
Lecture 3: QM SRs for Form Factors
QCD SRs for ρ - and π -mesons

A. P. Bakulev

Bogolyubov Lab. Theor. Phys., JINR (Dubna, Russia)

July 8, 2005

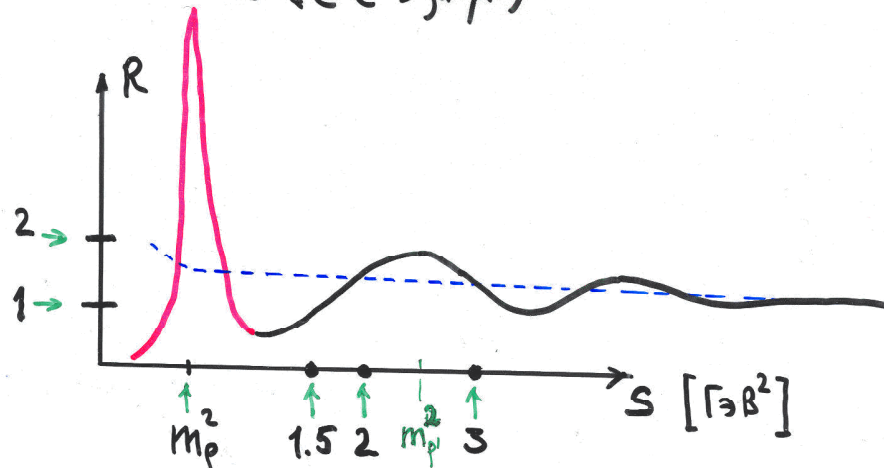
Contents

- QCD Sum Rules for ρ - and π -mesons.
- Form factor: what's this and how to use.
- Quantum-mechanical toy model: 2D harmonic осциллятор.
- Sum Rules for oscillator form factor.

QCD Sum Rules
for
 ρ - and π -mesons

КХД пс для ρ -мезона: Эксперимент.

$$R^I(s) = \frac{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{hadr}, I=1)}{\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)} = 12\pi^2 \rho(s)$$



$$R_\rho = 12\pi^2 \left\{ \left[\frac{f_\rho}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} \right\} \delta(s - m_\rho^2)$$

data booklet:

$$m_\rho^2 \approx (0.77 \Gamma^3 B)^2 \approx 0.6 \Gamma^3 B^2; \quad \Gamma(\rho \rightarrow e^-e^+) \approx 6.77 \text{ keV}$$

$$\Gamma(\rho \rightarrow e^-e^+) = \frac{4\pi}{3} \alpha_{em}^2 \times \left\{ \frac{m_\rho}{g_\rho^2} \right.$$

$$\left. \left(\frac{f_\rho m_\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{m_\rho^3} \right.$$

$$\frac{g_\rho^2}{4\pi} \approx 2.36 \pm 0.18$$

$$\frac{f_\rho}{\sqrt{2}} \approx 0.152 \Gamma^3 B$$

Теория ρ-мезона

Ток $j_\mu^{(\rho)} = \frac{1}{2} (\bar{u} \gamma_\mu u - \bar{d} \gamma_\mu d)$ - для ρ⁰-мезона

$$(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \cdot \Pi^{(\rho)}(-q^2) = i \int e^{iqx} \langle 0 | T(j_\mu^{(\rho)}(x) j_\nu^{(\rho)}(0)) | 0 \rangle d^4x$$

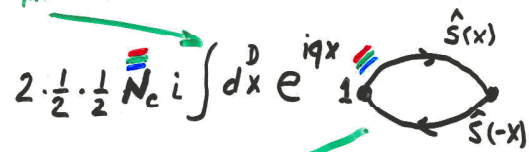
$$\hat{B}_{(M^2 \rightarrow Q^2)} \Pi^{(\rho)}(Q^2) = \int_0^\infty \frac{e^{-s/M^2}}{M^2} \frac{R(s)}{12\pi^2} ds$$

↑
Вычисляем

↓
Представляем

↓
Π_{MV}^(ω) + ...

$$\int_0^\infty \delta(s - m_\rho^2) + \theta(s - s_0) \rho(s)$$



$$- \text{Tr} \left[\gamma^M \frac{i \hat{x}}{2\pi^2 x^4} \gamma^N \frac{-i \hat{x}}{2\pi^2 x^4} \right] = - \left(\frac{2x^M x^N - g^{MN} x^2}{x^8} \right) \frac{4}{(2\pi^2)^2}$$

$$\partial_\mu j_\mu(x) = 0 \rightarrow \partial_\mu \{ \quad \} = 0 \quad \text{на гом}$$

$$= - \frac{1}{8\pi^2} \ln(Q^2/\mu^2) [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}]$$

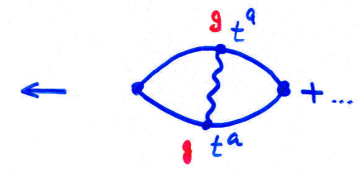
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Pi_0(Q^2)}$

$$\rho \rightarrow \hat{B} \Pi_0(Q^2) = \frac{1}{8\pi^2} \rightarrow R_0 = \frac{3}{2}$$

Правила сумм

$$\int_0^\infty e^{-s/M^2} R(s) ds = \frac{3}{2} M^2 \times$$

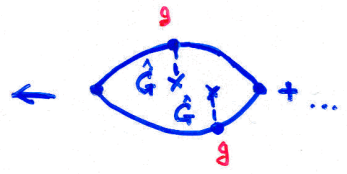
$$\left(1 + \underbrace{C_F \cdot \frac{3}{4}}_1 \frac{d_s(M^2)}{\pi} \right)$$



+

$$\frac{\pi^2}{3 M^4} \left\langle \frac{d_s}{\pi} G^2 \right\rangle$$

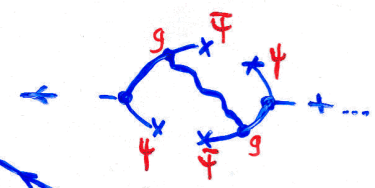
$1.2 \cdot 10^2 \text{ ГэВ}^2$



+

$$- \frac{448 \pi^3}{81 M^6} \left\langle d_s^{1/2} \bar{q} q \right\rangle^2$$

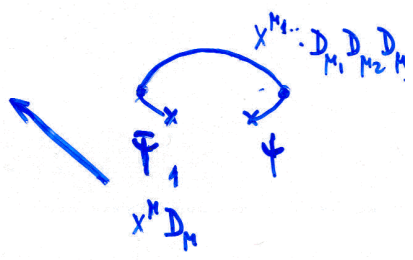
$1.83 \cdot 10^{-4} \text{ ГэВ}^6$



+

$$\frac{\langle m_u \bar{u} u \rangle + \langle m_d \bar{d} d \rangle}{M^4}$$

$$- f_\pi^2 m_\pi^2 \frac{1}{2} = -1.7 \cdot 10^{-4} \text{ ГэВ}^4$$



Качественная оценка

$$\int e^{-s/M^2} R(s) ds =$$

$$\frac{3}{2} M^2 \left[1 + \frac{d_s}{\pi} + 0.1 \cdot \left(\frac{0.6 \Gamma_B^2}{M^2} \right)^2 - 0.14 \cdot \left(\frac{0.6}{M^2} \right)^3 \right]$$

$$M^2 = m_p^2 = 0.6 \Gamma_B^2 \left[\text{"Половинная задача в км"} \right]$$

$$\int e^{-s/m_p^2} R(s) ds = \frac{3}{2} m_p^2 \left[1 + \underbrace{0.2 + 0.1 - 0.14}_{\uparrow} \right]$$

$$\frac{12\pi^2 m_p^2}{g_p^2} \delta(s - m_p^2) + \text{Res.} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Пренебрежём} \\ \text{одновременно} \end{array}$$

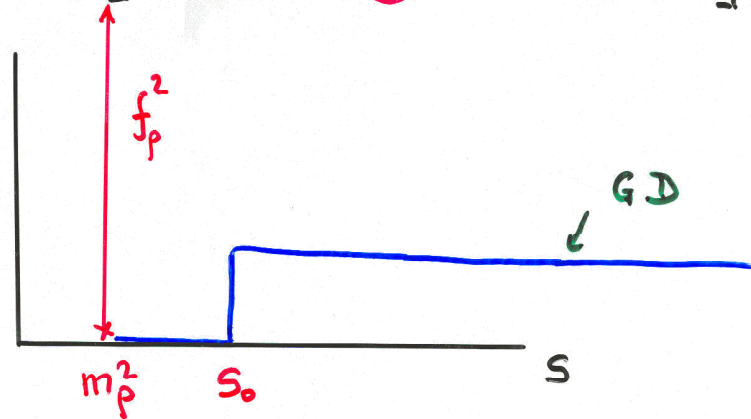
$$\frac{12\pi^2 m_p^2}{g_p^2} e^{-1} \approx \frac{3}{2} m_p^2$$

$$\frac{g_p^2}{4\pi} = \frac{2\pi}{e} \approx 2.3 \text{ vs } 2.36 \pm 0.18$$

!

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА

$$R(s) \rightarrow R^{ph}(s) = \left[12\pi^2 \frac{f_p^2}{2} \delta(s - m_p^2) + \theta(s - s_0) \frac{3}{2} \left(1 + \frac{s}{\pi}\right) \right]$$



(1) Строим "догерние ПС" $\partial(-1/m^2)$

(2) Обрабатываем Δ ПС: $m_p^2(s_0, M^2) \rightarrow m_p^2$

$$\text{ПС: } f_p(s_0, M^2) \rightarrow f_p$$

$$* \text{ LD: } \left(\frac{f_p}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{s_0}{8\pi^2} \rightarrow \frac{f_p}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{s_0/2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{1.5/2}}{2\pi} \approx 0.15$$

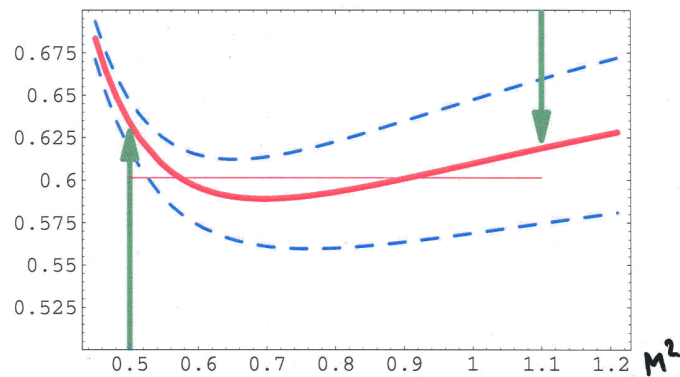
Масса и "лептонная константа" ρ -мезона

$$m_\rho^2 \approx 0.6 \pm 0.01 \text{ ГэВ}^2; \frac{1}{\sqrt{2}}f_\rho \approx 0.149; s_0 \approx 1.5 \text{ ГэВ}^2$$

Эксп.: 0.602

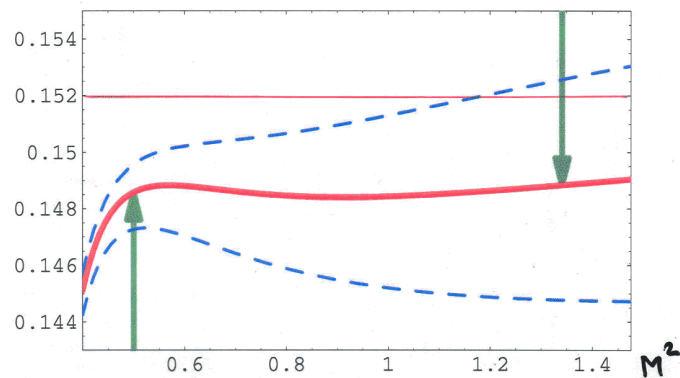
0.152

График $m_\rho^2(M^2, s_0)$



Хорошо

График $\frac{1}{\sqrt{2}}f_\rho(M^2, s_0)$



Блестяще!

КХД ПС: аксиальный коррелятор

Рассмотрим коррелятор $F_{x \rightarrow q} \langle T [j_{\mu 5}^\dagger(x) j_{\nu 5}(0)] \rangle$ аксиальных токов

$$J_{\mu 5}^\dagger(x) = \bar{d}(x) \gamma_\mu \gamma_5 u(x) \quad \text{и} \quad J_{\nu 5}(0) = \bar{u}(0) \gamma_\nu \gamma_5 d(0).$$

Пионная константа распада определяется матричным элементом $\langle 0 | \bar{d}(0) \gamma_\mu \gamma_5 u(0) | \pi(P) \rangle = i f_\pi P_\mu$.

КХД ПС: аксиальный коррелятор

Рассмотрим коррелятор $F_{x \rightarrow q} \langle T [j_{\mu 5}^\dagger(x) j_{\nu 5}(0)] \rangle$ аксиальных токов

$$J_{\mu 5}^\dagger(x) = \bar{d}(x) \gamma_\mu \gamma_5 u(x) \quad \text{и} \quad J_{\nu 5}(0) = \bar{u}(0) \gamma_\nu \gamma_5 d(0).$$

Пионная константа распада определяется матричным элементом $\langle 0 | \bar{d}(0) \gamma_\mu \gamma_5 u(0) | \pi(P) \rangle = i f_\pi P_\mu$. Этот коррелятор разлагается в сумму

$$\Pi_{5\mu 5\nu}(q) = g_{\mu\nu} \Pi_1(Q^2) + q_\mu q_\nu \Pi_2(Q^2).$$

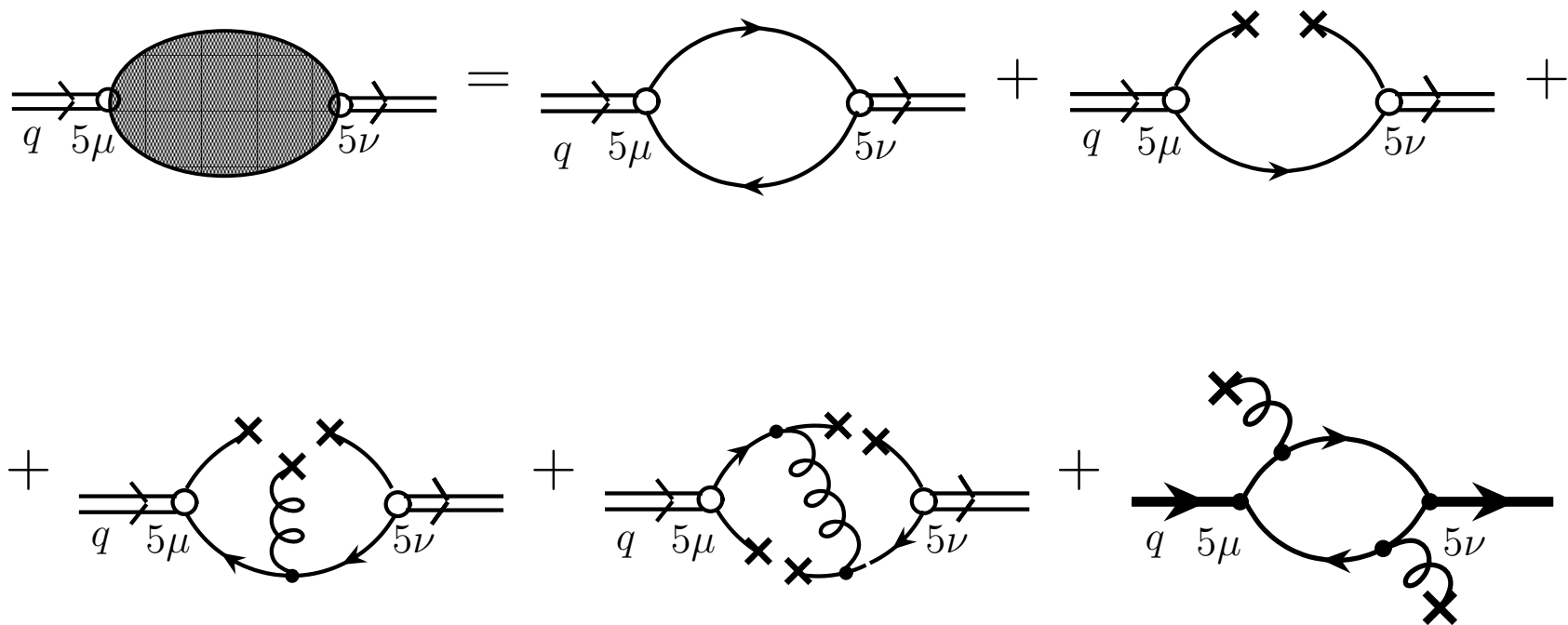
Нас будет интересовать коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале.

КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.

