Для магнитного поля простейшей структурой можно считать однородное поле в середине длинного соленоида.

Рассмотрим длинный соленоид (рис.4.9). Внутри соленоида магнитное поле однородно. В плоскости (X, Y) , проходящей через ось соленоида, силовые линии представляют собой прямые линии, параллельные оси X и отстоящие друг от друга на равные промежутки Δy . Магнитный поток в трубке между двумя силовыми линиями, симметричными относительно оси X и расположенными на расстоянии y_1 от оси:

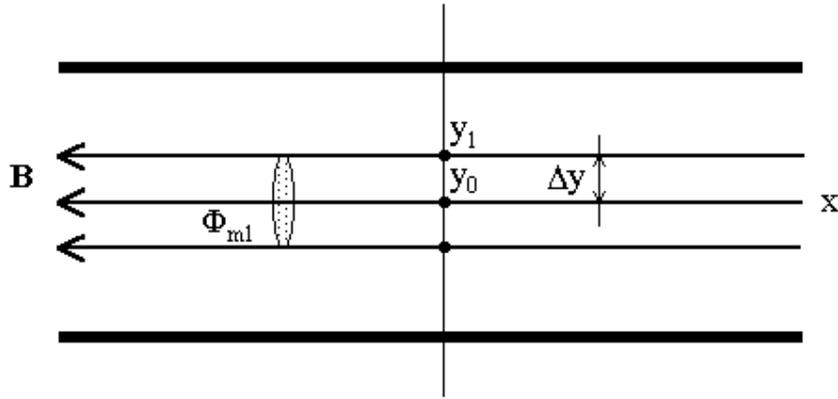


Рис. 4.9

$$\Phi_{m1} = 2\pi \int_0^{y_1} B_0 y dy = \pi B_0 y_1^2 \quad (4.27)$$

здесь B_0 - магнитная индукция в центре бесконечно длинного соленоида.

Если строить картину силовых линий однородного поля, то магнитный поток, соответствующий i -ой силовой линии равен:

$$\Phi_{mi} = \pi B_0 y_i^2, \quad y_i = i R/N \quad (4.28)$$

здесь R - радиус соленоида, N - число силовых линий.

Следовательно:

$$\Phi_{mi} = C_2 i^2 \quad (4.29)$$

Здесь C_2 - константа. Поток, соответствующий i -ой силовой линии, не изменится и на краю длинного соленоида, где магнитное поле уже неоднородно.

Для построения силовых линий произвольной аксиально-симметричной системы токов константу C_2 можно выбрать произвольно. От этого выбора зависит число изображаемых силовых линий. Построение при этом полностью аналогично построению картины силовых линий электрического поля. Условие (4.27) аналогично условию (4.23'). Поток вектора \mathbf{B} в точке с координатами (x, y) с точностью до численного множителя можно вычислить по алгоритму (а6), где величина " $\mathbf{E}x$ " заменена на " $\mathbf{B}x$ ", а процедура " $\mathbf{Efield}(x,y)$ " - на процедуру " $\mathbf{Bfield}(x,y)$ ". Построение силовой линии производится по алгоритму (а7).

При построении картины силовых линий магнитного поля из рассмотрения необходимо исключить область вблизи проводников с током, где магнитная индукция неограниченно растет. В случае кольца с током это можно сделать так же, как и для точечного заряда (см. а8).

4.4.4. Силовые линии соленоида конечной ширины.

Рассмотрим соленоид конечной ширины ($x_1 - x_2 = L$) радиуса R (см. рис.4.10). С точки зрения вычисления магнитного потока все пространство разбивается на две области. В области I для вычисления магнитного потока по алгоритму (а8) не надо пересекать проводник с током, в то время как

