

### 3. Моделирование движений материальной точки

#### 3.1 Численное решение уравнений движения

Моделирование многих достаточно сложных физических явлений часто можно свести к исследованию траекторий движения отдельных частиц или некоторых макроскопических объектов. Для вычисления траектории необходимо решать следующую систему уравнений:

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{V} \quad (3.1)$$

$$d\mathbf{V}/dt = \mathbf{F}/m, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  и  $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$  - радиус-вектор и скорость частицы массы  $m$ ;  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  - действующая на нее сила. Очевидно, что уравнение (3.1) есть просто определение скорости как перемещения в единицу времени, а уравнение (3.2) представляет собой основной закон динамики (II закон Ньютона) для нерелятивистского движения. Предполагается, что сила  $\mathbf{F}$  известна в каждой точке пространства в любой момент времени.

Если вместо двух векторных уравнений (3.1), (3.2) использовать их проекции на координатные оси, то будем иметь шесть скалярных уравнений:

$$dx/dt = V_x, \quad dy/dt = V_y, \quad dz/dt = V_z, \quad (3.3)$$

$$dV_x/dt = f_x, \quad dV_y/dt = f_y, \quad dV_z/dt = f_z, \quad (3.4)$$

где введена величина  $\mathbf{F}/m = \mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ , представляющая собой силу, действующую на единицу массы. Для однозначного решения системы *шести* дифференциальных уравнений (3.3) требуется задание *шести* соответствующих начальных условий:

$$\begin{aligned} x &= x_0, & y &= y_0, & z &= z_0, \\ V_x &= V_{0x}, & V_y &= V_{0y}, & V_z &= V_{0z}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

которые характеризуют положение частицы и ее скорость в некоторый начальный момент времени  $t_0 = 0$ .

В общем случае сила  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) = \mathbf{F}(x, y, z, V_x, V_y, V_z, t)$  определяется физической природой взаимодействия, обеспечивающего движение частицы, и может быть весьма сложной функцией координат, скорости и

времени, вследствие чего лишь в редких ситуациях становится возможным аналитическое решение системы уравнений (3.3), (3.4). При численном решении этой системы, предполагаются заданными начальные условия (3.5), а также компоненты силы  $f_x, f_y, f_z$  во всей области движения частицы.

Уравнения (3.3), (3.4) с математической точки зрения являются однотипными, поэтому их можно записать в следующем формализованном виде:

$$dY/dt = S(Y, t), \quad (3.6)$$

Начальные условия (3.5) тогда примут вид:

$$Y = Y_0 \quad \text{при} \quad t_0 = 0 \quad (3.7)$$

Алгоритм численного решения дифференциальных уравнений (3.6) на промежутке  $[t_0, t_0 + T]$  сводится к вычислению значений непрерывной функции  $Y(t)$  лишь в дискретные моменты времени  $t_k = k\Delta t$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ), где  $\Delta t$  - временной шаг,  $N = T/\Delta t$  - число шагов. Значение функции  $Y$  в момент времени  $t_{k+1}$  вычисляется по ее значению в предыдущий момент времени  $t_k$  с помощью разложения в ряд Тейлора вблизи точки  $Y(t_k)$ , которое в линейном приближении имеет вид :

$$Y(t_{k+1}) = Y(t_k) + S(Y(t_k), t_k)\Delta t + O(\Delta t^2), \quad (3.8)$$

Последний член в правой части определяет точность разложения и означает существование некоторой константы  $A$ , зависящей от функции  $Y(t)$ , так что разность между  $Y(t_{k+1})$  и двумя первыми членами правой части будет меньше  $A\Delta t^2$  при достаточно малых  $\Delta t$ . С вычислительной точки зрения, эта величина является ошибкой метода  $\Delta Y$ , которая, очевидно, пропорциональна  $\Delta t^2$ .

Суть простейшего вычислительного алгоритма (метод Эйлера) сводится к замене точной формулы (3.8) приближенным соотношением

$$Y(t_{k+1}) \approx Y(t_k) + S(Y(t_k), t_k)\Delta t. \quad (3.8')$$

Полученное согласно этой формуле значение функции  $Y(t_{k+1})$  отличается от точного (3.8) на величину  $\Delta Y$  (см. рис. 3.1). Формула (3.8') наглядно

показывает необходимость начальных условий (3.7) для решения задачи: именно с них и начинаются вычисления ( $t_0 = 0$ ).

Из Рис.3.1 также видно, что с геометрической точки зрения численная аппроксимация представляет собой замену истинной зависимости  $Y(t)$  ломанной  $A_0A_1\dots$ , которая совпадает с  $Y(t)$  только в начальной точке  $t_0$ , затем аппроксимирующая ломанная расходится с кривой  $Y(t)$ , причем расхождение увеличивается на каждом шаге, так что к концу промежутка