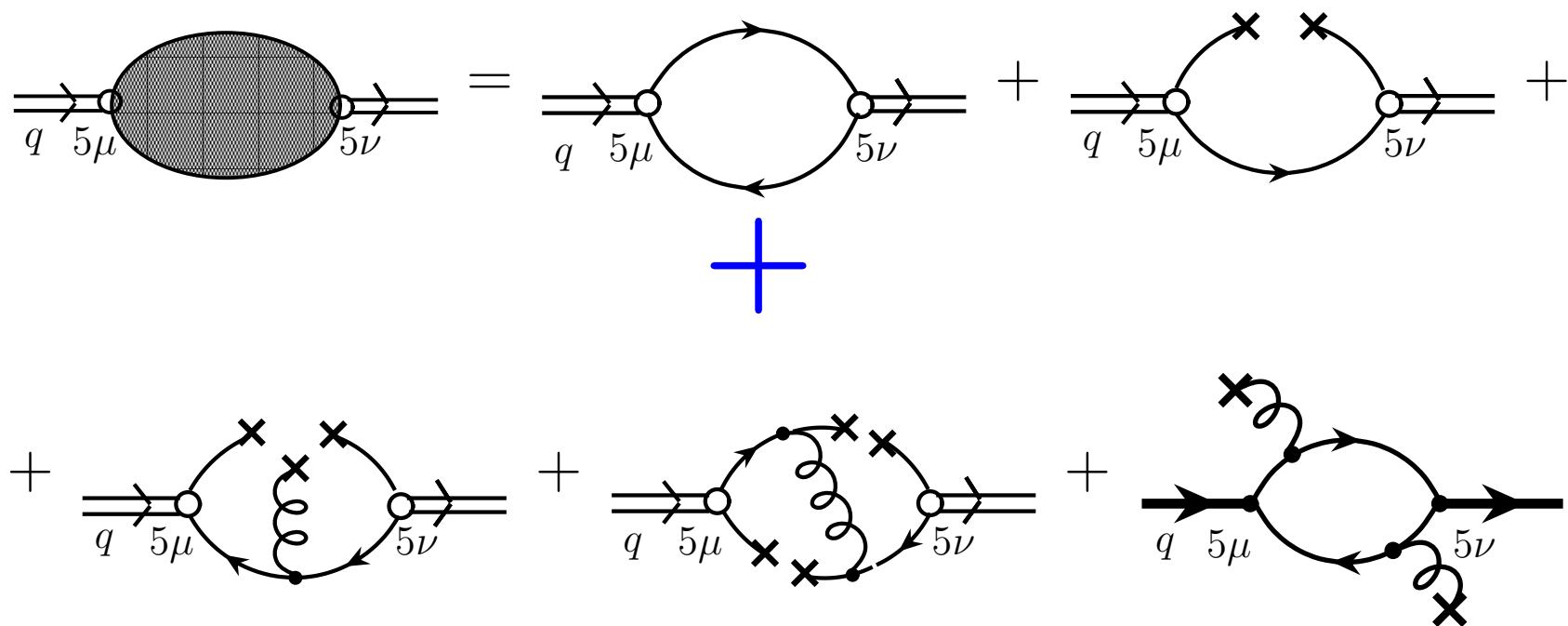
КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



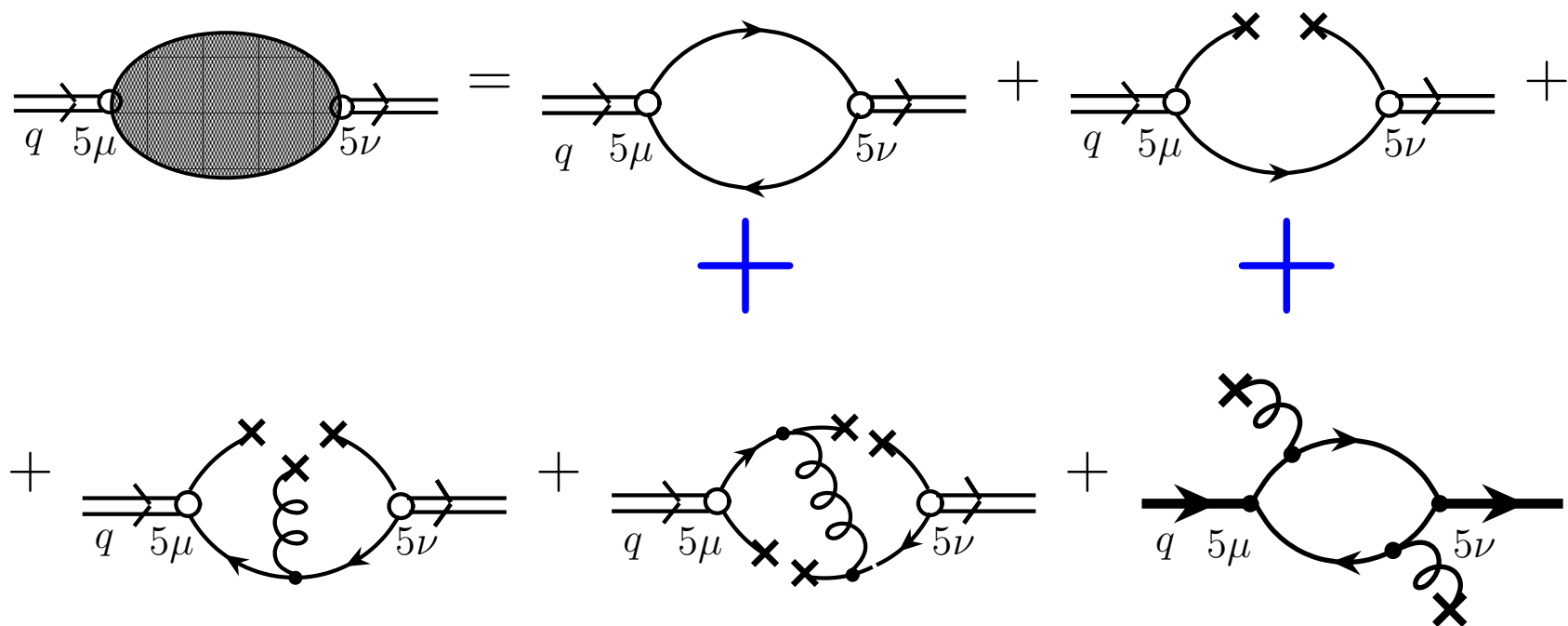
КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



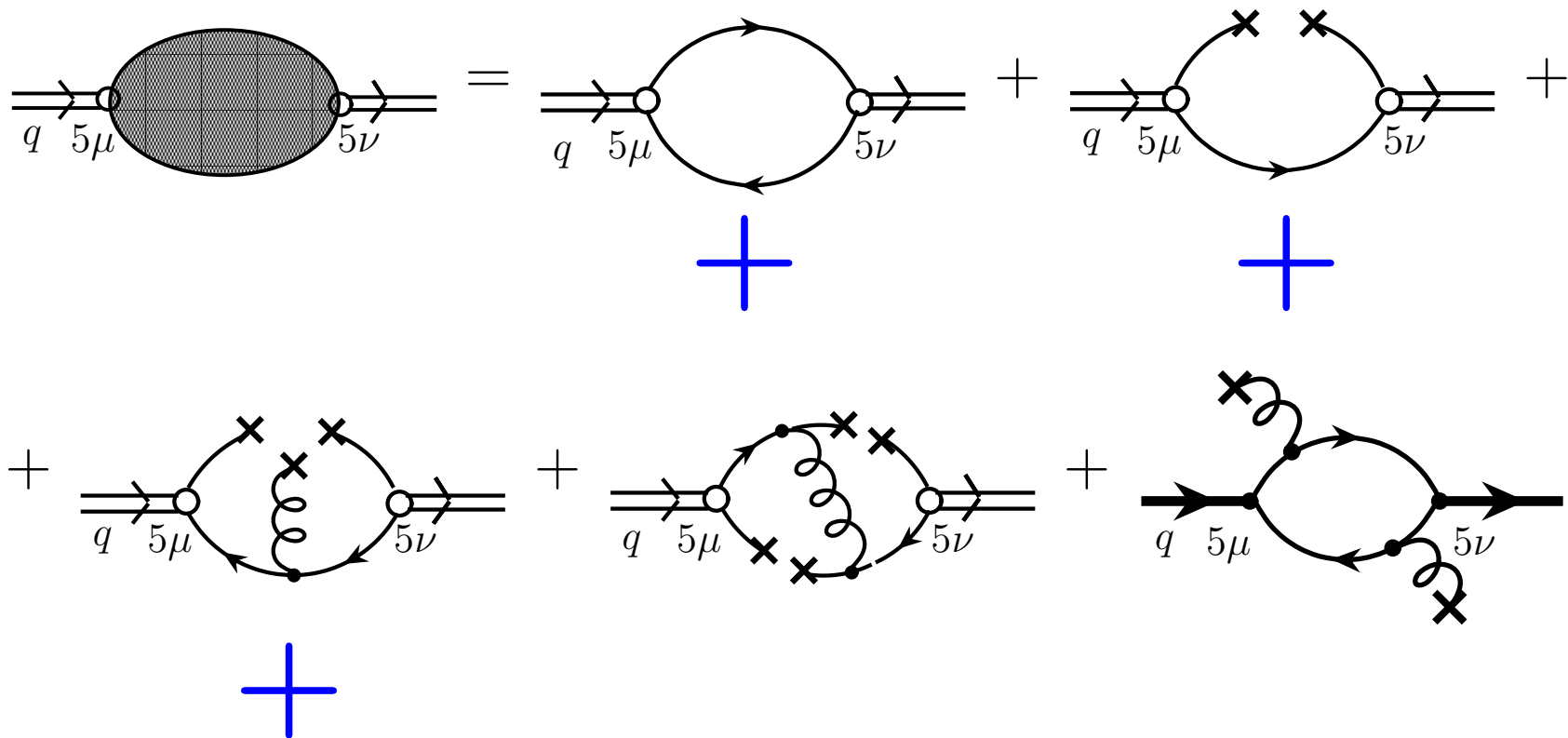
КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



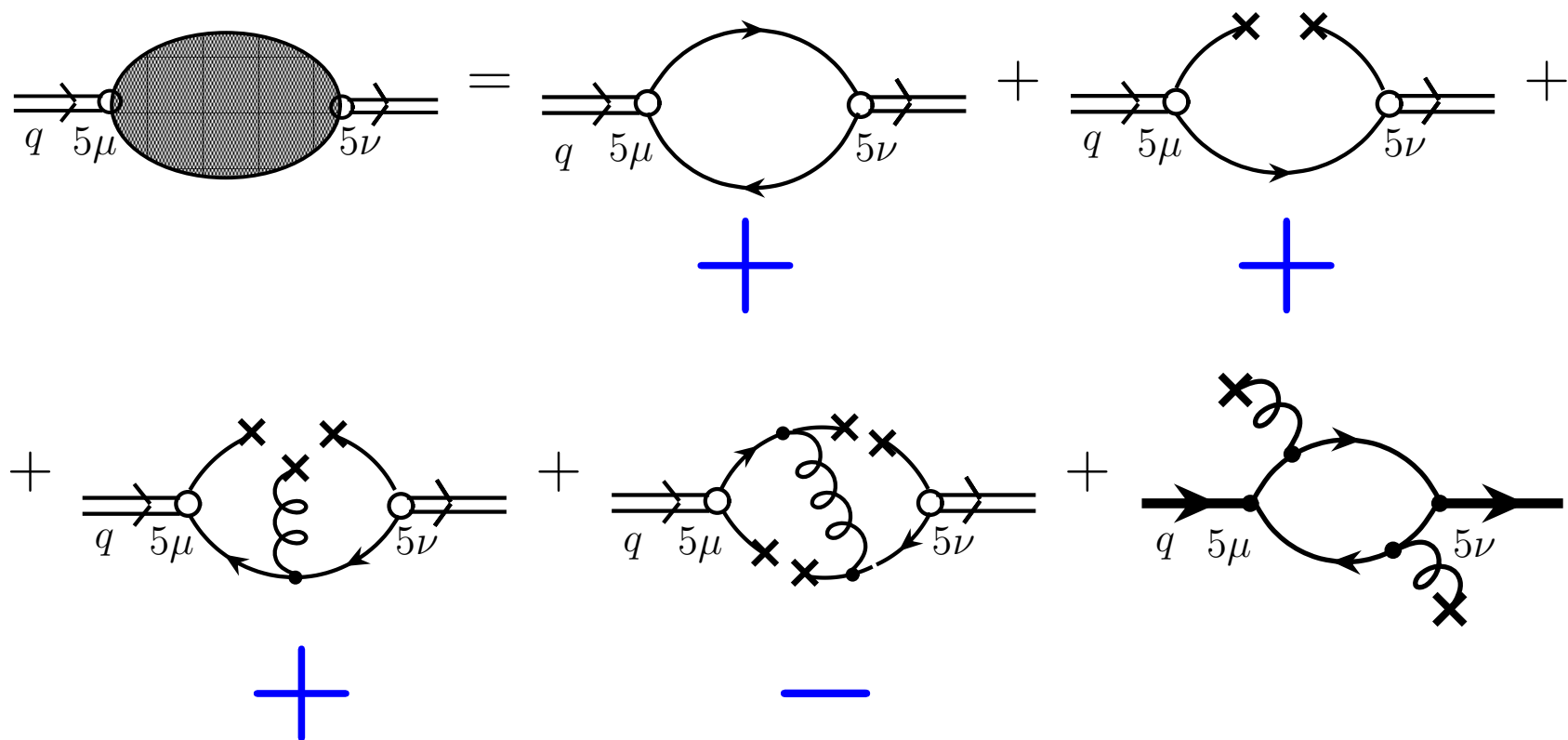
КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