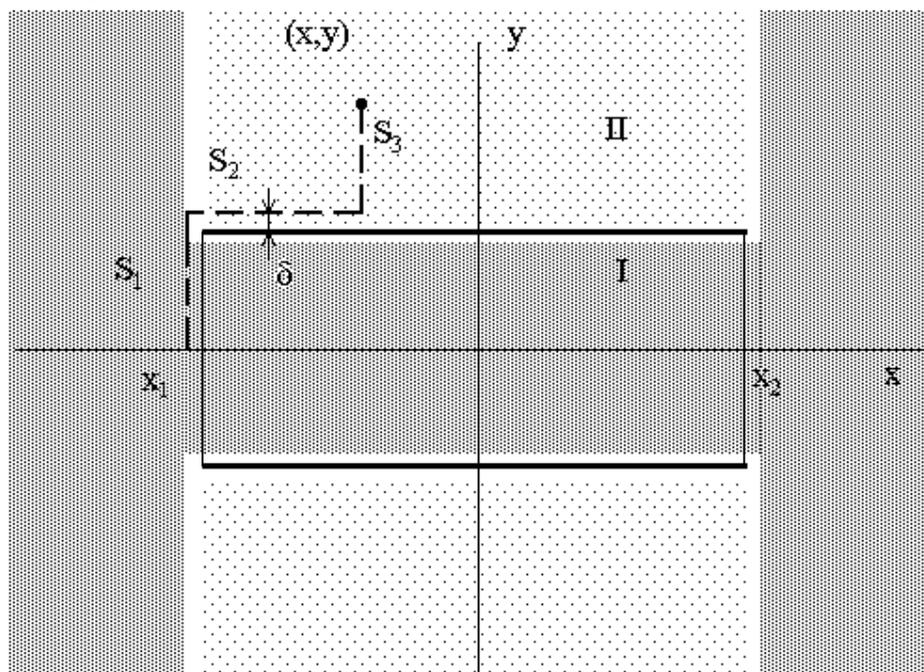


Рис. 4.10

для вычисления потока в области II по этому алгоритму пришлось бы пересечь проводник с током. Для вычисления магнитного потока в этой области проводник с током необходимо обойти. Ниже приводится один из возможных способов обхода.

Рассмотрим точку с координатами (x, y) , лежащую в области II. Для вычисления потока в трубке, боковая поверхность которой проходит через эту точку, выберем поверхность интегрирования, состоящую из трех частей:

1. S_1 - круг радиуса $R + \delta$, перпендикулярный оси, расположенный вблизи торца соленоида и пересекающий ось в точке $x_1 - \delta$;
2. S_2 - боковая поверхность цилиндра радиуса $R + \delta$, охватывающего соленоид;
3. S_3 - кольцо с внешним радиусом y , расположенное в сечении x .

Магнитный поток в точке (x, y) вычисляется следующим образом:

$$\Phi_m(x, y) = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3} \quad (4.30)$$

Потоки Φ_{S_1} и Φ_{S_3} вычисляются аналогично (27):

$$\Phi_{S_1} = 2\pi \int_0^{R+\delta} B_x(x_1 - \delta, y) y dy \quad \Phi_{S_3} = 2\pi \int_{R+\delta}^y B_x(x, y) y dy \quad (4.31)$$

поток Φ_{S_2} получим из:

$$\Phi_{S_2} = 2\pi(R + \delta) \int_{x_1 - \delta}^x B_y(x, R + \delta) dx \quad (4.32)$$

Ниже приведен фрагмент программы, вычисляющей магнитный поток для соленоида:

```
{процедура вычисляет значение потока f1 в точке (x,y)}
Procedure Bflux(x,y: real);
const
  N = 100;    { число шагов интегрирования}
var
  i           : integer;
  y1,x3, delta,f1,f2,f3 : real;
begin                                               (a8)
  {вычисление потока на торце соленоида}
  y1:=0;
  delta:=(R+delta1)/N;
  f1:=0
  for i:=1 to N do
    begin
```

```

    Bfield(x1-delta1,y0-y1);
    fl1:=fl1+2*Pi*y1*Bx*delta/2;
    y1:=y1+delta;
    Bfield(x1-delta1,y0-y1);
    fl1:=fl1+2*Pi*y1*Bx*delta/2;
end;
{вычисление потока в области I}
if (x<x1-delta1)or(x>x2+delta1) then
begin
    y1:=0;
    delta:=(y0-y)/N;
    for i:=1 to N do
        begin
            Bfield(x,y0-y1);
            fl:=fl+2*Pi*y1*Bx*delta/2;
            y1:=y1+delta;
            Bfield(x,y0-y1);
            fl:=fl+2*Pi*y1*Bx*delta/2;
        end
    end;
else
    {вычисление потока в области II }
begin
    x3:=x1-delta1;
    delta:=(x-x3)/N;
    fl2:=0;
    {поток по боковой поверхности цилиндра}
    for i:=1 to N do
        begin
            Bfield(x3,y0-R-delta1);
            fl2:=fl2+2*Pi*(R+delta1)*By*delta/2;
            x3:=x3+delta;
            Bfield(x3,y0-R-delta1);
            fl2:=fl2+2*Pi*(R+delta1)*By*delta/2;
        end;
    {поток по кольцу}
    y1:=R+delta1;
    delta:=(y0-y)/N;
    fl3:=0;
    while y1<=y0-y do
        begin
            Bfield(x,y0-y1);

```

```
f13:=f13+2*Pi*y1*Bx*delta/2;  
y1:=y1+delta;  
Bfield(x,y0-y1);  
f13:=f13+2*Pi*y1*Bx*delta/2;  
end  
f1:=f11+f12+f13;  
end;  
end;
```

В дальнейшем для построения силовой линии можно использовать алгоритм (a7).