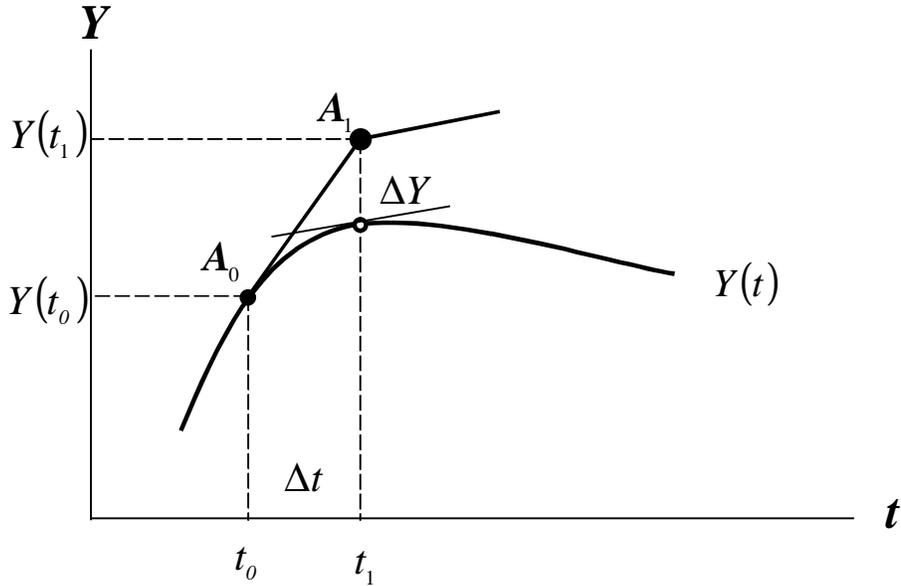


Рис.3.1

$T$  полная погрешность равна  $N \cdot \Delta Y = (T/\Delta t)A\Delta t^2 = AT \cdot \Delta t$ . Таким образом полная погрешность оказывается пропорциональной  $\Delta t$ .

Если теперь снова вернуться от формализованных переменных к координатам и скоростям, то вместо (3.8') имеем:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + V_x(t_k)\Delta t, \quad (3.9)$$

...

$$V_x(t_{k+1}) = V_x(t_k) + f_x(r(t_k), V(t_k))\Delta t, \quad (3.10)$$

...

Здесь многоточием в выражении (3.9) обозначены аналогичные выражения для остальных компонент вектора  $\mathbf{r}$ , т.е.  $y(t_{k+1})$ ,  $z(t_{k+1})$ , а выражении (3.10) – для остальных компонент вектора  $\mathbf{V}$ , т.е.  $V_y(t_{k+1})$ ,  $V_z(t_{k+1})$ . Процедура вычислений выглядит следующим образом. По известным значениям

координаты и скорости  $x_0, V_0$  в начальный момент времени  $t_0$  по формуле (3.9) находится значение координаты  $x_1 = x(t_1)$  в следующий момент  $t_1$ . Затем по известным значениям скорости и силы  $V_0, f_0$  в начальный момент времени  $t_0$ , в начальной точке  $x_0$  по формуле (3.10) находится скорость  $V_1 = V(t_1)$  в момент  $t_1$ . Далее эта процедура повторяется в точке  $x_1$  и т. д.

Из соотношения (3.9) следует, что при вычислении изменения координаты  $x$  за интервал времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  используется значение скорости частицы  $V_x$  в начале этого интервала, которое считается постоянным в течение всего интервала. В действительности, скорость  $V_x$  за время  $t + \Delta t$  также претерпевает определенные изменения, в связи с чем предположение о постоянстве  $V_x$  приводит к дополнительной погрешности численного решения системы уравнений (3.3), (3.4). Для уменьшения этой погрешности полезно несколько модифицировать стандартный метод Эйлера, сначала вычислив скорость в точке  $t_{k+1}$

$$V_x(t_{k+1}) = V_x(t_k) + f_x(r(t_k), V(t_k)) \Delta t$$

а *затем* координату в этой точке  $x(t_{k+1})$  по формуле:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= x(t_k) + V_x(t_{k+1}) \Delta t = x(t_k) + [V_x(t_k) + f_x(r(t_k), V(t_k)) \Delta t] \Delta t = \\ &= x(t_k) + V_x(t_k) \Delta t + f_x(r(t_k), V(t_k)) \Delta t^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

...

Сравнение формул (3.11) и (3.8) показывает, что описанная процедура учитывает (неявным образом) квадратичный член по  $\Delta t$ , повышая тем самым, точность вычислений координаты. Для дальнейшего повышения точности необходимо использовать другие методы численного решения уравнений (3.6), например метод Рунге-Кутты.

Важным аспектом численного решения дифференциальных уравнений является проверка точности вычислительной схемы, для чего обычно используют следующие простейшие методы.

1. *Уменьшение шага расчета.* При достаточной точности расчета вид траектории не должен меняться. Метод является универсальным и может быть использован во всех случаях.
2. *Сравнение полученного численного решения с известным аналитическим решением* (при некоторых, обычно предельных, значениях параметров задачи).
3. *Проверка выполнения законов сохранения* в случае, когда в задаче есть интегралы движения (например, энергия).

Алгоритмы решения уравнений (3.8) и их реализация в среде программирования Delphi для различных типов движений будут рассмотрены ниже; примеры, иллюстрирующие влияние точности расчета на полученные физические результаты, будут приведены в соответствующих разделах.

## 3.2. Колебательное движение

Одним из весьма распространенных в природе явлений оказываются так называемые колебательные процессы, при которых некоторая физическая величина через определенные промежутки времени принимает те же самые (или близкие) значения. Такой колеблющейся величиной может быть координата и скорость частицы, заряд конденсатора, напряженность электрического поля и т.д. Если периодически меняющейся величиной является положение тела (частицы) в пространстве, то мы имеем дело с механическими колебаниями (колебательным движением).