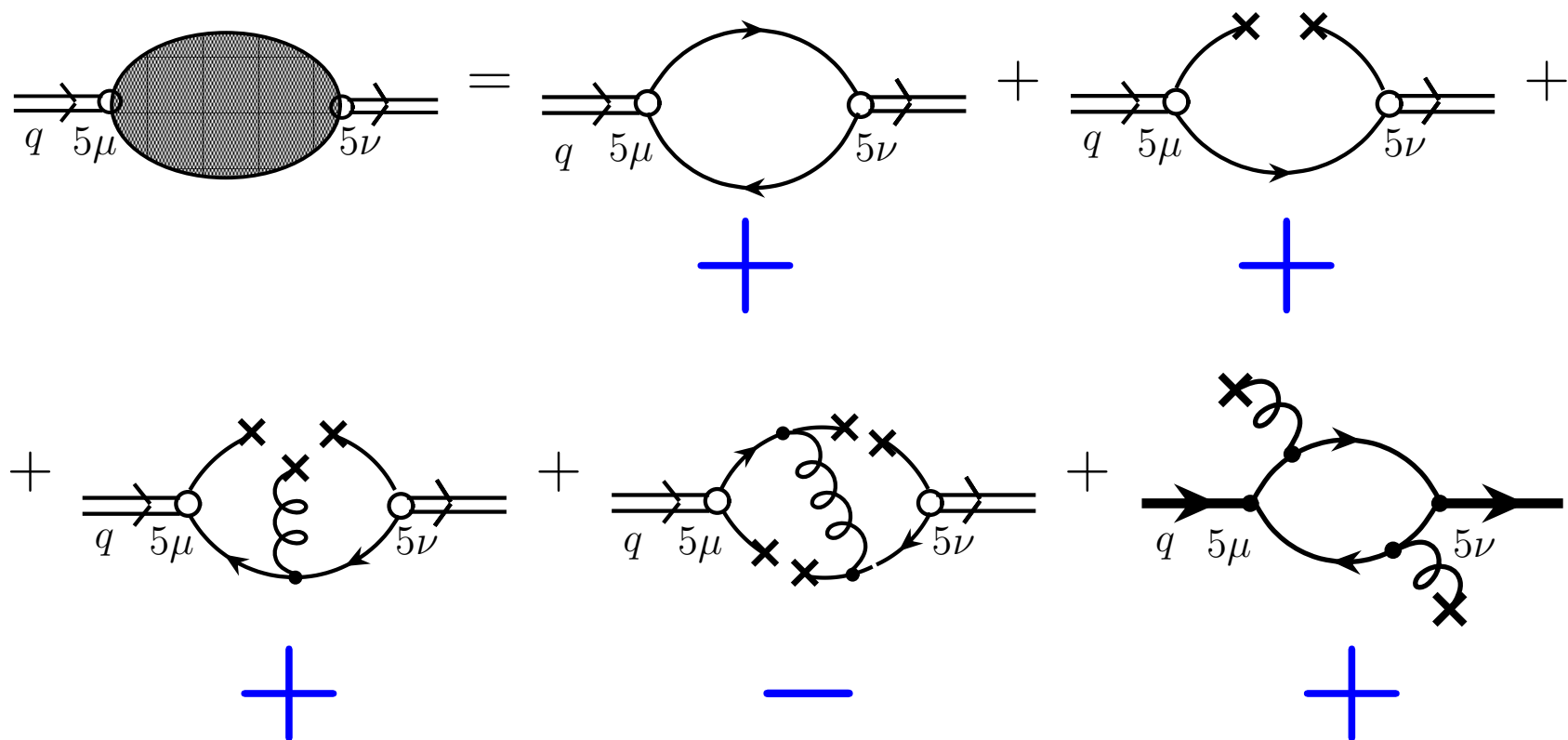
КХД ПС: пионная константа распада

Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



КХД ПС: пионная константа распада

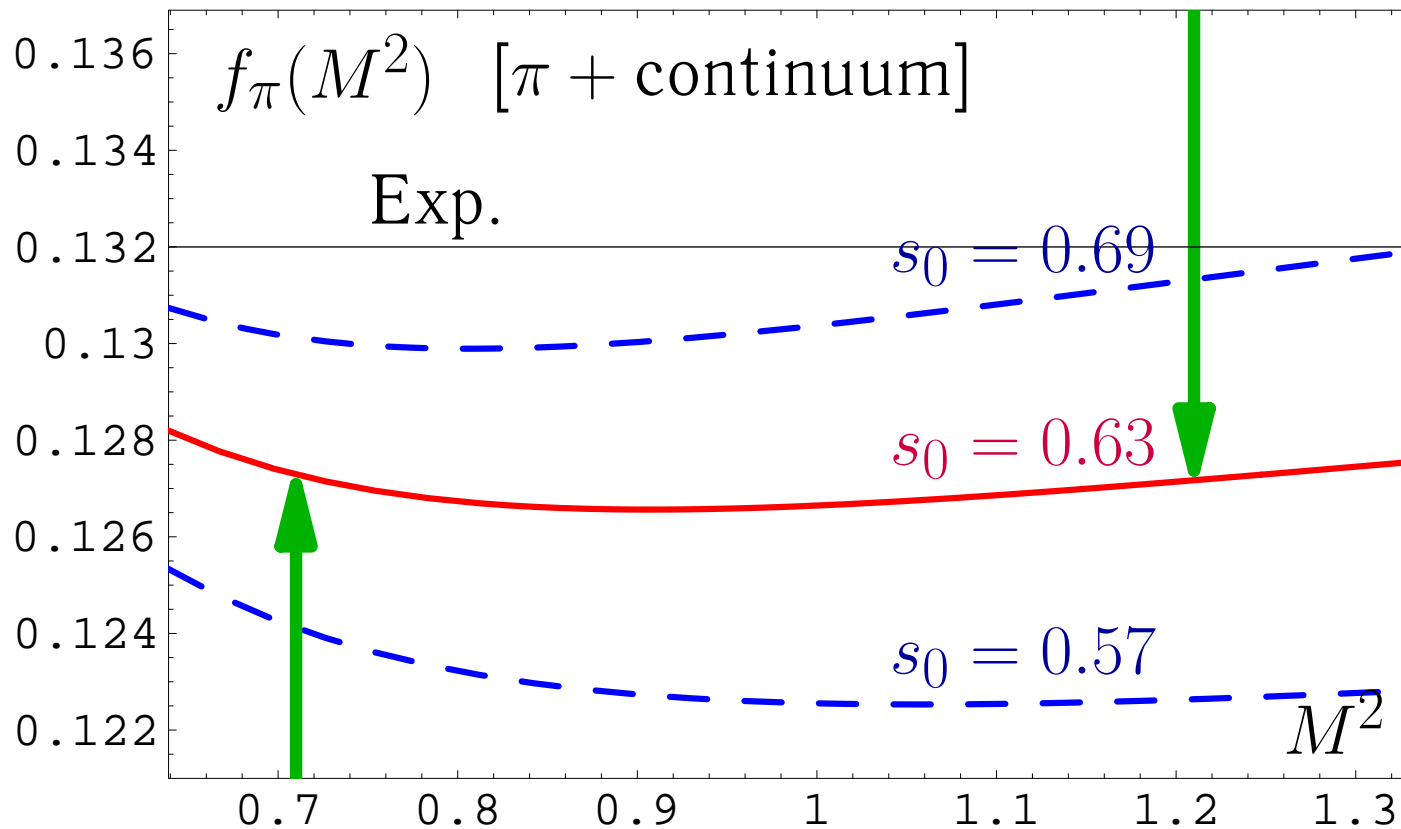
Рассмотрим коррелятор $\Pi_2(Q^2)$, который очень похож по расчету на коррелятор $\Pi_V(Q^2)$ в векторном канале. Все отличие – в наличии 2 γ_5 -матриц в вершинах.



КХД ПС: графики для f_π

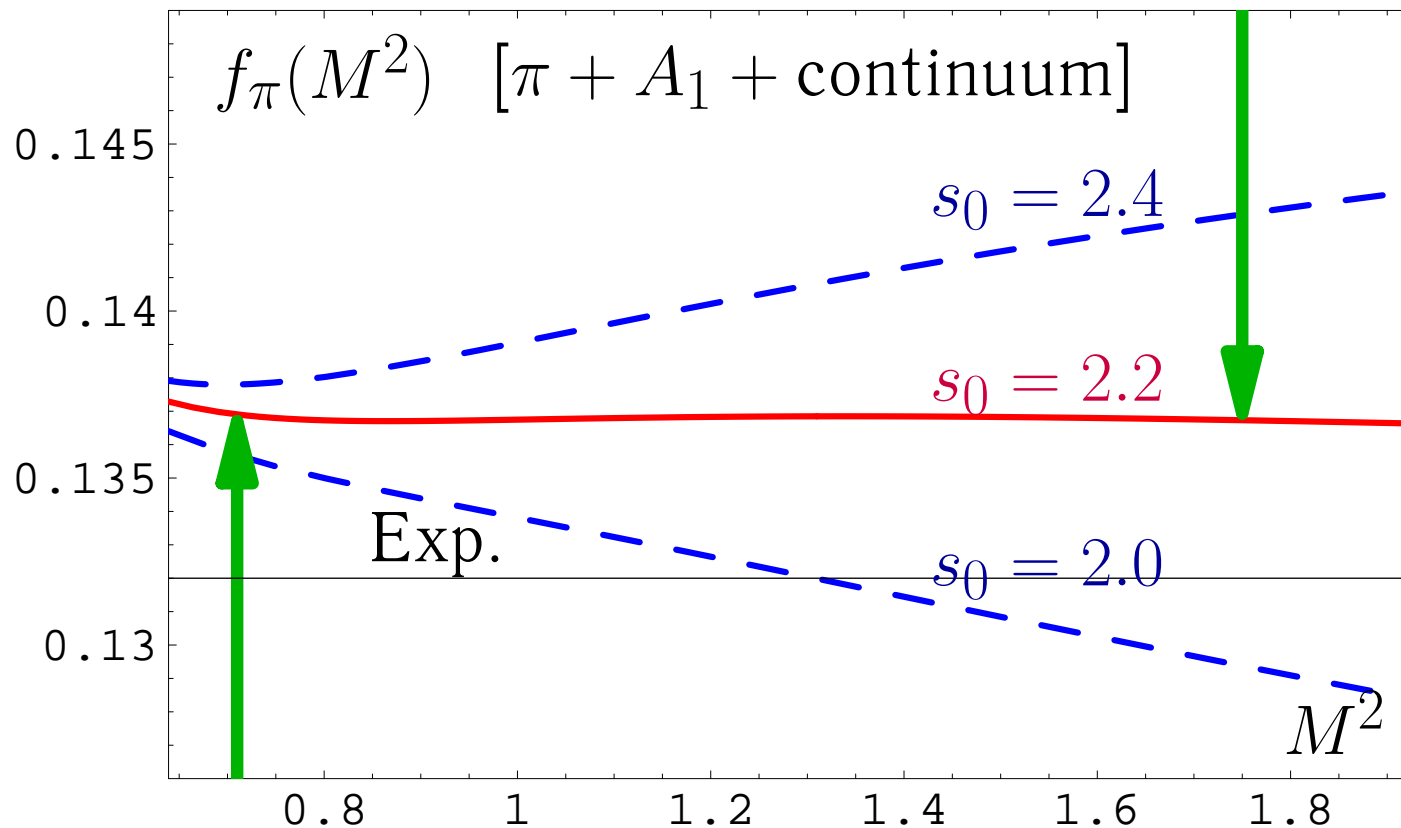
В результате получается следующее правило сумм

$$f_\pi^2 = \frac{M^2}{4\pi^2} \left(1 - e^{-s_0/M^2}\right) \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right] + \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle}{12M^2} + \frac{176}{81} \frac{\pi\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{M^4} .$$



КХД ПС: графики для f_π

В модели с A_1 -мезоном получается чуть большее значение $f_\pi = 0.137 \pm 0.13$ ГэВ, которое следует сравнить с $f_\pi^{\text{exp}} = 0.132$ ГэВ.



Локальная дуальность для f_π

В подходе локальной дуальности получим следующее соотношение

$$4\pi^2 f_{\pi;\text{LD}}^2 = s_0^{\text{LD}} \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right]$$

Оно дает значение $f_{\pi;\text{LD}} = 0.136$ ГэВ для определенного нами порога $s_0 = 0.63$ ГэВ².

Локальная дуальность для f_π

В подходе локальной дуальности получим следующее соотношение

$$4\pi^2 f_{\pi;\text{LD}}^2 = s_0^{\text{LD}} \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right]$$

Оно дает значение $f_{\pi;\text{LD}} = 0.136$ ГэВ для определенного нами порога $s_0 = 0.63$ ГэВ².

Экспериментальное значение $f_\pi^{\text{exp}} = 0.132$ ГэВ дает нам наилучшее значение порога в подходе ЛД без учета α_s -поправки

$$s_0^{\text{LD}} \simeq 0.70 \text{ ГэВ}^2$$

Локальная дуальность для f_π

В подходе локальной дуальности получим следующее соотношение

$$4\pi^2 f_{\pi;\text{LD}}^2 = s_0^{\text{LD}} \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right]$$

Оно дает значение $f_{\pi;\text{LD}} = 0.136 \text{ ГэВ}$ для определенного нами порога $s_0 = 0.63 \text{ ГэВ}^2$.

Экспериментальное значение $f_\pi^{\text{exp}} = 0.132 \text{ ГэВ}$ дает нам наилучшее значение порога в подходе ЛД без учета α_s -поправки

$$s_0^{\text{LD}} \simeq 0.70 \text{ ГэВ}^2$$

и в 1-петлевом приближении:

$$s_0^{\text{LD};1\text{-loop}} = 0.59 \text{ ГэВ}^2$$

Form factor:

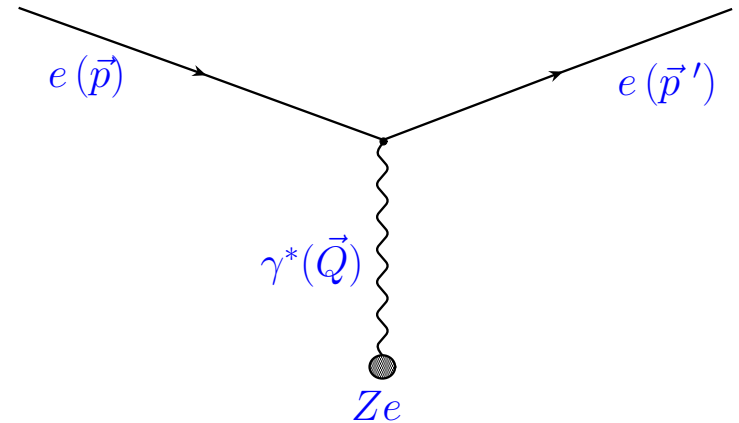
What is this?

How to use?

Form factor: what is this?

Consider scattering of fast electrons off heavy point charge:

$$\vec{p} + \vec{Q} = \vec{p}'$$

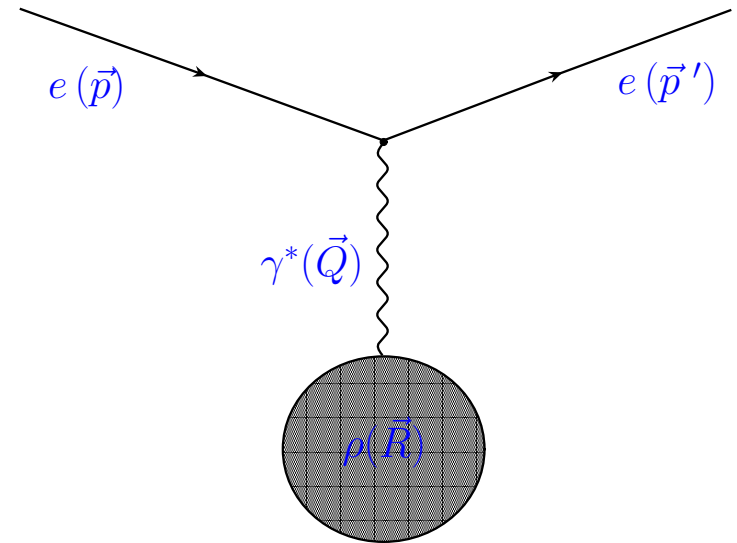


Quantum-mechanical scattering theory gives us cross section of scattering at angle θ for the case of a point massive charge Ze :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2e^4}{\hbar^4Q^4} Z^2.$$

Form factor: what is this?

For scattering of fast electrons off charge distribution $e\rho(\vec{R})$



cross section changes to:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2 e^4}{\hbar^4 Q^4} F(Q)^2 .$$

Form factor: what is this?

Form factor is defined as:

$$F(Q) \equiv \int d^3 \vec{R} \rho(\vec{R}) e^{-i\vec{Q}\vec{R}}.$$

Its evident property:

$$F(0) \equiv \int \rho(\vec{R}) d^3 \vec{R} =$$

Form factor: what is this?

Form factor is defined as:

$$F(\vec{Q}) \equiv \int d^3 \vec{R} \rho(\vec{R}) e^{-i\vec{Q}\vec{R}}.$$

Its evident property:

$$F(0) \equiv \int \rho(\vec{R}) d^3 \vec{R} = Z_{\text{total}},$$

form factor value at $Q = 0$ determines the net charge of the system (in units e).

Form factor: what is this?

Form factor is defined as:

$$F(\vec{Q}) \equiv \int d^3 \vec{R} \rho(\vec{R}) e^{-i\vec{Q}\vec{R}}.$$

Its evident property:

$$F(0) \equiv \int \rho(\vec{R}) d^3 \vec{R} = Z_{\text{total}},$$

form factor value at $Q = 0$ determines the net charge of the system (in units e). In case of spherical symmetry

$\rho(\vec{R}) = f(R)$ one has

$$F(\vec{Q}) =$$

Form factor: what is this?

Form factor is defined as:

$$F(\vec{Q}) \equiv \int d^3 \vec{R} \rho(\vec{R}) e^{-i\vec{Q}\vec{R}}.$$

Its evident property:

$$F(0) \equiv \int \rho(\vec{R}) d^3 \vec{R} = Z_{\text{total}},$$

form factor value at $Q = 0$ determines the net charge of the system (in units e). In case of spherical symmetry

$\rho(\vec{R}) = f(R)$ one has

$$F(\vec{Q}) = \hat{F}(Q = \sqrt{Q^2}) = \frac{4\pi}{Q^3} \int_0^\infty f\left(\frac{z}{Q}\right) \sin(z) z dz.$$

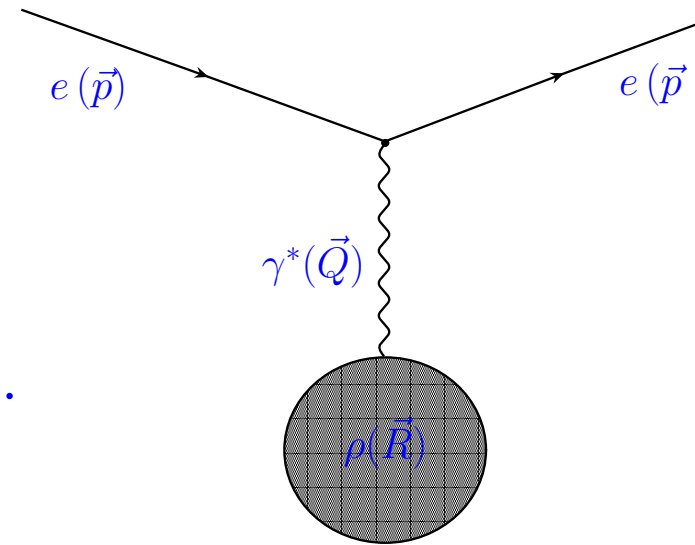
Form factor: resume

So, form factor

$$F(Q) \equiv \int d^3 \vec{R} \rho(\vec{R}) e^{-i\vec{Q}\vec{R}}$$

is needed to obtain cross section:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2 e^4}{\hbar^4 Q^4} F(Q)^2.$$



Quantum-mechanical toy model:

Two-Dimensional Harmonic Oscillator

Two-Dimensional Oscillator

Form factors are defined as follows

$$F_{kl}(Q^2) = \int \psi_k^*(x) \psi_l(x) e^{iQx} d^2x = \int \Psi_k^*(p) \Psi_l(p + Q) \frac{d^2p}{(2\pi)^2}.$$

We will be interested in FF of the ground state $F_{00}(Q^2)$.

Two-Dimensional Oscillator

Form factors are defined as follows

$$F_{kl}(Q^2) = \int \psi_k^*(x) \psi_l(x) e^{iQx} d^2x = \int \Psi_k^*(p) \Psi_l(p + Q) \frac{d^2p}{(2\pi)^2}.$$

We will be interested in FF of the ground state $F_{00}(Q^2)$.
It appears that higher state contributions can be well approximated by

“higher states” = “free states” outside square $(0, s_0) \otimes (0, s_0)$

Two-Dimensional Oscillator

Form factors are defined as follows

$$F_{kl}(Q^2) = \int \psi_k^*(x) \psi_l(x) e^{iQx} d^2x = \int \Psi_k^*(p) \Psi_l(p + Q) \frac{d^2p}{(2\pi)^2}.$$

We will be interested in FF of the ground state $F_{00}(Q^2)$.
As a result we have Sum Rule (SR):

$$F_{00}(Q^2) = \int_0^{s_0} \int_0^{s_0} \frac{\rho_0(s_1, s_2, Q^2)}{|\psi_0(0)|^2} e^{-(s_1+s_2-2E_0)/\mu} ds_1 ds_2$$

+ “power corrections”

Two-Dimensional Oscillator

Form factors are defined as follows

$$F_{kl}(Q^2) = \int \psi_k^*(x) \psi_l(x) e^{iQx} d^2x = \int \Psi_k^*(p) \Psi_l(p + Q) \frac{d^2p}{(2\pi)^2}.$$

We will be interested in FF of the ground state $F_{00}(Q^2)$.
As a result we have Sum Rule (SR):

$$F_{00}(Q^2) = \int_0^{s_0} \int_0^{s_0} \frac{\rho_0(s_1, s_2, Q^2)}{|\psi_0(0)|^2} e^{-(s_1+s_2-2E_0)/\mu} ds_1 ds_2$$
$$+ e^{2E_0/\mu} \left[\frac{C_2(Q^2)}{|\psi_0(0)|^2} \frac{E_0^2}{\mu^2} + \frac{C_4(Q^2)}{|\psi_0(0)|^2} \frac{E_0^4}{\mu^4} + \dots \right]$$

Form factor of 2D oscillator

We will study FF $F_{kl}(Q^2) = \int \psi_k^*(x) \psi_l(x) e^{iQx} d^2x$

Form factor of 2D oscillator

We will study FF $F_{kl}(Q^2) = \int \psi_k^*(x) \psi_l(x) e^{iQx} d^2x$ using correlator constructed from 2-point Green functions

$$G(x, 1/i\mu | 0, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^*(0) \psi_k(x) e^{-E_k/\mu}.$$

Define correlator as Fourier transform:

$$\begin{aligned} M(Q^2, \mu_1, \mu_2) &= \int G(x, 1/i\mu_1 | 0, 0) G^*(x, 1/i\mu_2 | 0, 0) e^{iQx} d^2x \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \psi_l^*(0) \psi_k(0) F_{kl}(Q^2) e^{-E_k/\mu_1 - E_l/\mu_2} \end{aligned}$$

Form factor of 2D oscillator

This correlator

$$M(Q^2, \mu_1, \mu_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \psi_l^*(0) \psi_k(0) F_{kl}(Q^2) e^{-E_k/\mu_1 - E_l/\mu_2}$$

can be rewritten as **double dispersion integral (forward)**

$$M(Q^2, \mu_1, \mu_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s_1/\mu_1 - s_2/\mu_2} \rho(s_1, s_2, Q^2) ds_1 ds_2$$

where spectral density is a sum of δ -functions:

$$\rho(s_1, s_2, Q^2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \psi_l^*(0) \psi_k(0) F_{kl}(Q) \delta(s_1 - E_k) \delta(s_2 - E_l).$$

Correlator of 2D free particle

For free particle Green function is known

$$G_0(x, 1/i\mu | 0, 0) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ikx} e^{-k^2/2m\mu}$$

Question: how one can take this integral in d^2k ?

Correlator of 2D free particle

For free particle Green function is known

$$G_0(x, 1/i\mu | 0, 0) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ikx} e^{-k^2/2m\mu} = \frac{m\mu}{2\pi} e^{-mx^2\mu/2}$$

and correlator $M_0(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \int G_0(x, 1/i\mu_1 | 0, 0) G_0^*(x, 1/i\mu_2 | 0, 0) e^{iQx} d^2x$$

Correlator of 2D free particle

For free particle Green function is known

$$G_0(x, 1/i\mu | 0, 0) = \frac{m\mu}{2\pi} e^{-mx^2\mu/2} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ikx} e^{-k^2/2m\mu}$$

and correlator $M_0(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \int G_0(x, 1/i\mu_1 | 0, 0) G_0^*(x, 1/i\mu_2 | 0, 0) e^{iQx} d^2x$$

$$= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-k^2/2m\mu_1} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{-p^2/2m\mu_2} \int e^{i(k+Q-p)x} d^2x$$

Correlator of 2D free particle

For free particle Green function is known

$$G_0(x, 1/i\mu | 0, 0) = \frac{m\mu}{2\pi} e^{-mx^2\mu/2} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ikx} e^{-k^2/2m\mu}$$

and correlator $M_0(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \int G_0(x, 1/i\mu_1 | 0, 0) G_0^*(x, 1/i\mu_2 | 0, 0) e^{iQx} d^2x$$

$$= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-k^2/2m\mu_1} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{-p^2/2m\mu_2} \int e^{i(k+Q-p)x} d^2x$$

Question: how one can take this integral in d^2x ?

Коррелятор 2-мерной свободной частицы

После снятия интеграла по d^2p за счет $\delta(k + Q - p)$ имеем

$$M_0(Q^2, \mu_1, \mu_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-k^2/2m\mu_1} e^{-(k+Q)^2/2m\mu_2}$$

Коррелятор 2-мерной свободной частицы

После снятия интеграла по d^2p за счет $\delta(k + Q - p)$ имеем

$$M_0(Q^2, \mu_1, \mu_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-k^2/2m\mu_1} e^{-(k+Q)^2/2m\mu_2}$$

Этот интеграл берется тем же способом, что и предыдущий:

$$= \left(\frac{m}{2\pi}\right) \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} e^{-Q^2/[2m(\mu_1 + \mu_2)]}$$

Коррелятор 2-мерной свободной частицы

После снятия интеграла по d^2p за счет $\delta(k + Q - p)$ имеем

$$M_0(Q^2, \mu_1, \mu_2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-k^2/2m\mu_1} e^{-(k+Q)^2/2m\mu_2}$$

Этот интеграл берется тем же способом, что и предыдущий:

$$= \left(\frac{m}{2\pi}\right) \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} e^{-Q^2/[2m(\mu_1+\mu_2)]}$$

Спектральная плотность легко определяется:

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) \delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

Спектральная плотность свободной частицы

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) \delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

Действительно, интеграл по dk^2 берется сразу за счет первой δ -функции, а вторая δ -функция снимает интегрирование по углам, давая в результате θ -функцию треугольника $\theta_\Delta(\sqrt{2ms_1}, \sqrt{2ms_2}, Q)$:

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \frac{m \theta_\Delta(\sqrt{2ms_1}, \sqrt{2ms_2}, Q)}{2\pi^2 \sqrt{4s_1s_2 - (s_1 + s_2 - Q^2/2m)^2}}$$

Спектральная плотность свободной частицы

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) \delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

Действительно, интеграл по dk^2 берется сразу за счет первой δ -функции, а вторая δ -функция снимает интегрирование по углам, давая в результате θ -функцию треугольника $\theta_\Delta(k_1, k_2, Q)$:

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \frac{m^2 \theta_\Delta(k_1, k_2, Q)}{\pi^2 \sqrt{4k_1^2 k_2^2 - (k_1^2 + k_2^2 - Q^2)^2}},$$

с векторами $k_1 \equiv \sqrt{2ms_1}$ и $k_2 \equiv \sqrt{2ms_2}$.

Спектральная плотность свободной частицы

Явный вид $\theta_{\Delta}(k_1, k_2, k_3)$ не сложен:

$$\theta_{\Delta}(k_1, k_2, k_3) \equiv \theta(|k_1 + k_2| \geq k_3) \theta(k_3 \geq |k_1 - k_2|)$$

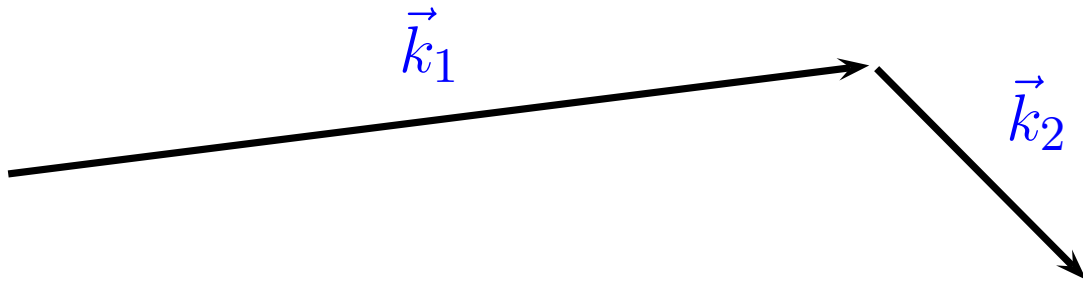
Эта θ -функция гарантирует возможность построения треугольника

Спектральная плотность свободной частицы

Явный вид $\theta_{\Delta}(k_1, k_2, k_3)$ не сложен:

$$\theta_{\Delta}(k_1, k_2, k_3) \equiv \theta(|k_1 + k_2| \geq k_3) \theta(k_3 \geq |k_1 - k_2|)$$

Эта θ -функция гарантирует возможность построения треугольника

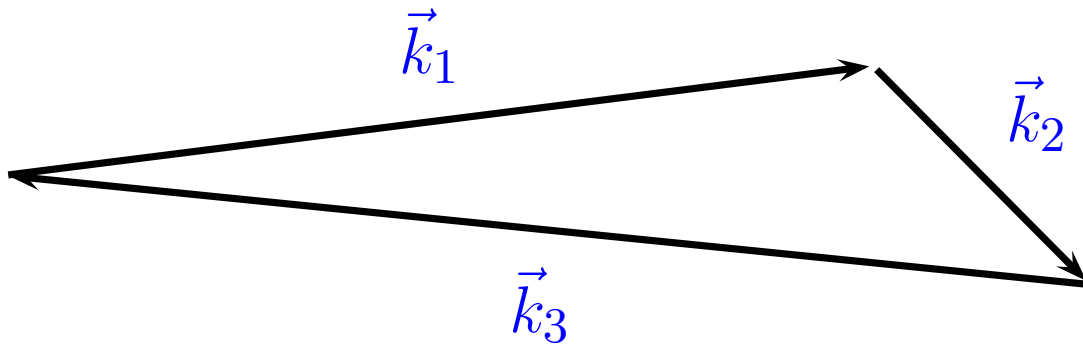


Спектральная плотность свободной частицы

Явный вид $\theta_{\Delta}(k_1, k_2, k_3)$ не сложен:

$$\theta_{\Delta}(k_1, k_2, k_3) \equiv \theta(|k_1 + k_2| \geq k_3) \theta(k_3 \geq |k_1 - k_2|)$$

Эта θ -функция гарантирует возможность построения треугольника



из трех векторов \vec{k}_1 , \vec{k}_2 и \vec{k}_3 с длинами k_1 , k_2 и k_3 .

Итак:

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \frac{m^2 \theta_{\Delta}(k_1, k_2, Q)}{4\pi^2 S_{\Delta}(k_1, k_2, Q)}$$

Спектральная плотность свободной частицы

$$\begin{aligned}\rho_0(s_1, s_2, Q^2) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) \delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right) \\ &= \frac{m^2 \theta_{\Delta}(k_1, k_2, Q)}{\pi^2 \sqrt{4k_1^2 k_2^2 - (k_1^2 + k_2^2 - Q^2)^2}}.\end{aligned}$$

Небольшое отступление о пользе интегральных представлений.

Вопрос: чему равна $\rho_0(s_1, s_2, Q^2)$ при $Q^2 = 0$?

Спектральная плотность свободной частицы

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) \delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right) \quad (*)$$

$$= \frac{m^2 \theta_{\Delta}(k_1, k_2, Q)}{\pi^2 \sqrt{4k_1^2 k_2^2 - (k_1^2 + k_2^2 - Q^2)^2}}. \quad (**)$$

Небольшое отступление о пользе интегральных представлений.

Вопрос: чему равна $\rho_0(s_1, s_2, Q^2)$ при $Q^2 = 0$?

Ответ: из (*) сразу получим $\rho_0(s_1, s_2, 0) = C \cdot \delta(s_1 - s_2)$,

где константа $C = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) = \frac{m}{2\pi}$.

Oscillator correlator

For oscillator we know its Green function:

$$G_{\text{osc}}(x, 1/i\mu | 0, 0) = \frac{m\omega}{2\pi \sinh(\omega/\mu)} \exp\left(-\frac{m\omega \vec{x}^2 \cosh(\omega/\mu)}{2 \sinh(\omega/\mu)}\right)$$

Oscillator correlator

For oscillator we know its Green function:

$$G_{\text{osc}}(x, 1/i\mu | 0, 0) = \frac{m\omega}{2\pi \sinh(\omega/\mu)} \exp\left(-\frac{m\omega \vec{x}^2 \cosh(\omega/\mu)}{2 \sinh(\omega/\mu)}\right)$$

Correlator $M_{\text{osc}}(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \int G_{\text{osc}}(x, 1/i\mu_1 | 0, 0) G_{\text{osc}}^*(x, 1/i\mu_2 | 0, 0) e^{iQx} d^2x$$

Oscillator correlator

For oscillator we know its Green function:

$$G_{\text{osc}}(x, 1/i\mu | 0, 0) = \frac{m\omega}{2\pi \sinh(\omega/\mu)} \exp\left(-\frac{m\omega \vec{x}^2 \cosh(\omega/\mu)}{2 \sinh(\omega/\mu)}\right)$$

Correlator $M_{\text{osc}}(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \frac{m^2 \omega^2}{(2\pi)^2 \sinh(\omega/\mu_1) \sinh(\omega/\mu_2)} \int d^2x e^{-m(\omega_1 + \omega_2)x^2/2 + iQx}$$

with natural notations $\omega_i \equiv \frac{\omega \cosh(\omega/\mu_i)}{\sinh(\omega/\mu_i)}$.

Oscillator correlator

For oscillator we know its Green function:

$$G_{\text{osc}}(x, 1/i\mu | 0, 0) = \frac{m\omega}{2\pi \sinh(\omega/\mu)} \exp\left(-\frac{m\omega \vec{x}^2 \cosh(\omega/\mu)}{2 \sinh(\omega/\mu)}\right)$$

Correlator $M_{\text{osc}}(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{m^2 \omega^2}{(2\pi)^2 \sinh(\omega/\mu_1) \sinh(\omega/\mu_2)} \int d^2x e^{-m(\omega_1 + \omega_2)x^2/2 + iQx} \\ &= \frac{m\omega}{2\pi \sinh(\omega/\mu_1 + \omega/\mu_2)} \exp\left(-\frac{Q^2}{2m\omega} \frac{\sinh(\omega/\mu_1) \sinh(\omega/\mu_2)}{\sinh(\omega/\mu_1 + \omega/\mu_2)}\right) \end{aligned}$$

Точный коррелятор осциллятора

Итак $M_{\text{osc}}(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \frac{m\omega}{2\pi \sinh(\omega/\mu_1 + \omega/\mu_2)} \exp\left(-\frac{Q^2}{2m\omega} \frac{\sinh(\omega/\mu_1) \sinh(\omega/\mu_2)}{\sinh(\omega/\mu_1 + \omega/\mu_2)}\right).$$

Точный коррелятор осциллятора

Итак $M_{\text{osc}}(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \frac{m\omega}{2\pi \sinh(\omega/\mu_1 + \omega/\mu_2)} \exp\left(-\frac{Q^2}{2m\omega} \frac{\sinh(\omega/\mu_1) \sinh(\omega/\mu_2)}{\sinh(\omega/\mu_1 + \omega/\mu_2)}\right).$$

Что мы хотим извлечь из этого точного результата?