### 3.2.1. Линейные колебания

Рассмотрим сначала простейшую колебательную систему (линейный осциллятор), представляющую собой тело массы  $m$ , совершающее одномерное движение по оси  $X$  под действием силы  $F(x)$  вблизи положения равновесия  $x = 0$ , так что  $F(x = 0) = 0$ . Считая отклонение от положения равновесия  $x$  малым, разложим силу в окрестности точки  $x = 0$ :  $F(x) = F(0) + kx + \mathbf{K}$  и удержим в разложении только линейный член. Полагаем также, что коэффициент  $k > 0$ , а сила  $F(x)$  направлена в сторону, противоположную отклонению, т.е. к точке равновесия (в этом случае равновесие устойчивое):  $F(x) \approx -kx$ . Примерами такой системы могут служить грузик, движущийся без трения на горизонтальной плоскости под действием силы натяжения пружины, или подвешенный в поле тяжести на невесомом стержне (математический маятник). В последнем случае, очевидно,  $k = mg/l$ .

Уравнение движения тела имеет вид:

$$m \frac{dV}{dt} = F(x) = -kx, \quad (3.12)$$

где скорость  $V$  определяется как

$$\frac{dx}{dt} = V. \quad (3.13)$$

Для определения зависимости  $x(t)$  уравнения (3.12) и (3.13) решаются с начальными условиями, например, имеющими вид:

$$x(0) = 0, \quad V(0) = V_0. \quad (3.14)$$

Уравнения (3.12) и (3.13) можно записать в каноническом виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = k/m, \quad (3.15)$$

которое называется уравнением гармонических колебаний и имеет для начальных условий (3.14) простое решение:

$$x = (V_0/\omega_0) \sin \omega_0 t, \quad V = V_0 \cos \omega_0 t.$$

Рассмотрим сразу более общий случай, когда кроме силы  $F$  на тело действует также сила трения  $F_\gamma$  (например, за счет сопротивления воздуха) и некоторая внешняя сила  $F_e(t)$  (которая может быть произвольной функцией времени), также направленные по оси  $X$ . Обычно силу трения записывают в виде  $F_\gamma = -\beta V$ .

В этом случае уравнения (3.13), (3.14) можно записать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = V \quad (3.16)$$

$$\frac{dV}{dt} = f(x, t) = -\omega_0^2 x - \gamma V + f_e(t), \quad (3.17)$$

где введены обозначения  $\gamma = \beta/m$ ,  $f_e(t) = F_e(t)/m$ . Аналитическое решение (3.16), (3.17) в общем случае представляет сложную задачу, поэтому для этого используют численные методы (см. раздел 3.1).

Полезной характеристикой колебательного движения оказывается так называемый фазовый портрет, т.е. зависимость  $V$  от  $\omega_0 x$ . Легко видеть, что в случае гармонических колебаний  $V^2 + \omega_0^2 x^2 = V_0^2$ , то есть фазовый портрет представляет собой окружность.

Другой полезной характеристикой движения является зависимость полной энергии тела  $E = mV^2/2 + U(x)$  от времени. Для силы вида  $F(x) = -kx$  потенциальная энергия  $U(x) = kx^2/2$ . В отсутствие внешних сил и трения ( $F_e = 0, \gamma = 0$ ) полная энергия сохраняется:  $E = E_0 = \text{const}$ .

Выполнение этого условия может быть одним из критериев точности численного решения системы уравнения (3.16) - (3.17).

### Безразмерные переменные

При численном решении уравнений (3.15), (3.17) удобно привести их к безразмерному виду. Для этого введем характерные масштабы изменения переменных:  $x_m$  и  $t_m$ . Тогда, умножив, например, уравнение (3.15) на  $t_m^2$  и разделив на  $x_m$ , получим:

$$\frac{d^2(x/x_m)}{d(t/t_m)^2} + (\omega_0 t_m)^2 (x/x_m) = 0.$$

Введя теперь новые, безразмерные, переменные:  $(x/x_m) \textcircled{R} x\textcircled{C}$   $(t/t_m) \textcircled{R} t\textcircled{C}$ , запишем уравнение (3.15) в виде:

$$\frac{d^2 x\textcircled{C}}{dt\textcircled{C}^2} + (\omega_0 t_m)^2 x\textcircled{C} = 0.$$

Безразмерный коэффициент  $K = (\omega_0 t_m)^2$  является параметром задачи. Его величина определяет характер и траекторию движения. Отсюда видно, что "естественной" единицей измерения времени является период собственных колебаний маятника (умноженный на  $2\pi$ ):  $t_m = 1/\omega_0$ . Окончательно, уравнение (3.15) теперь выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 x\textcircled{C}}{dt\textcircled{C}^2} + x\textcircled{C} = 0. \quad (3.15')$$

Это уравнение уже не содержит размерных параметров  $m$  и  $k$ , которые в реальных задачах могут отличаться на много порядков величины, и описывают колебания маятника с произвольными значениями этих параметров. При численном решении уравнения (3.15') время будет измеряться в единицах, кратных  $1/\omega_0$  (т.е. в периодах колебаний маятника). Единица измерения длины при этом произвольна.

## Алгоритм решения уравнений движения линейного осциллятора

В численных решениях используются только безразмерные переменные, поэтому в данном пункте и других пунктах Пособия, где описываются алгоритмы соответствующих решений, знак «итрих» у безразмерных переменных, для простоты, опущен

Численный алгоритм решения уравнений (3.16), (3.17) выглядит следующим образом:

1. Задаются начальные условия  $(x_0, V_0)$ .
2. Определяется значение правой части уравнения (3.17) в этой точке  $f(x_0)$ .
3. Путем решения уравнений (3.16), (3.17) методом Эйлера с заданным шагом по времени, определяются значения  $(V_1, x_1)$  в следующий момент времени.
4. Шаги 1-3 повторяются для каждого последующего момента времени.