Точный коррелятор осциллятора

Итак $M_{\text{osc}}(Q^2, \mu_1, \mu_2) =$

$$= \frac{m\omega}{2\pi \sinh(\omega/\mu_1 + \omega/\mu_2)} \exp\left(-\frac{Q^2}{2m\omega} \frac{\sinh(\omega/\mu_1) \sinh(\omega/\mu_2)}{\sinh(\omega/\mu_1 + \omega/\mu_2)}\right).$$

Что мы хотим извлечь из этого точного результата?

Во-первых, мы хотим получить спектральное разложение:

$$M^{\text{spec}}(Q^2, \mu, \mu) = \frac{m\omega}{\pi} \left[F_{00}(Q^2) \mathcal{E} + \sum_{n \geq 1} F_n(Q^2) \mathcal{E}^{n+1} \right],$$

где $\mathcal{E} \equiv e^{-2\omega/\mu}$, а $F_n(Q^2)$ определяются формфакторами

высших состояний: $F_n(Q^2) = \sum_{0 \leq k \leq n} F_{n-k,k}(Q^2)$.

Точный коррелятор осциллятора

Получаем: $M_{\text{osc}}(Q^2, \mu, \mu) =$

$$= \frac{m\omega}{\pi} \exp\left[-\frac{Q^2}{4m\omega}\right] \mathcal{E} \left[1 + \sum_{k \geq 1} \mathcal{E}^{2k} \right] \exp\left[-\frac{Q^2}{2m\omega} \sum_{j \geq 1} (-1)^j \mathcal{E}^j\right]$$
$$= \frac{m\omega}{\pi} \left[F_{00}(Q^2) \mathcal{E} + \sum_{n \geq 1} F_n(Q^2) \mathcal{E}^{n+1} \right].$$

Отсюда сразу извлекаем точный формфактор основного состояния осциллятора:

$$F_{00}(Q^2) = \exp\left[-\frac{Q^2}{4m\omega}\right].$$

Модель вклада высших состояний

Во-вторых, мы можем получить точное выражение для вклада высших состояний:

$$\begin{aligned} M^{\text{h.s.}}(Q^2, \mu, \mu) &= M_{\text{osc}}(Q^2, \mu, \mu) - \frac{m\omega}{\pi} F_{00}(Q^2) e^{-2\omega/\mu} = \\ &= M_{\text{osc}}(Q^2, \mu, \mu) - \frac{m\omega}{\pi} \exp\left[-\frac{Q^2}{4m\omega} - \frac{2\omega}{\mu}\right]. \end{aligned}$$

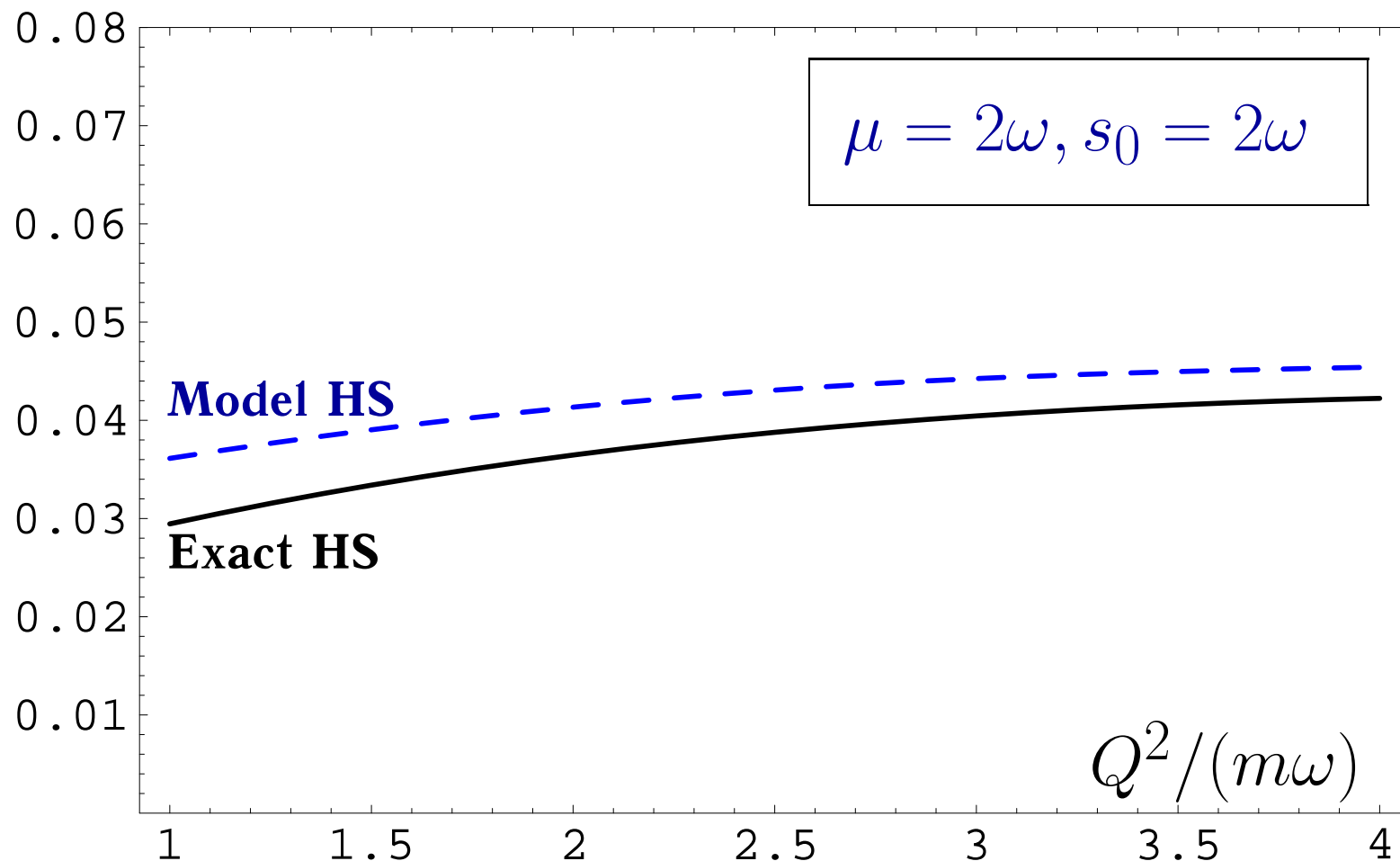
и сравнить его с моделью

$$M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu) = \iint e^{-(s_1+s_2)/\mu} \rho_0(s_1, s_2, Q^2) ds_1 ds_2,$$

где интегрирование ведется вне квадрата $(0, s_0) \times (0, s_0)$.

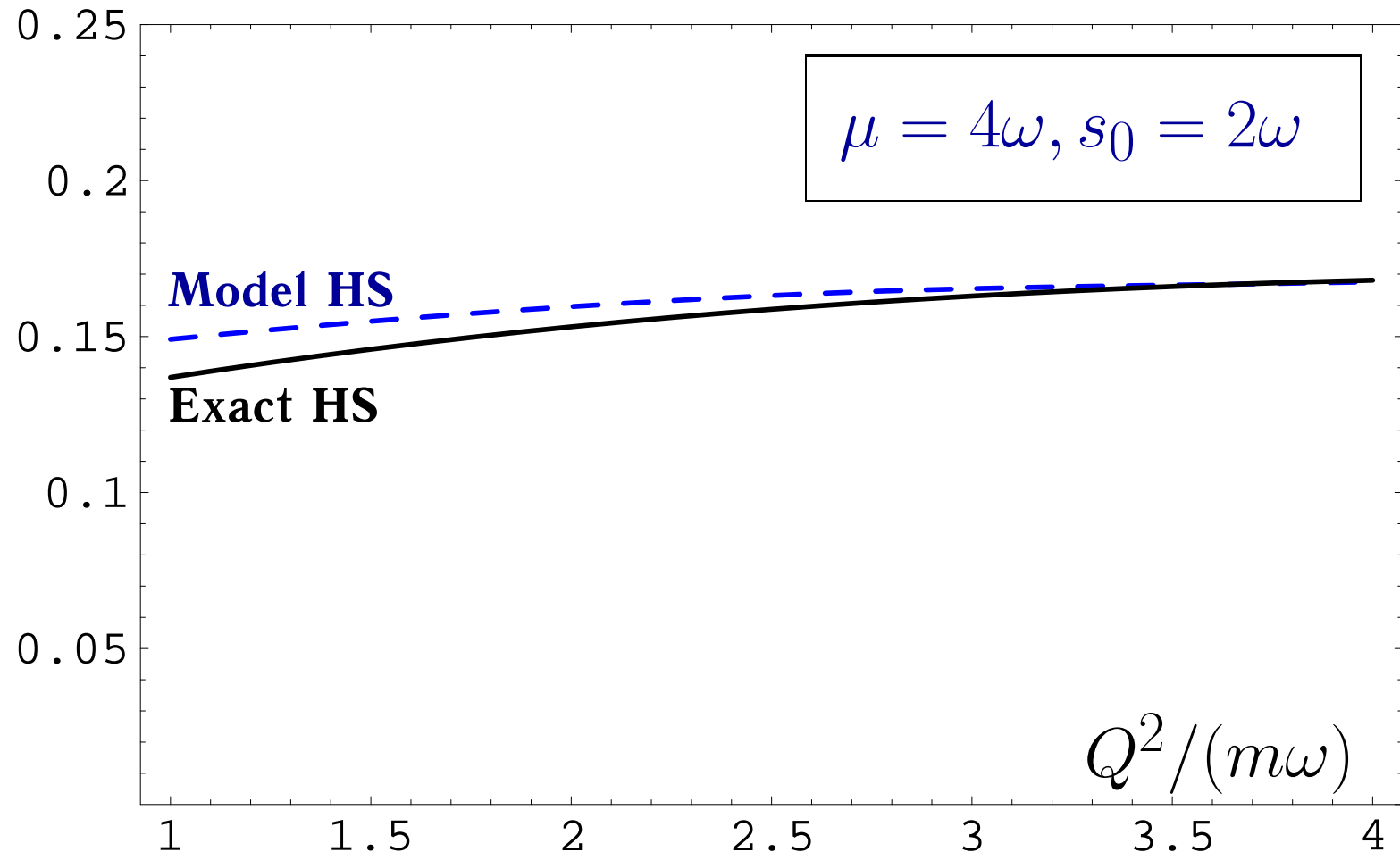
Модель вклада высших состояний

Посмотрим на графики:



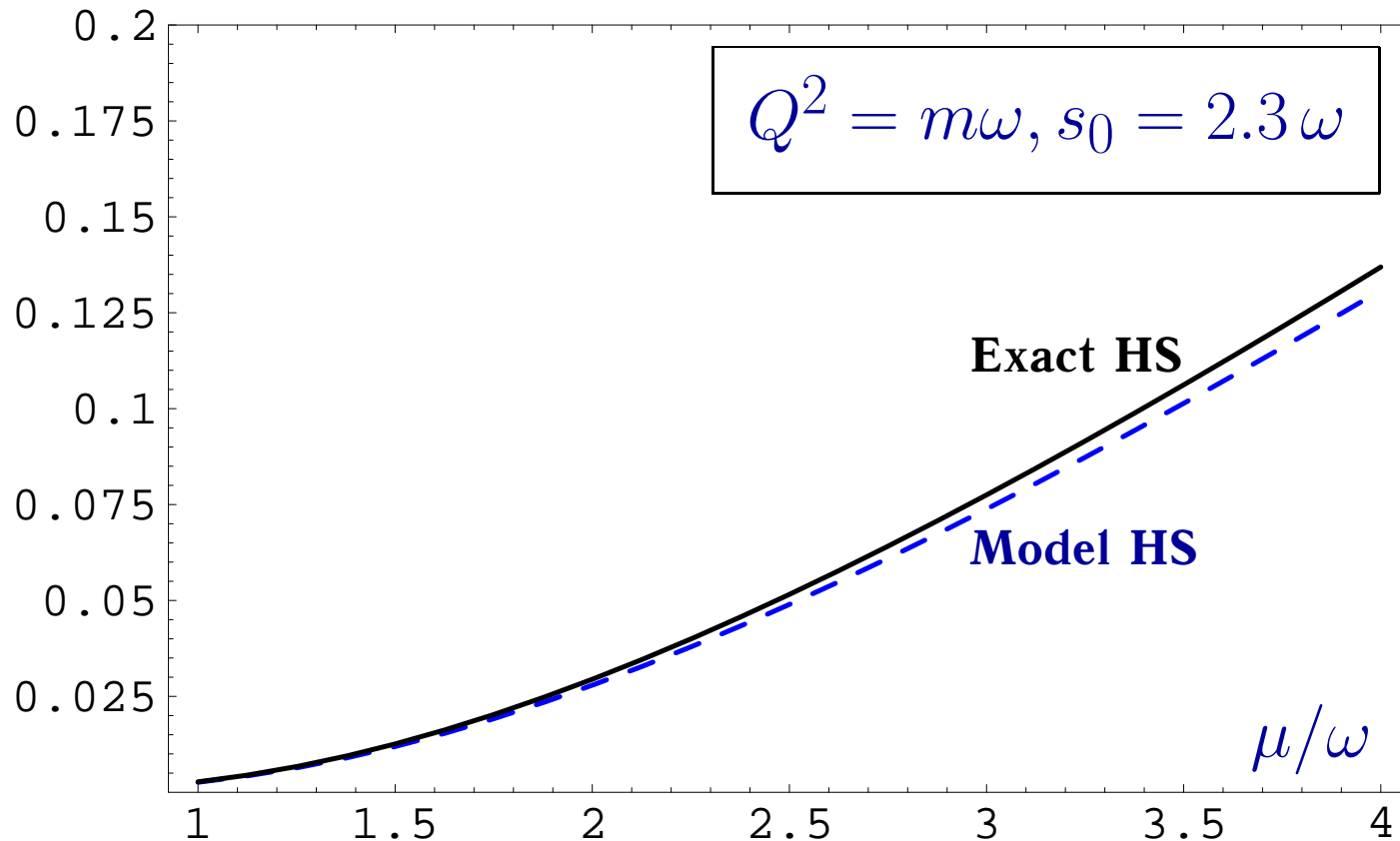
Модель вклада высших состояний

Посмотрим на графики:



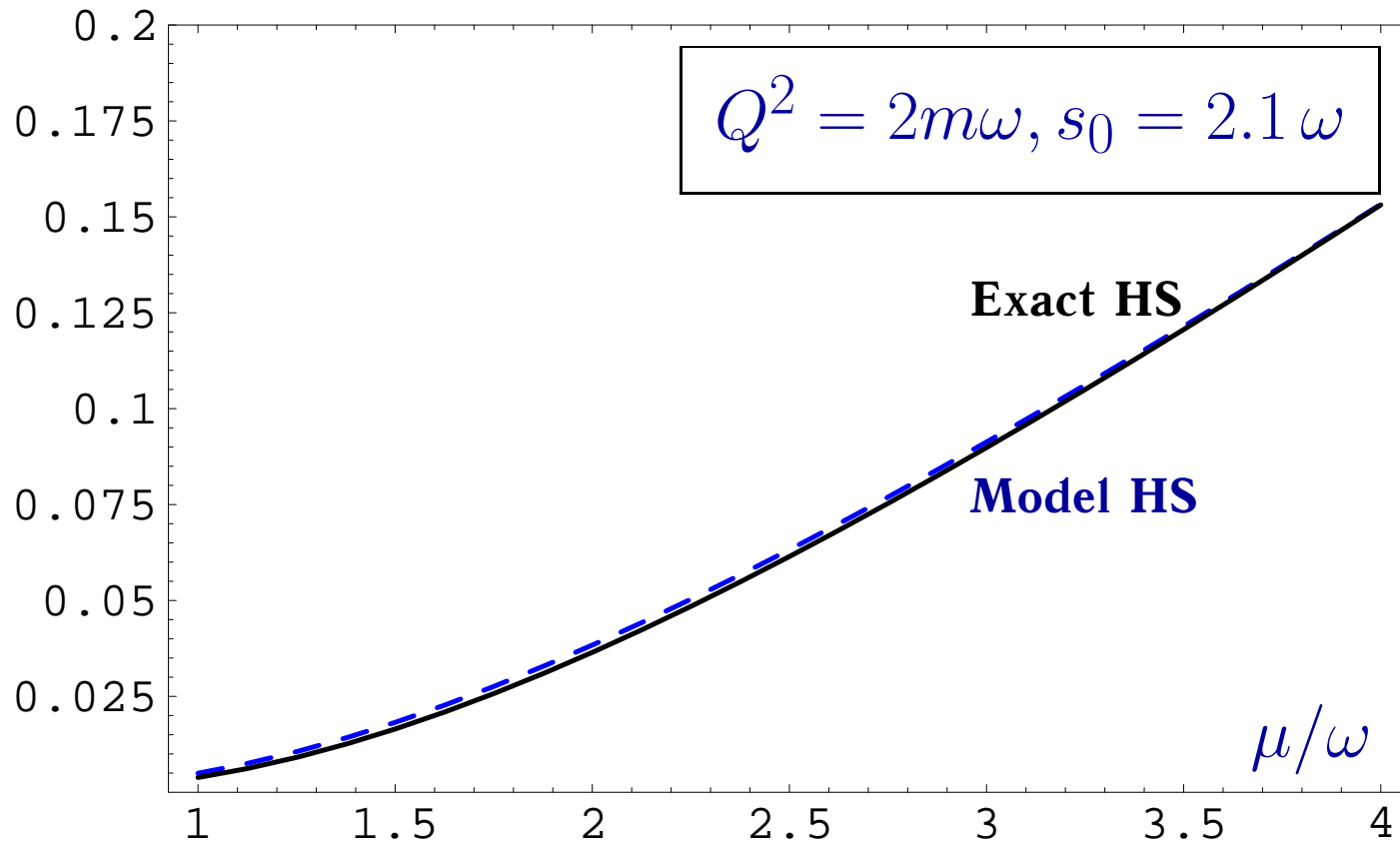
Модель вклада высших состояний

Мы видим, что порог $s_0 = 2\omega$ хорош не для всех значений Q^2 и μ . В наших силах его подправить: для меньших значений Q^2 он должен стать побольше, чтобы уменьшить $M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu)$. Посмотрим на графики:



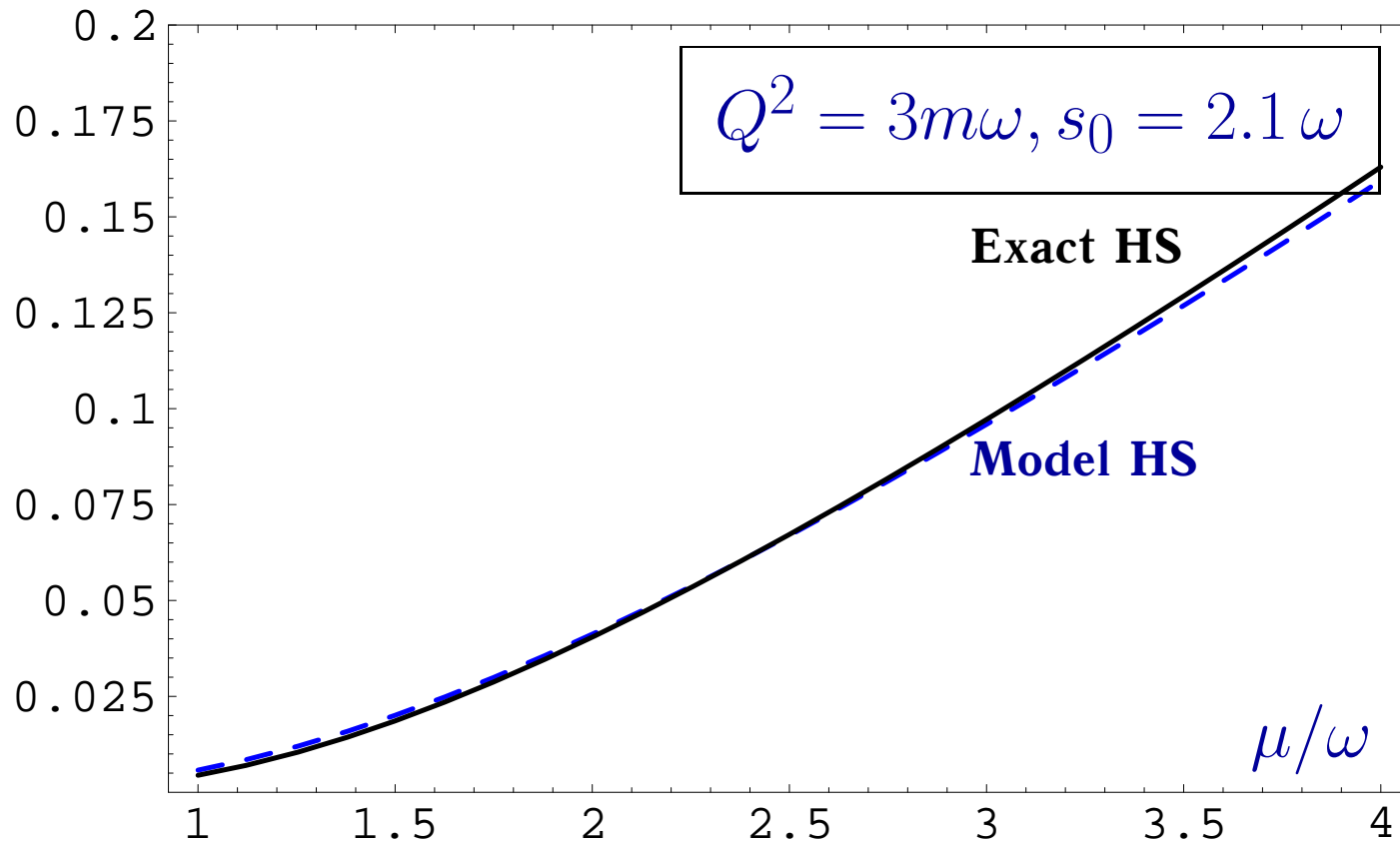
Модель вклада высших состояний

Мы видим, что порог $s_0 = 2\omega$ хорош не для всех значений Q^2 и μ . В наших силах его подправить: для меньших значений Q^2 он должен стать побольше, чтобы уменьшить $M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu)$. Посмотрим на графики:



Модель вклада высших состояний

Мы видим, что порог $s_0 = 2\omega$ хорош не для всех значений Q^2 и μ . В наших силах его подправить: для меньших значений Q^2 он должен стать побольше, чтобы уменьшить $M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu)$. Посмотрим на графики:



Спектральная модель коррелятора

Итак, формфактор осциллятора имеет вид:

$$F_{00}(Q^2) = \exp \left[-\frac{Q^2}{4m\omega} \right] .$$

Кроме того, мы строим спектральную модель коррелятора

$$M^{\text{spec}}(Q^2, \mu, \mu) = \frac{m\omega}{\pi} F_{00}(Q^2) e^{-2\omega/\mu} \\ + \left(\int_0^\infty \int_0^\infty - \int_0^{s_0} \int_0^{s_0} \right) \rho_0(s_1, s_2, Q^2) e^{-(s_1+s_2)/\mu} ds_1 ds_2 .$$

Чтобы построить правило сумм, нам осталось построить пертурбативное разложение коррелятора $M_{\text{osc}}(Q^2, \mu, \mu)$ по степеням ω/μ .

Пертурбативное разложение коррелятора

Точный коррелятор

$$M_{\text{osc}}(Q^2, \mu, \mu) = \frac{m\omega}{2\pi \sinh(2\omega/\mu)} \exp \left[-\frac{Q^2}{4m\omega} \tanh \left(\frac{\omega}{\mu} \right) \right].$$

Для получения пертурбативного разложения используем

$$\frac{\sinh(\omega)}{\omega} = 1 + \frac{\omega^2}{6} + \frac{\omega^4}{120} + O(\omega^6);$$

$$\exp \left[A \left(\frac{\tanh(\omega)}{\omega} - 1 \right) \right] = 1 - \frac{A\omega^2}{3} + \left(\frac{2A}{15} + \frac{A^2}{18} \right) \omega^4 + O(\omega^6).$$

Пертурбативное разложение коррелятора

Итак, пертурбативное разложение таково:

$$M_{\text{pert};N}(Q^2, \mu, \mu) = M_0(Q^2, \mu, \mu) \left[1 + \sum_{n=1}^N C_{2n} \left(\frac{Q^2}{m \mu} \right) \left(\frac{\omega}{\mu} \right)^{2n} \right],$$

где $C_2(z) = \frac{z}{12} - \frac{2}{3}$ и $C_4(z) = \frac{14 - 4z}{45} + \frac{z^2}{288}$.

Теперь мы можем выписать явно полученное правило сумм, следующее из приравнивания

$$M^{\text{spec}}(Q^2, \mu, \mu) = M_{\text{pert};2}(Q^2, \mu, \mu).$$

Мы будем использовать $N = 2$, поскольку обычно именно так поступают в подходе правил сумм КХД.

*Sum Rules
for form factors
of 2D oscillator*

Правило сумм: окна доверия

Выпишем явно правило сумм для $\Phi\Phi$ осциллятора:

$$F_{00}(Q^2) = \frac{\pi}{m\omega} \int_0^{s_0} \int_0^{s_0} \rho_0(s_1, s_2, Q^2) e^{-(s_1+s_2-2\omega)/\mu} ds_1 ds_2 \\ + \frac{1}{4} \left[C_2 \left(\frac{Q^2}{m\mu} \right) \frac{\omega}{\mu} + C_4 \left(\frac{Q^2}{m\mu} \right) \frac{\omega^3}{\mu^3} \right] e^{(2\omega-Q^2/4m)/\mu}.$$

Введем безразмерные переменные $M = \mu/\omega$, $q = Q^2/(m\omega)$ и $\sigma_i = s_i/\omega$, определим безразмерную спектральную плотность

$$\tilde{\rho}_0(\sigma_1, \sigma_2, q) = \frac{\theta_{\Delta}(\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_2}, \sqrt{q})}{2\pi \sqrt{4\sigma_1\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2 - q)^2}},$$

Правило сумм: окна доверия

и перепишем наше ПС:

$$F_{00}(q) = \int_0^{\sigma_0} \int_0^{\sigma_0} \tilde{\rho}_0(\sigma_1, \sigma_2, q/2) e^{(2-\sigma_1-\sigma_2)/M} d\sigma_1 d\sigma_2 \\ + \frac{e^{(2-q/4)/M}}{4M} \left[C_2\left(\frac{q}{M}\right) + C_4\left(\frac{q}{M}\right) \frac{1}{M^2} \right].$$

Будем называть вклад второй строчки $F_{\text{OPE}}(q, M)$ и определим приведенный вклад свободного коррелятора

$$F_{\text{free}}(q, M) = \frac{M}{4} e^{(2-q/4)/M},$$

который равен интегралу в первой строке при $\sigma_0 \rightarrow \infty$.

Правило сумм: окна доверия

Первый шаг в анализе ПС (**вспомните 1-ую лекцию**) – вопрос об области значений параметра M , в которой этому ПС имеет смысл доверять. Для ее определения введем 2 отношения

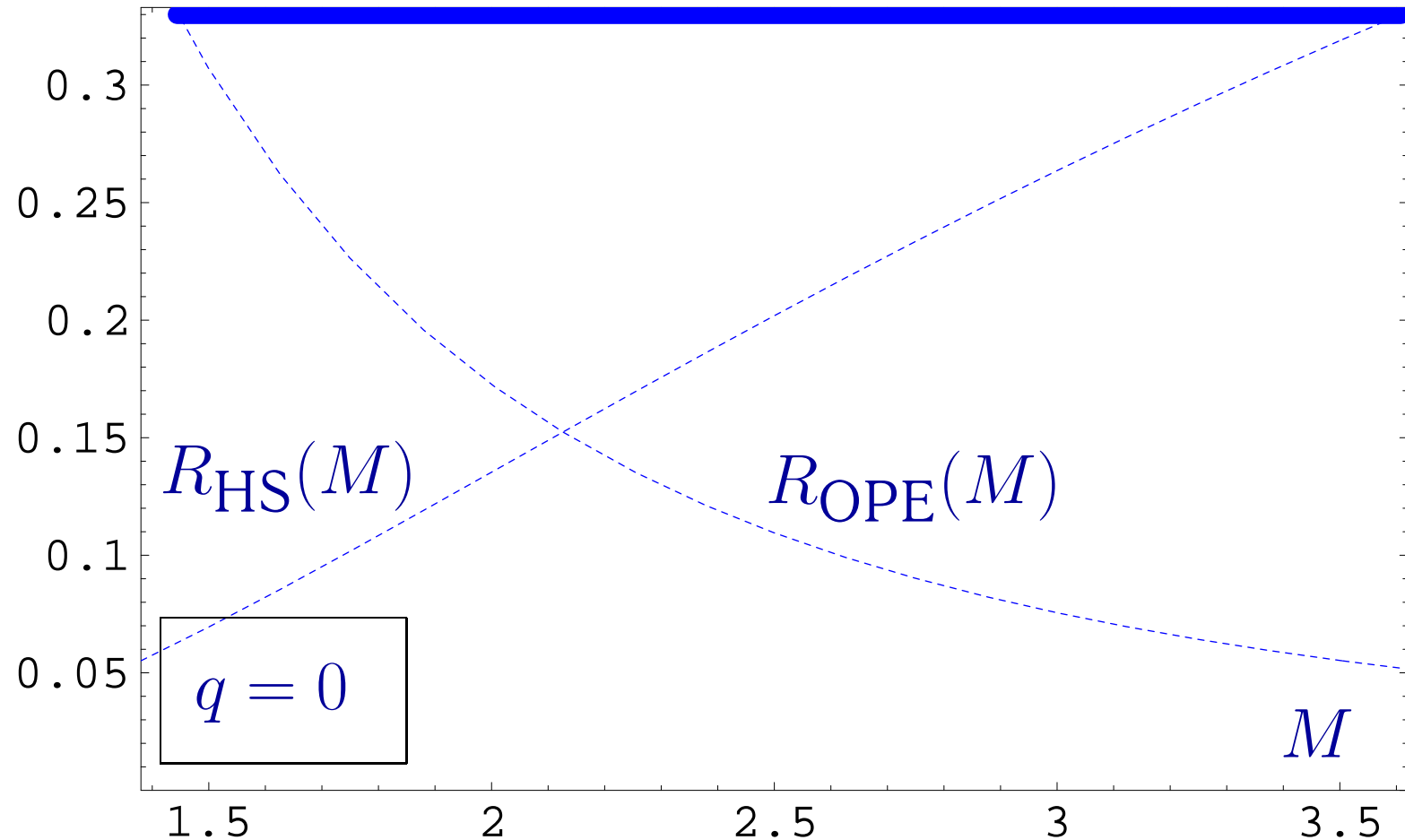
$$R_{\text{OPE}}(q, M) = \frac{F_{\text{OPE}}(q, M)}{F_{\text{free}}(q, M) + F_{\text{OPE}}(q, M)}$$

$$R_{\text{HS}}(q, M) = \frac{M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu)}{M^{\text{h.s.mod.}}(Q^2, \mu, \mu) + F_{00}(Q^2) e^{-2\omega/\mu}}$$

Теперь мы можем найти области, в которых оба отношения меньше 1/3.