Ниже приведен фрагмент программы решения уравнений колебаний, в котором реализован модифицированный алгоритм Эйлера. Точность решения определяется величиной шага по времени  $dt$ . В этом фрагменте вычисляются значения  $x$  и  $V$  в каждый момент времени. " $f(x,t)$ " - условное обозначение функции для вычисления правой части (3.17).

```
.....  
{задаются начальные условия для колебаний}  
x:=x0;  
V:=V0;  
t:=t0;  
repeat  
    PaintBox1.canvas.Pixels[round(t), round(x)]:=clRed;  
    PaintBox2.canvas.Pixels[round(t), round(v)]:=clRed;  
{команды вывода результатов на экран}  
    V:=V+dt*f(x,t);  
    x:=x+dt*V;  
    t:=t+dt;  
until {условие завершения расчета}  
.....
```

Условие завершения расчета означает, например, что траектория вышла за пределы рассматриваемой области пространства, или частица завершила нужное количество циклов при финитном движении. Завершить выполнение расчетов можно и по нажатию клавиши.

## Задания

Исследовать различные виды колебательного движения.

Для вывода результатов счета расположить на форме четыре графических компонента (например, **PaintBox**). В первом выводится изображение колеблющегося объекта (простейший маятник), во втором - фазовый портрет (график изображающей точки в координатах  $(V, x)$ ), в третьем и в четвертом, расположенными друг под другом - зависимости от времени координаты  $x(t)$  и полной энергии  $E(t)$ .

### Задача 1.

Свободные линейные колебания с учетом силы трения, т.е.  $F_e = 0$  и  $\gamma > 0$  в уравнении (3.17).

1.1. Рассмотрите вначале колебания без трения. Как при этом изменится уравнение (3.17)? При заданном значении  $x_0$  постройте фазовые траектории для четырех значений  $V_0$ . По результатам численного решения дайте ответы на следующие вопросы:

- а) В какое состояние попадает тело, если его изображающая точка опишет полную окружность по фазовой траектории?
- б) Какая величина сохраняется при движении изображающей точки по фазовой траектории?
- в) Какими способами перейти с одной фазовой траектории на другую?
- г) Обратите внимание на поведение функции  $E(t)$  вблизи точек останова. «Нарушение» закона сохранения энергии здесь связано с недостаточной точностью алгоритма при малых скоростях. Изменяя шаг расчета, определите его влияние на зависимость энергии тела от времени. Разработайте программу с переменным шагом для получения более точного решения в областях движения с малыми скоростями.

1.2. Рассмотрите колебания с трением. Обратите внимание, что при приведении к безразмерному виду уравнения (3.17) и выборе в качестве единицы измерения времени периода колебаний, величина  $\gamma$  будет измеряться в единицах  $\omega_0$ . Подберите величину  $\gamma$  таким образом, чтобы амплитуда колебаний уменьшалась в три раза за 10 периодов. Почему фазовая траектория стала незамкнутой? Как ведет себя зависимость  $E(t)$ ?

1.3. Изменяя параметр  $\gamma$ , перейдите к апериодическому движению маятника. Как меняется энергия за время одного колебания?

## Задача 2.

Линейные колебания с вынуждающей силой. В уравнении (3.17) положите  $f_e = a \sin w_e t$ . Начальные условия: при  $t = 0$   $x = 0$ ,  $dx/dt = 0$ . При приведении к безразмерному виду уравнения (3.17) частота вынуждающей силы  $\omega_e$  (выраженная в единицах  $\omega_0$ ) и ее амплитуда  $a$  являются свободными параметрами задачи.

2.1. Задавая величину  $\gamma$ , получите картину установившихся колебаний. Чему равна частота установившихся колебаний?

2.2. Постройте дополнительно график зависимости амплитуды установившихся колебаний от параметра  $\omega_e/\omega_0$  - резонансную кривую.

2.3. Изменяя силу трения, установите, как она влияет на высоту и ширину резонансной кривой.

### 3.2.2. Нелинейные колебания

Рассмотрим теперь в качестве колебательной системы математический маятник на стержне длиной  $R$  (см. рис.3.2). Если отклонить его от положения равновесия, или в этом положении сообщить ему некоторую начальную скорость, то тело придет в движение.

Так как составляющая силы тяжести  $F_2 = F_g \cos \alpha$  уравновешивается натяжением стержня, то тело движется только под действием составляющей  $|\mathbf{F}_1| = mg \sin \alpha$  по дуге окружности радиуса  $R$ . В любой момент времени сила  $\mathbf{F}_1$  и скорость  $\mathbf{V}$  направлены по касательной, так что движение является одномерным и характеризуется только одним параметром - углом  $\alpha$ , отсчитываемым от положения равновесия, который в данном случае можно принять за обобщенную координату. Уравнения, описывающие движение тела по окружности имеют вид:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Omega \quad (3.18)$$

$$(mR^2) \frac{d\Omega}{dt} = -(mg \sin \alpha)R, \quad (3.19)$$

где (3.18) определяет угловую скорость  $\Omega$ , а (3.19) - основное уравнение динамики вращательного движения тела с моментом инерции  $mR^2$  под действием момента сил  $|\mathbf{F}_1|R = (mg \sin \alpha)R$ . Знак "-" в формуле (3.19) означает, что сила  $\mathbf{F}_1$  всегда возвращает тело к положению равновесия.

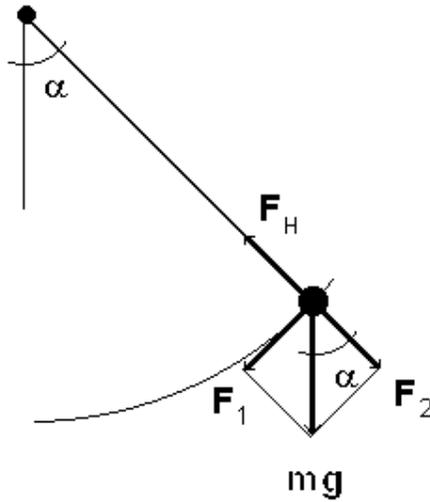


Рис.3.2

Рассмотрим сразу общий случай, когда кроме силы  $\mathbf{F}_1$  на тело действует также сила трения вида  $\mathbf{F}_r = -\beta\mathbf{V}$ . Добавляя момент этой силы в правую часть уравнения (3.19) и вводя обозначения  $\omega_0^2 = g/R$  и  $\gamma = \beta/m$ , получаем:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin \alpha - \gamma\Omega. \quad (3.19')$$

Из (3.18) и (3.19') можно получить уравнение движения в каноническом виде:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \gamma\frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0, \quad (3.20)$$

описывающее нелинейные колебания с затуханием.

Уравнения (3.18) - (3.19') следует дополнить начальными условиями, которые удобно задать в момент нахождения тела в нижней точке траектории, т.е.

$$\alpha = 0, \quad \Omega = \Omega_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (3.21)$$

В случае малой начальной скорости  $\Omega_0 \ll \omega_0$  отклонение маятника от положения равновесия также мало: угол  $\alpha \ll 1$  и  $\sin \alpha \approx \alpha$ . При этом

движение тела происходит практически по прямой линии вдоль оси  $X$ . Введем  $x = R \sin \alpha \approx R\alpha$ , тогда из (3.20) имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.22)$$

с начальными условиями:  $x = 0$ ,  $dx/dt = V_0 = \Omega_0 R$  при  $t = 0$ . Это уравнение аналогично уравнению (3.15).

При свободных колебаниях математического маятника сохраняется полная энергия  $E = mV^2/2 + mgh$ . В переменных  $\alpha$  и  $\Omega = d\alpha/dt$  выражение для энергии имеет вид :

$$E = mR^2 (\Omega^2/2 + \omega_0^2 (1 - \cos \alpha)). \quad (3.23)$$

При численном решении системы уравнений (3.18), (3.19') можно воспользоваться указанным в разделе 3.2.1. алгоритмом, где роль координаты  $x$  играет угол  $\alpha$ , а скорости  $V$ - угловая скорость  $\Omega$ . Если в качестве временного масштаба  $t_m$  выбрать период колебаний  $1/\omega_0$ , уравнение (3.20) в безразмерных переменных принимает вид:

$$\frac{d^2a}{dt^2} + g \frac{da}{dt} + \sin a = 0 \quad (3.20')$$

### Задача 3.

Нелинейные колебания без затухания. В уравнении (3.20') положите  $\gamma = 0$ . Начальные условия:  $a = 0$ ,  $da/dt = \Omega_0$  при  $t = 0$

3.1. Задайте значение  $\Omega_0 < 1$ . Почему вид фазовой траектории и графика  $\alpha(t)$  совпадает с полученными в Задаче 1, и каков характер колебаний в этом случае?

3.2. Увеличивая  $\Omega_0$ , наблюдайте изменение вида фазовой траектории и графика зависимости  $\alpha(t)$ .

3.3. Увеличивайте далее  $\Omega_0$ , добейтесь того, чтобы маятник «проскочил» верхнюю точку траектории. В этом случае кривая зависимости  $\alpha(t)$  становится неограниченно растущей, фазовая траектория – незамкнутой, а движение тела называется инфинитным, в отличие от ранее рассмотренных случаев, когда движение тела называется финитным.

3.4. Изменяя  $\Omega_0$ , максимально близко подойдите к предельной фазовой кривой, отделяющей инфинитное движение от финитного, которая называется сепаратрисой. Сохраняя начальные условия, убедитесь, что

небольшое изменение шага вычислений меняет характер движения тела, которое из финитного становится инфинитным. Этот пример показывает, что движение тела в области сепаратриссы является неустойчивым и для расчета траектории здесь необходимо пользоваться более точными методами.

#### **Задача 4.**

##### Нелинейные колебания с затуханием.

4.1. Задавая произвольное значение  $\Omega_0$ , в том числе и соответствующее инфинитному движению, наблюдайте эволюцию поведения маятника с трением (в уравнении (3.19')) при этом  $\gamma > 0$ ).

4.2. Изменив знак  $\gamma$ , и введя нулевые начальные условия, наблюдайте раскачку колебаний, вплоть до перехода к инфинитному движению.

### **3.3. Движение в силовых полях.**

В этом разделе рассмотрим движение частицы в электростатическом, магнитном и смешанном поле. Надо отметить, что в приведенных ниже задачах рассматриваются только плоские траектории движения частицы, и для их построения достаточно двух координат  $(x, y)$ .

#### **Алгоритм построения траектории движения**

Численный алгоритм вычисления траектории изложен в разделе 3.1. Конкретная его реализация выглядит следующим образом:

1. Задаются координаты начальной точки  $(x_0, y_0)$ .
2. С помощью физических законов, описывающих поле, определяются значения  $f_x, f_y$  в этой точке.
3. Путем решения уравнений (3.16), (3.17) методом Эйлера с заданным шагом по времени, определяются координаты следующей точки траектории  $(x_1, y_1)$ .
4. Шаги 1-3 повторяются для точки с координатами  $(x_1, y_1)$  и вычисляются координаты следующей точки.