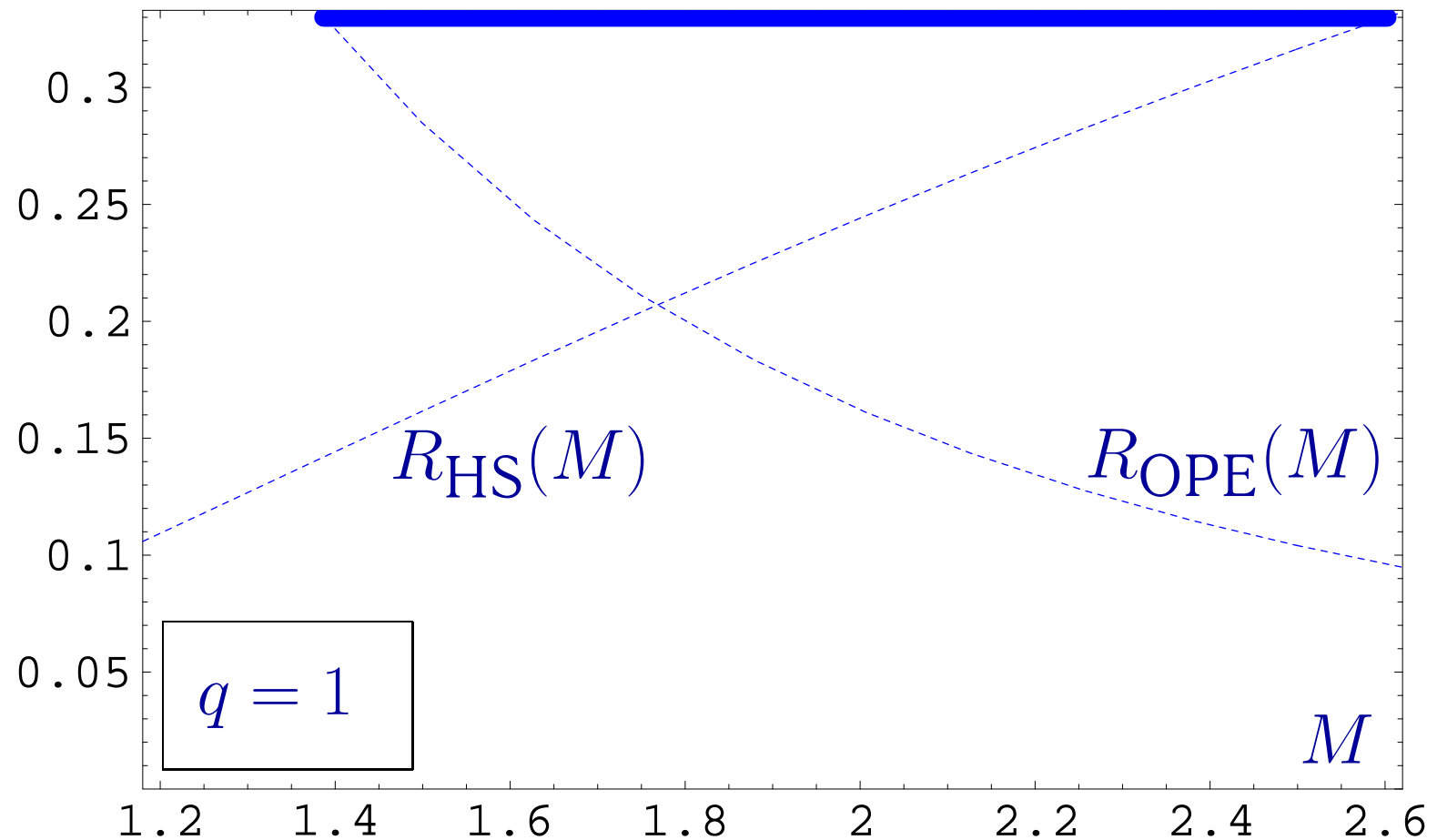
Правило сумм: окна доверия

Посмотрим на графики:



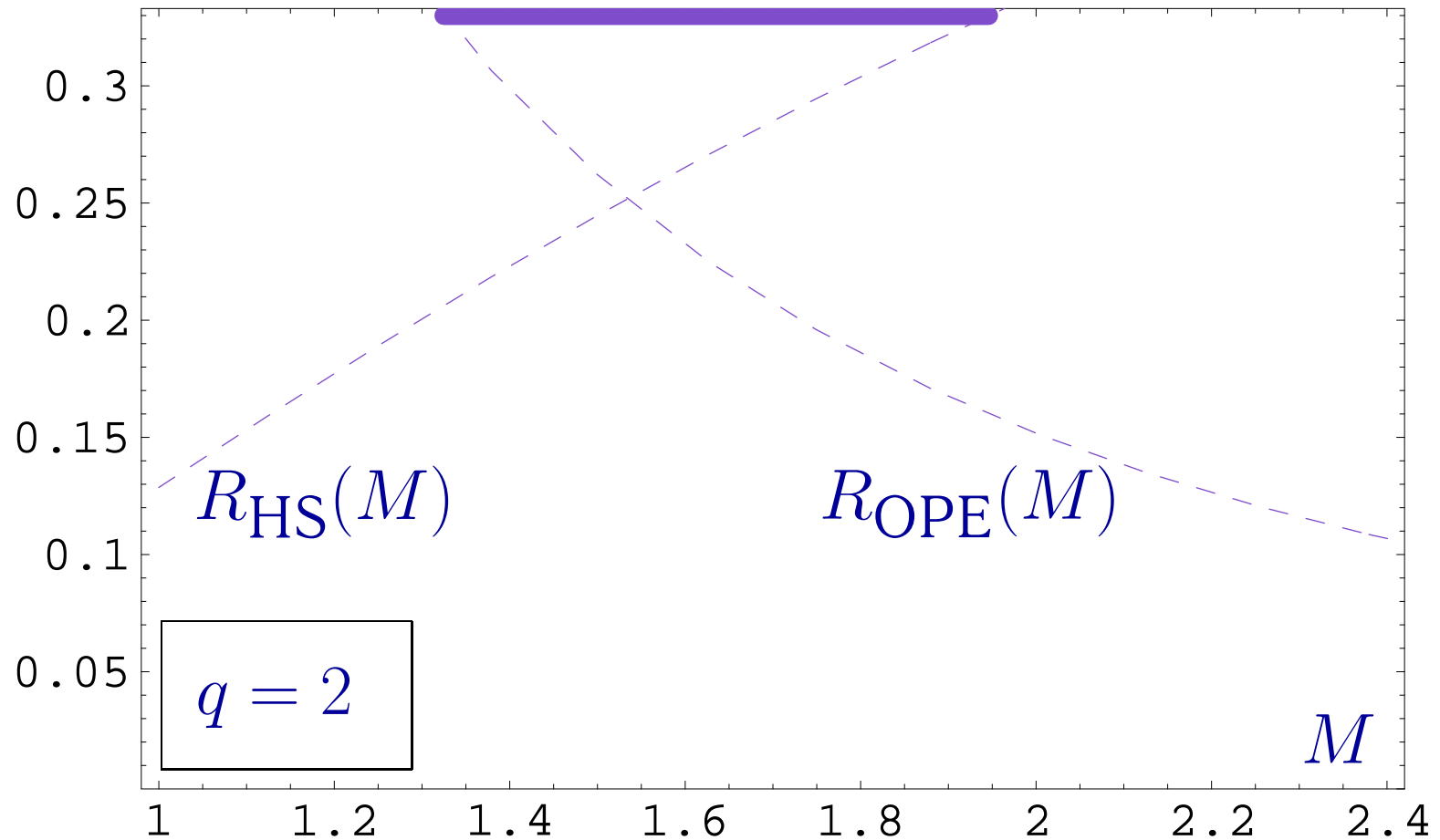
Правило сумм: окна доверия

Посмотрим на графики:



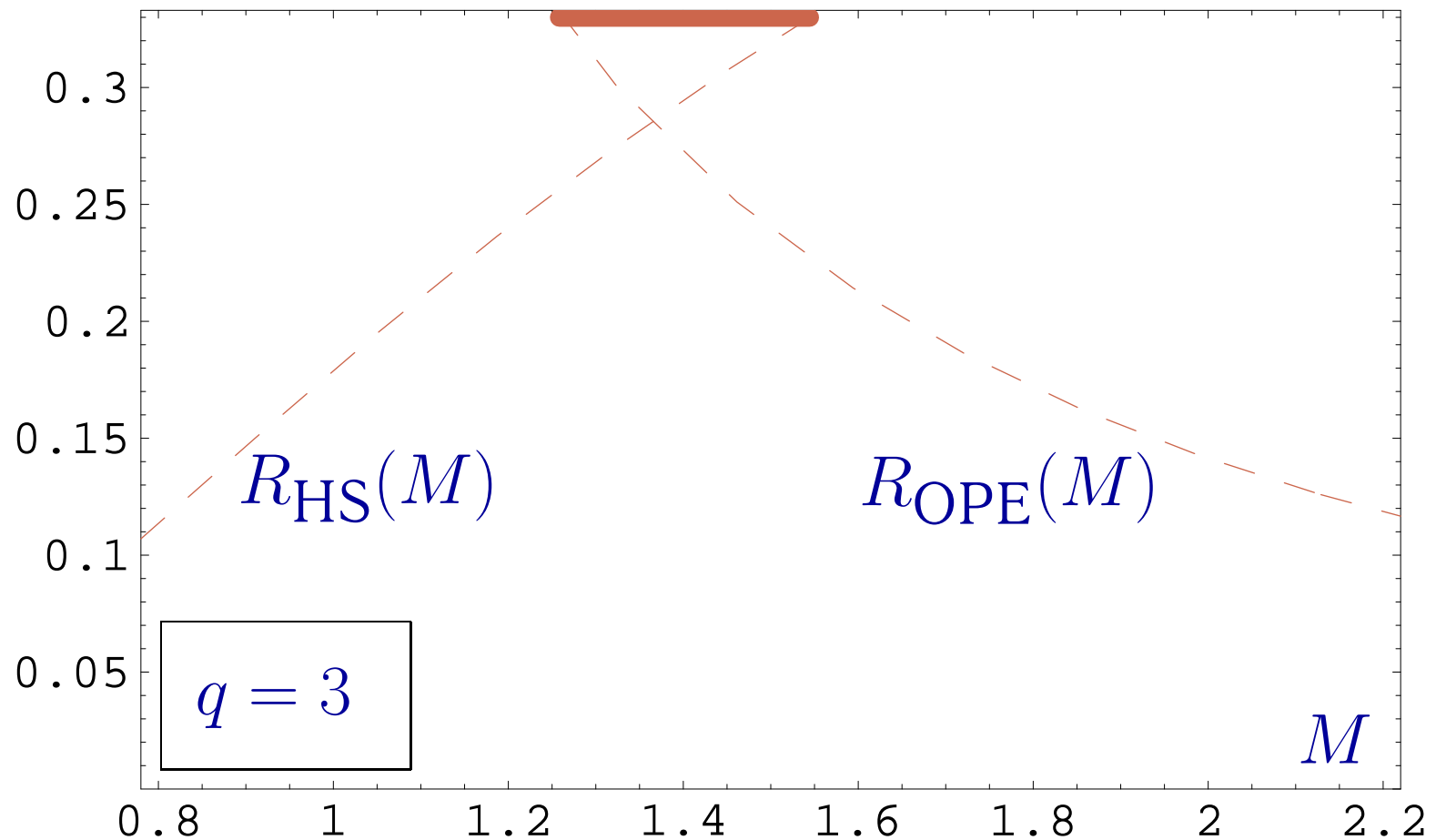
Правило сумм: окна доверия

Посмотрим на графики:



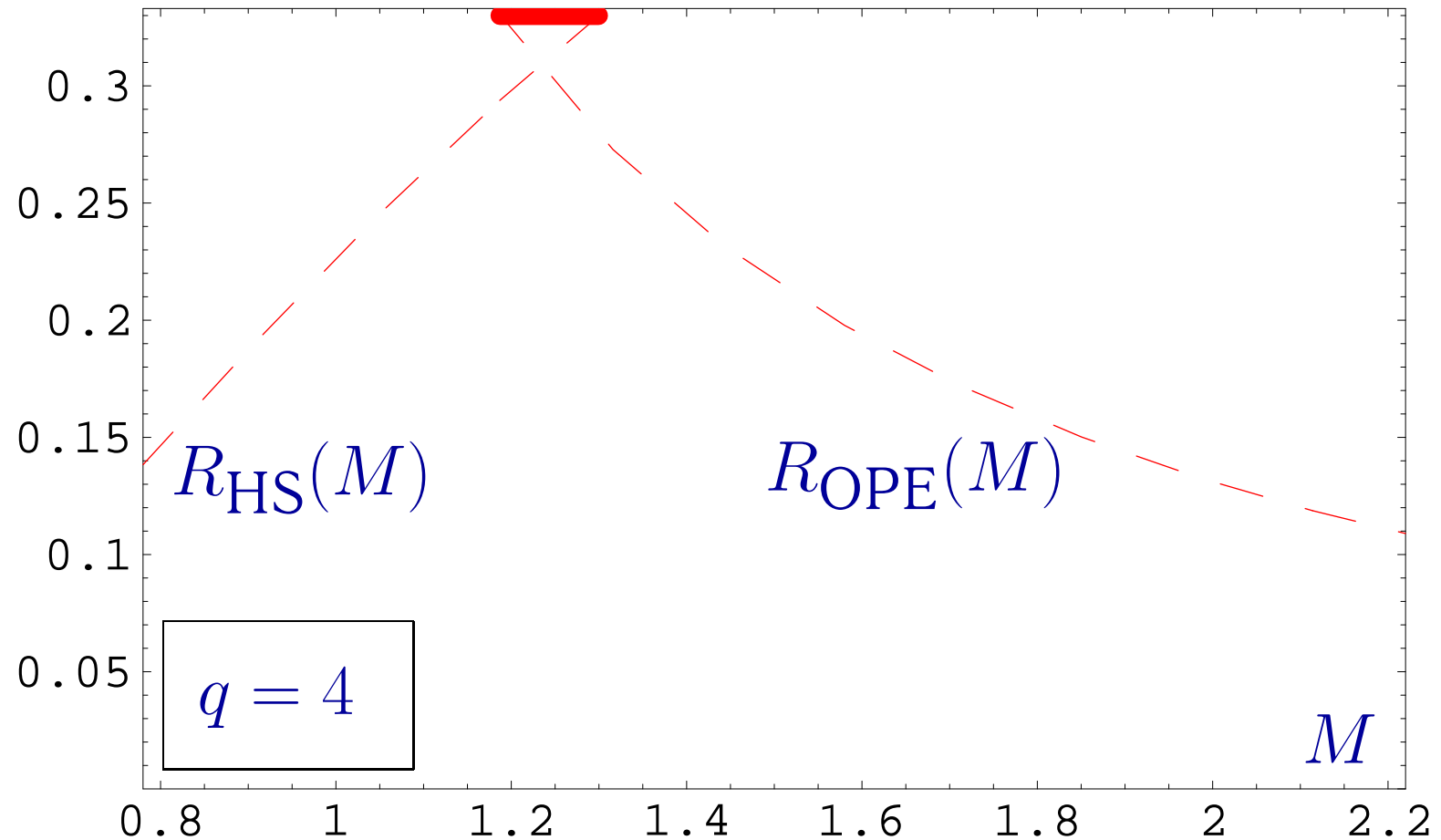
Правило сумм: окна доверия

Посмотрим на графики:



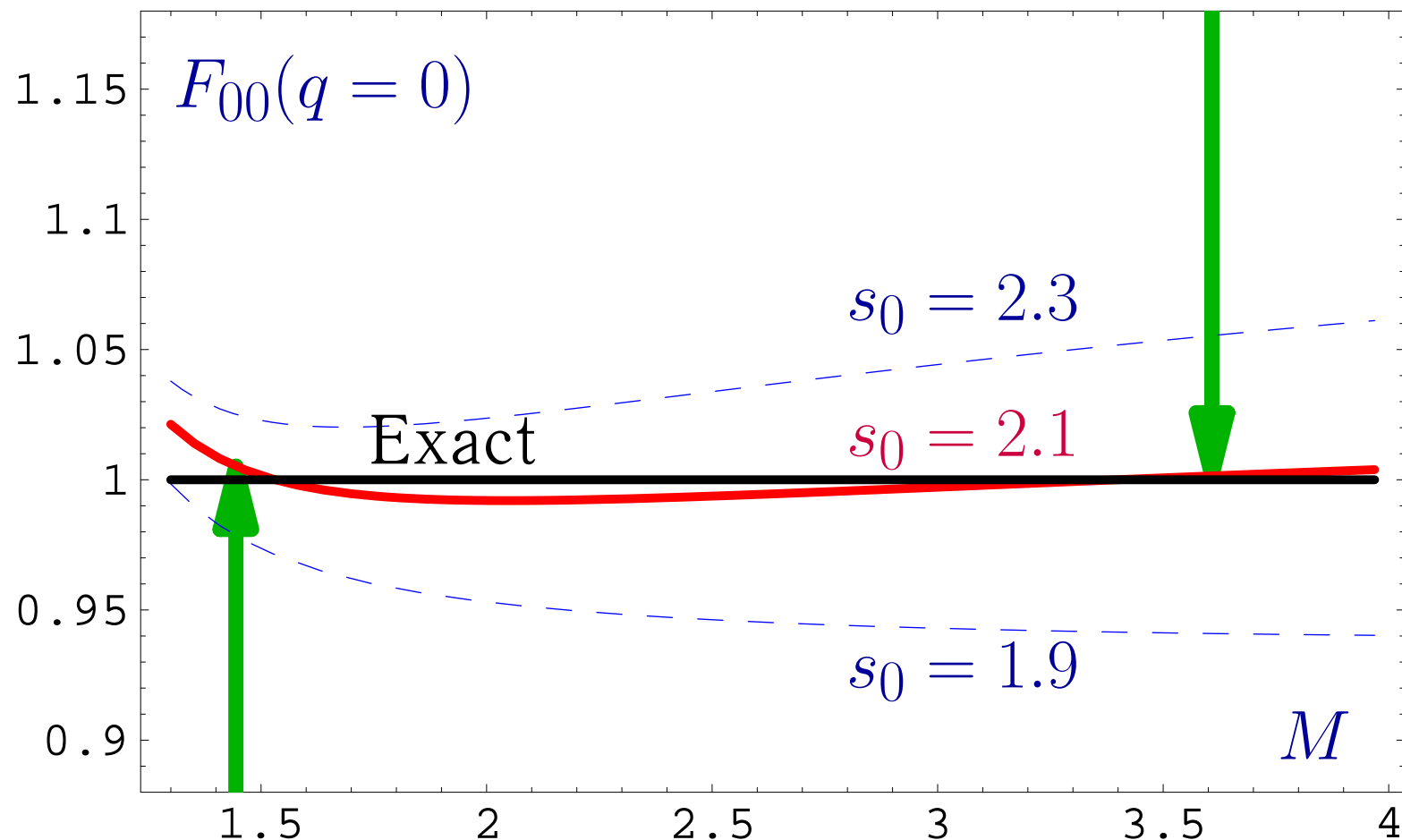
Правило сумм: окна доверия

Посмотрим на графики:



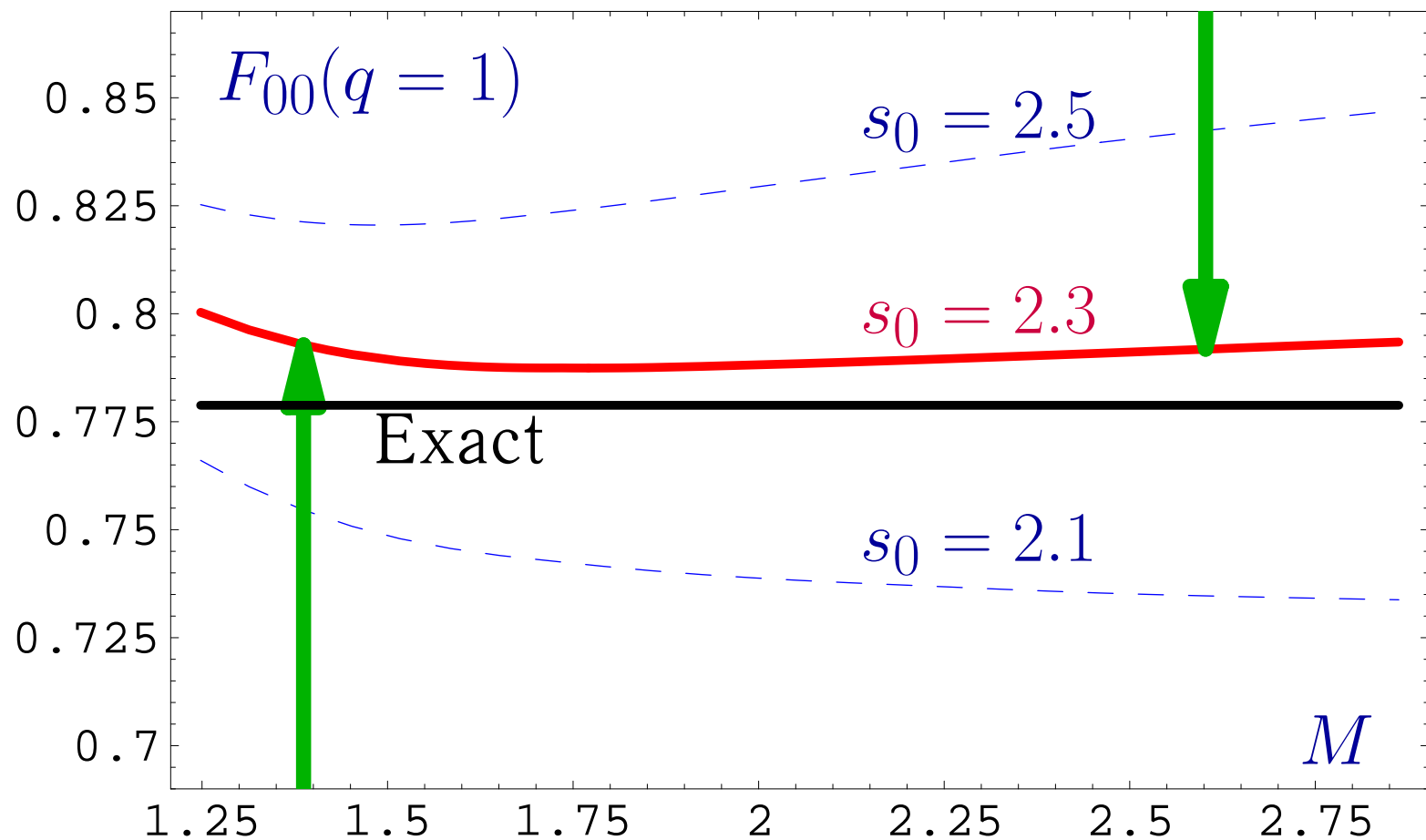
Обработка ПС для ФФ осциллятора

Посмотрим на графики:



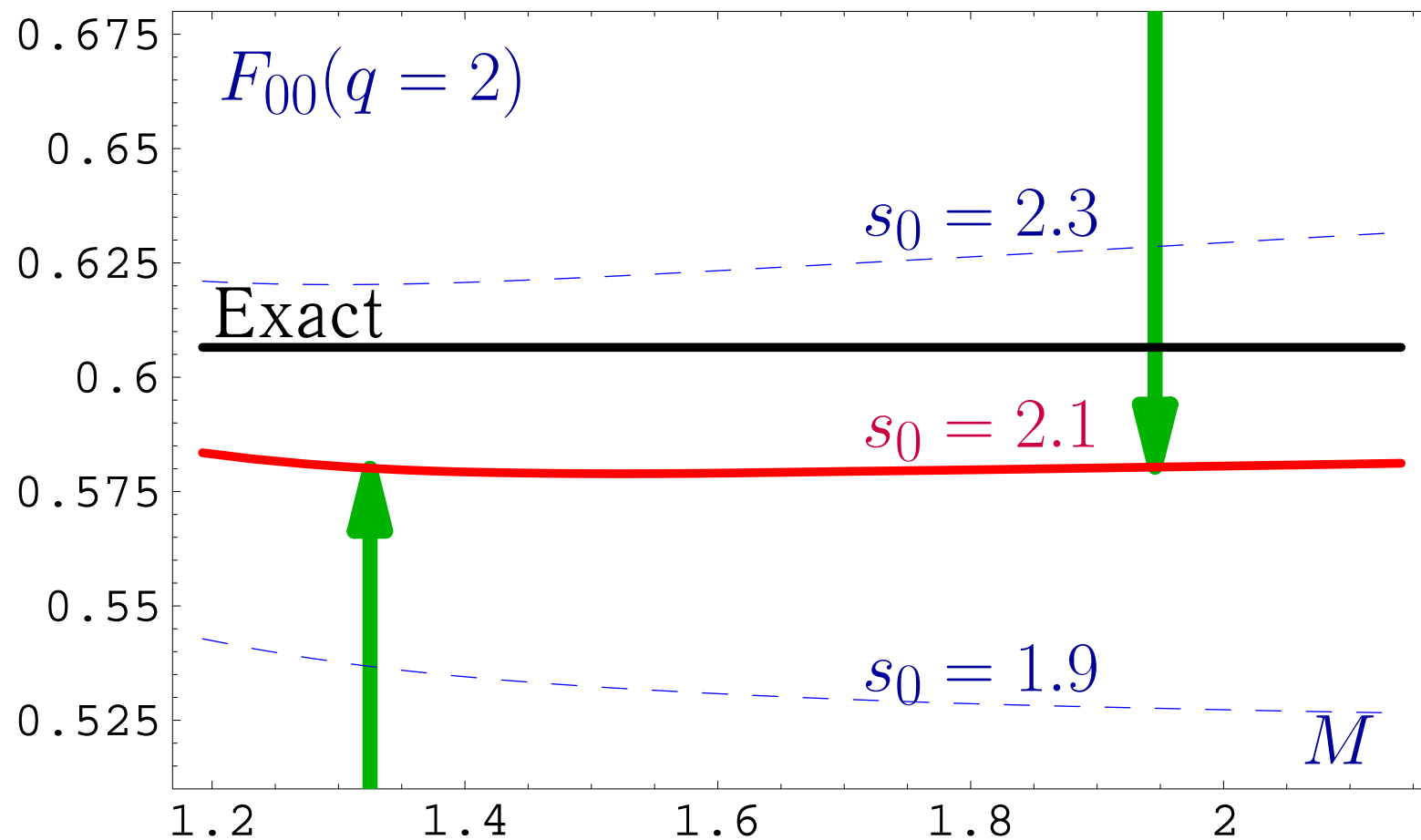
Обработка ПС для ФФ осциллятора

Посмотрим на графики:



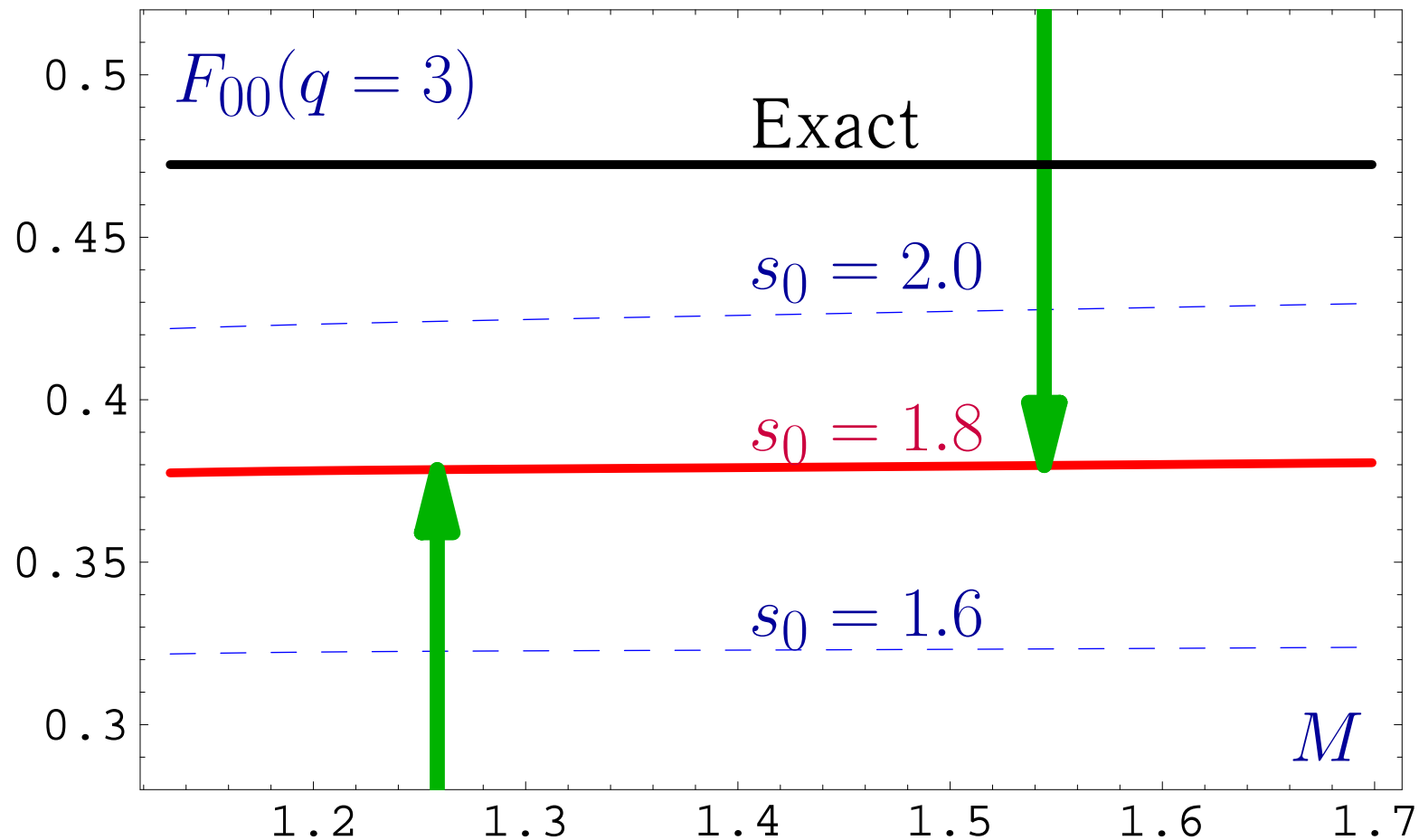
Обработка ПС для ФФ осциллятора

Посмотрим на графики:



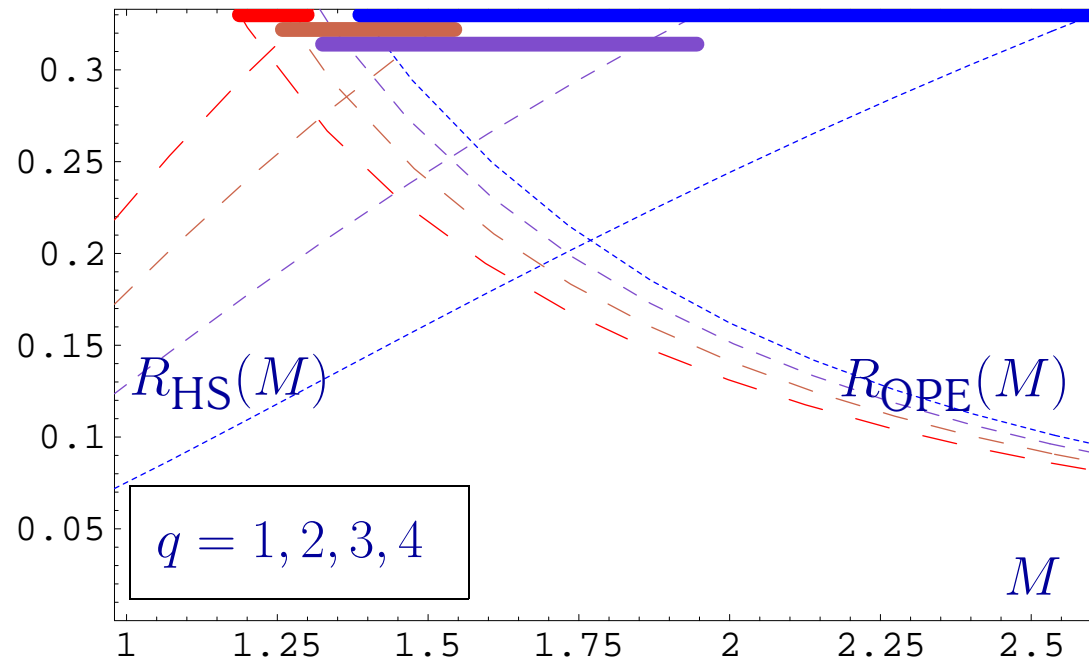
Обработка ПС для ФФ осциллятора

Посмотрим на графики:



Обработка ПС для ФФ осциллятора

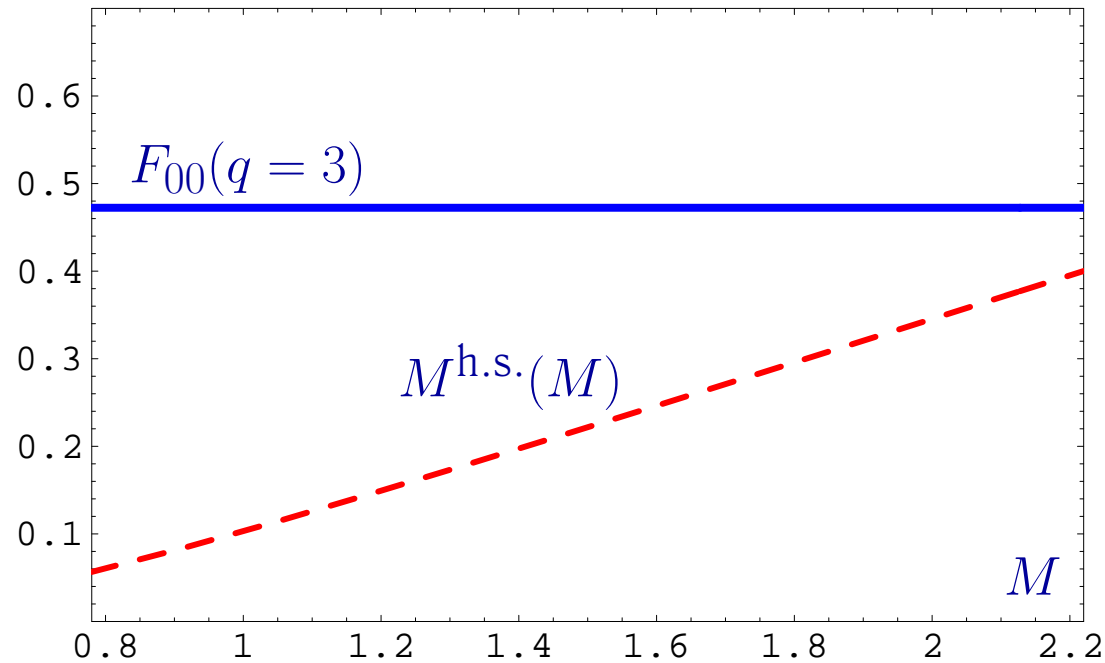
В чем причина плохого поведения ПС при больших $q \geq 3$?
Посмотрим на картинку по “окнам доверия”:



Ясно, что дело в росте вклада высших состояний $R_{\text{HS}}(M)$.

Обработка ПС для ФФ осциллятора

В чем причина плохого поведения ПС при больших $q \geq 3$?
А вот сравнение вкладов основного и высших состояний:



Ясно, что дело в росте вклада высших состояний $M^{\text{h.s.}}(q, M)$. Чтобы улучшить ПС надо учитывать вклад следующего состояния с энергией 3ω .