Ниже приведен фрагмент программы для построения траектории движения частицы в поле силы  $\mathbf{F}(t)$ , в которой реализован модифицированный алгоритм Эйлера решения системы дифференциальных уравнений (3.16), (3.17). Точность решения определяется величиной шага по времени  $dt$ . В этом фрагменте вычисляются координаты каждой точки траектории. "**Aforce(x,y)**" - условное обозначение процедуры вычисления компонент

силы  $\mathbf{F} = (f_x, f_y)$ . Текст этой процедуры будет приведен ниже для конкретных силовых полей, рассматриваемых в Пособии. При написании программы эта процедура может быть оформлена как внутренняя для процедуры построения траектории.

.....  
 {координаты начальной точки траектории  $x_0, y_0, V_{x0}, V_{y0}$  выбираются из условия задачи}

**x:=x0;**

**y:=y0;**

**Vx:=Vx0;**

**Vy:=Vy0;**

**repeat**

**PaintBox1.canvas.Pixels[round(x), round(y)]:=clRed;** {построение траектории}

**Aforce(x,y,Vx,Vy);**

**Vx:=Vx+fx\*dt;**

**Vy:=Vy+fy\*dt;**

**x:=x+Vx\*dt;**

**y:=y+Vy\*dt;**

**until** {условие конца траектории}

.....

### 2.3.1. Движение частицы в электрическом поле неподвижного центра.

При движении заряженной частицы с зарядом  $e$  и скоростью  $\mathbf{V}$  в произвольном электромагнитном поле на нее действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (3.23)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  - электрическая и магнитная составляющие поля, являющиеся функциями координат и времени.

Рассмотрим некоторые частные случаи силы (3.23) для полей, не зависящих от времени.

В формуле (3.23) положим  $\mathbf{B} = 0$  и будем считать, что источником поля  $\mathbf{E}$  является точечный или сферический заряд  $Q$ , помещенный в начало координат. Тогда сила (3.23) описывается формулой:

$$\mathbf{F} = e \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \mathbf{r}}{r^2} \right) \quad (3.24)$$

где  $\epsilon_0$  - электрическая постоянная.

Подставляя формулу (3.24) в (3.2) получим уравнение движения в виде:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{Q \mathbf{r}}{r^2 r} \quad (3.25)$$

В реальных физических условиях в это уравнение входят параметры, отличающиеся на много порядков величины, поэтому удобно привести его к безразмерному виду, задавая характерные масштабы изменения переменных  $x_m$  и  $t_m$ , как это было сделано в разделе 3.2.1. Тогда в новых безразмерных переменных  $r', V', t'$  уравнение (3.25) будет выглядеть:

$$\frac{dV'}{dt'} = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{t_m^2}{r_m^3} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} = K \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \text{где} \quad K = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{t_m^2}{r_m^3}$$

Безразмерный коэффициент  $K$  является параметром задачи.

Система уравнений для расчета траектории принимает вид:

$$\frac{dr'}{dt'} = V' \quad (3.26)$$

$$\frac{dV'}{dt'} = \pm K \frac{r'}{r'^3}. \quad (3.27)$$

Знак "+" соответствует отталкивающему центру, знак "-" соответствует притягивающему центру.

### Притягивающий центр.

Полагаем всегда  $e > 0$ , тогда в случае  $Q < 0$  вектор  $\mathbf{F}$  направлен к центру заряда  $Q$ , т.е. поле  $\mathbf{E}$  является притягивающим. Отметим, что формула (3.24) в этом случае с точностью до обозначений совпадает с формулой, выражающей силу, действующую на частицу массой  $m$  в гравитационном поле точечного (или сферического) тела массой  $M$ :

$$\mathbf{F}_g = -m \left( G \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (3.28)$$

поэтому все дальнейшие результаты справедливы для обоих случаев.

Подставляя выражения (3.24) или (3.28) в уравнение движения (3.2) и решая систему уравнений (3.1), (3.2) можно построить траекторию движения частицы. Тип траектории зависит от начальных условий: координат  $\mathbf{r}_0$  и скорости  $\mathbf{V}_0$  в момент времени  $t = 0$ . Если начальные условия удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{V}_0 \perp \mathbf{r}_0 \quad \text{и} \quad V_0 = V_c = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e|Q|}{mr_0} \right)^{1/2} \quad (3.29)$$

то под действием силы (3.24) частица движется вокруг притягивающего центра по выделенной траектории - окружности радиуса  $r_0$  с центростремительным ускорением:

$$\mathbf{a} = - \frac{V_c^2}{r_0} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0}$$

Напомним, что при движении тела в гравитационном поле Земли (радиуса  $R_3$ ) по круговой траектории вблизи поверхности (так что  $r_0 \approx R_3$ ) скорость  $V_c$  называется "первой космической":

$$V_c = \left( G \frac{M}{R_3} \right)^{1/2} \approx 7.9 \text{ км/с}$$

При движении частицы в потенциальном поле вида (3.24) или (3.25) сохраняется полная энергия частицы:

$$W(V, r) = \frac{mV^2}{2} + \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{eQ}{r} = \text{const} \quad (3.30)$$

Величина  $W$  задается начальными условиями  $W = W(V_0, r_0)$ , а из формул (3.29), (3.30) очевидно, что  $W < 0$  при  $V_0 < \sqrt{2}V_c$  и  $W \geq 0$  при  $V_0 \geq \sqrt{2}V_c$ . В первом случае движение финитно, а траектория представляет собой замкнутую кривую - эллипс. Во втором случае движение инфинитно, а траектории представляют собой кривые, уходящие на "бесконечность": параболу при  $W = 0$  и гиперболу при  $W > 0$ . Отметим, что, как и в случае маятника, движение с  $W = 0$  соответствует сепаратриссе, разделяющей области финитного и инфинитного движения. Движение по гиперболе физически соответствует рассеянию частицы на притягивающем центре.

Теперь можно естественным образом выбрать характерные пространственные и временные масштабы  $x_m$  и  $t_m$ , использованные для приведения к безразмерному виду уравнения движения. Если принять, что

$x_m = r_0$ , а  $\frac{x_m}{t_m} = V_c = \left( \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 r_0 m} \right)^{1/2}$ , то безразмерный коэффициент  $K$  становится равным единице, и уравнение движения (3.27) принимает вид:

$$\frac{dV'}{dt'} = \pm \frac{r'}{r'^3} \quad (3.27')$$

При этом все скорости измеряются в единицах  $V_c$ , расстояния – в единицах  $r_0$ , а единицей измерения времени будет величина  $t_m = r_0/V_c = T_c/2\pi$ , где  $T_c$  - период обращения по круговой орбите радиуса  $r_0$ . В этих единицах эллиптической траектории соответствует движение с начальной скоростью  $V_0 < \sqrt{2}$ , параболе -  $V_0 = \sqrt{2}$  и гиперболе -  $V_0 > \sqrt{2}$ .

### Отталкивающий центр.

В случае  $Q > 0$  вектор  $\mathbf{F}$  направлен от центра заряда  $Q$ , т.е. поле  $\mathbf{E}$  является отталкивающим. Полная энергия в этом случае, очевидно  $W > 0$  и тип траектории - гипербола при любых начальных условиях. Реальным физическим условиям соответствует движение частицы из "бесконечности" и ее рассеяние на *отталкивающем* центре, как показано на рис.3.3. Физическому процессу рассеяния, очевидно, соответствует также движение по гиперболической траектории с  $W > 0$  в поле *притягивающего* центра. При исследовании рассеяния в качестве начальных условий для урав-

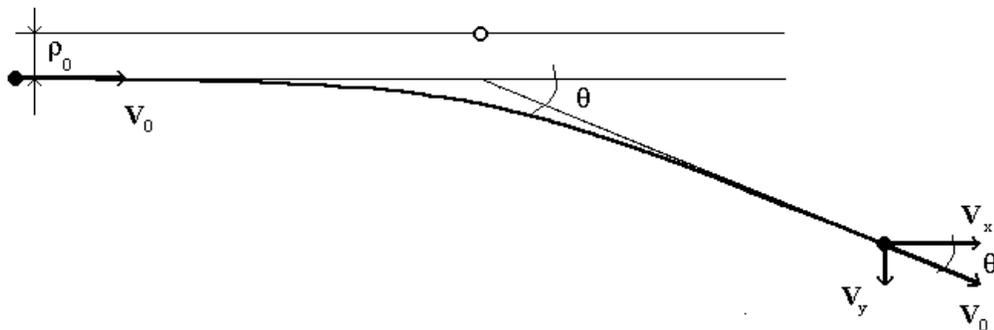


Рис.3.3

нений (3.1), (3.2) выбирают  $V_0$  и так называемый "прицельный параметр"  $\rho_0$  (см. Рис.3.3). Характеристикой рассеяния является угол рассеяния  $\theta$ .

## Алгоритм расчета силы

Для перехода к координатному представлению уравнения движения (3.27') учтем, что движение частицы в центральном поле вида (3.24) происходит, как известно, в плоскости векторов  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0)$ . Поместим заряд  $Q$  в центр экрана в точку с координатами  $(x_Q, y_Q)$ . Тогда, учитывая, что в (3.27') радиус-вектор  $\mathbf{r}$  направлен из центра заряда в точку наблюдения с координатами  $(x, y)$ , запишем:

$$\frac{dx}{dt} = V_x \qquad \frac{dy}{dt} = V_y \qquad (3.31)$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{x - x_Q}{\left[ (x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 \right]^{3/2}} \qquad (3.32)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{y - y_Q}{\left[ (x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 \right]^{3/2}} \qquad (3.33)$$

Задача сводится к решению системы уравнений (3.31) - (3.33) и нахождению  $x(t)$ ,  $y(t)$  при начальных условиях:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad V_x(0) = V_{0x}, \quad V_y(0) = V_{0y}, \qquad (3.34)$$

т.е. нахождению координат частицы в любой момент времени. Необходимо учесть, что начальное расстояние между зарядами  $r_0 = 1$  с учетом выбранного масштаба  $x_m$ , поэтому начальная точка с координатами  $(x_0, y_0)$  должна лежать на окружности единичного радиуса с центром в точке  $(x_Q, y_Q)$ . Выведенная на экран последовательность точек с координатами  $x(t)$ ,  $y(t)$  образует траекторию частицы.

Система уравнений (3.31)-(3.34) с начальными условиями (3.35) решается с помощью алгоритма, описанного в пункте 3.1.

Ниже приведен фрагмент программы для нахождения силы, стоящей в правой части формул (3.32), (3.33). Процедура **EForce(x,y)** может быть оформлена как внутренняя для процедуры построения траектории.

.....

**Procedure EForce(x,y:real);**

**var**

**r: real;**

**begin**

**r:=sqrt(sqr(x-xq)+sqr(y-yq));**

**fx:=(x-xq)/(r\*r\*r);**

```

fy:=(y-yq)/(r*r*r);
end;

```

.....

### Задания.

1.1. Для притягивающего центра задать  $x_0 = x_Q - 1$ ,  $y_0 = y_Q$ ,  $V_{0x} = 0$  и изменяя  $V_{0y}$  проследить, как изменяется вид траектории. Получить круговую и эллиптическую траекторию. Как отличаются траектории при  $V_{0y} < 1$  и при  $V_{0y} > 1$ ?

1.2. Построить зависимость полной энергии от времени  $W(t)$ . Проверить сохранение энергии при движении в потенциальном поле.

1.3. Исследовать изменение траектории движения с увеличением  $V_{0y}$ , когда при увеличении  $V_{0y}$  проходит через значение  $\sqrt{2}$ . Какой вид имеет траектория движения при  $V_{0y} > \sqrt{2}$ ? Каково при этом соотношение кинетической и потенциальной энергий? Проверить влияние шага вычислений на вид траектории при  $V_{0y} = \sqrt{2}$ .

1.4. Для отталкивающего центра задать начальные условия, соответствующие движению частицы из "бесконечности". Физически это означает, что

$$\frac{mV_0^2}{2} \gg \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

то есть  $V_0 \gg \sqrt{2}V_c$ . Задать начальные условия  $x_0 = x_Q - r_0$ ,  $y_0 = y_Q - \rho_0$ ,  $V_{0x} = V_0$ ,  $V_{0y} = 0$ . Изменяя  $\rho_0$  получить траектории рассеяния частицы.

1.5. Найти угол рассеяния  $\theta$ . Как видно из рис.3.3  $\text{tg } \theta \approx V_y/V_x$ , где компоненты скорости надо брать "вдали" от рассеивающего центра. Для проверки условия "удаленности" от рассеивающего центра, ведите расчет угла  $q$  при фиксированных начальных условиях до тех пор, пока его величина не перестанет изменяться в пределах заданной точности счета. Проверьте это условие также для начальной точки. Найти эффективный радиус рассеивающего центра, определяемый как прицельный параметр  $\rho$ , при котором  $\theta = \pi/2$ .

### 3.3.2. Движение частицы в магнитном поле.

Положим в формуле (3.23)  $\mathbf{E} = 0$ , тогда сила, действующая на частицу, имеет вид:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (3.36)$$

а система уравнений (3.1), (3.2) для нахождения траектории частицы:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} \quad (3.37)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (3.38)$$

Пусть направление вектора магнитной индукции не меняется в пространстве. Введем  $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ , где  $\mathbf{b}$  - единичный вектор в направлении  $\mathbf{B}$ , а  $B$  - абсолютная величина магнитной индукции. Тогда (3.38) можно записать в виде:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{eB}{m} \mathbf{V} \times \mathbf{b} = \omega_B (\mathbf{V} \times \mathbf{b}) \quad (3.39)$$

где  $\omega_B$  имеет размерность  $\text{с}^{-1}$  и называется циклотронной частотой.

Удобно рассматривать движение частицы в плоскости  $(X, Y)$ , перпендикулярной вектору  $\mathbf{B}$ . Тогда уравнения (3.37) и (3.39) будут иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \quad \frac{dy}{dt} = V_y \quad (3.40)$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \omega_B V_y, \quad \frac{dV_y}{dt} = -\omega_B V_x \quad (3.41)$$

Уравнения (3.40), (3.41) решаются по алгоритму, описанному в п. 3.1 со стандартными начальными условиями (3.33). Для постоянного магнитного поля  $\mathbf{B} = \text{const}$  в качестве характерного временного масштаба  $t_m$  естественно взять величину  $t_m = 1/\omega_B$ , характеризующую период вращения с циклотронной частотой. Тогда в безразмерных переменных уравнения (3.41) будут выглядеть:

$$\frac{dV'_x}{dt'} = V'_y, \quad \frac{dV'_y}{dt'} = -V'_x \quad (3.41')$$

## Задания.

1.1. Пусть  $V = \text{const}$ . Построить траекторию частицы для разных значений  $V_0$ . Сравнить с известным аналитическим решением. Изменяя шаг вычислений, проверить его влияние на форму траектории. Объяснить полученный результат. Найти период движения и сравнить его с величиной  $2\pi/\omega_B$ . Проверить, зависит ли период движения от начальной скорости.

1.2. Пусть теперь  $V = V(y)$ , где функция  $V(y)$  имеет вид:

а)  $V = V_0 \exp(y/L)$ ,

б)  $V = V_0(y/L)$ .

Привести к безразмерному виду полученные уравнения движения. Выбрать характерный временной масштаб. Построить траекторию движения частицы. Исследовать случаи  $V_0 < L\omega_{B_0}$  и  $V_0 > L\omega_{B_0}$ . Пояснить вид траектории в обоих случаях. Написать программу для определения скорости дрейфа.

1.3. Полагая поле  $V = \text{const}$ , добавить однородное электрическое поле вида:  $\mathbf{E} = \text{const}$ , причем  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  (скрещенные поля). Привести к безразмерному виду полученные уравнения движения. Выбрать в качестве характерного временного масштаба величину  $1/\omega_B$ . Какой вид будут иметь при этом уравнения движения? Построить траекторию движения. Пояснить вид траектории. Написать программу для определения скорости дрейфа. Определить зависимость скорости дрейфа от отношения  $E/B$ .