
Lecture 1: QCD Sum Rules in Quantum Mechanics

A. P. Bakulev

Bogolyubov Lab. Theor. Phys., JINR (Dubna, Russia)

July 6, 2005

Program

- L. 1. Introduction:** QCD, Hadrons and QCD Sum Rules;
Sum Rules in Quantum Mechanics
- L. 2. Main Ingredients of QCD SRs:**
операторное разложение; конденсаты; дисперсионные соотношения
- L. 3. Sum Rules for Form Factors** in Quantum Mechanics;
QCD SRs for ρ - и π -mesons
- L. 4. QCD SRs** for Pion Form Factors

Содержание 1-ой лекции

- КХД: кварки внутри, адроны снаружи! Как быть?
- Правила сумм КХД: как можно изучать адроны в непертурбативной КХД.
- Правила сумм в квантовой механике.
- Преобразование Бореля: что оно дает?
- Концепция дуальности: путь описать вклады высших состояний
- Численные результаты и уроки

*Кварки внутри,
Адроны снаружи!
Как быть?*

КХД: лагранжиан, кварки и глюоны

Калибровочно-инвариантный лагранжиан КХД

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_{q=u,d,s,\dots} \bar{\psi}_q (i\hat{D} - m_q)\psi_q \quad (1)$$

содержит только поля глюонов ($G_{\mu\nu}^a(x)$) и кварков ($\psi_q(x)$).

Эти поля имеют цветовые степени свободы: 3 у кварков $\psi_q^A(x)$ ($A = 1, 2, 3$) и 8 у глюонов $G_{\mu\nu}^a(x)$ ($a = 1, \dots, 8$).

Взаимодействие спрятано в ковариантной производной D_μ^{AB}

КХД: лагранжиан, кварки и глюоны

Калибровочно-инвариантный лагранжиан КХД

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_{q=u,d,s,\dots} \bar{\psi}_q (i\hat{D} - m_q)\psi_q \quad (1)$$

содержит только поля глюонов ($G_{\mu\nu}^a(x)$) и кварков ($\psi_q(x)$).

Эти поля имеют цветовые степени свободы: 3 у кварков $\psi_q^A(x)$ ($A = 1, 2, 3$) и 8 у глюонов $G_{\mu\nu}^a(x)$ ($a = 1, \dots, 8$).

Взаимодействие спрятано в ковариантной производной D_μ^{AB}

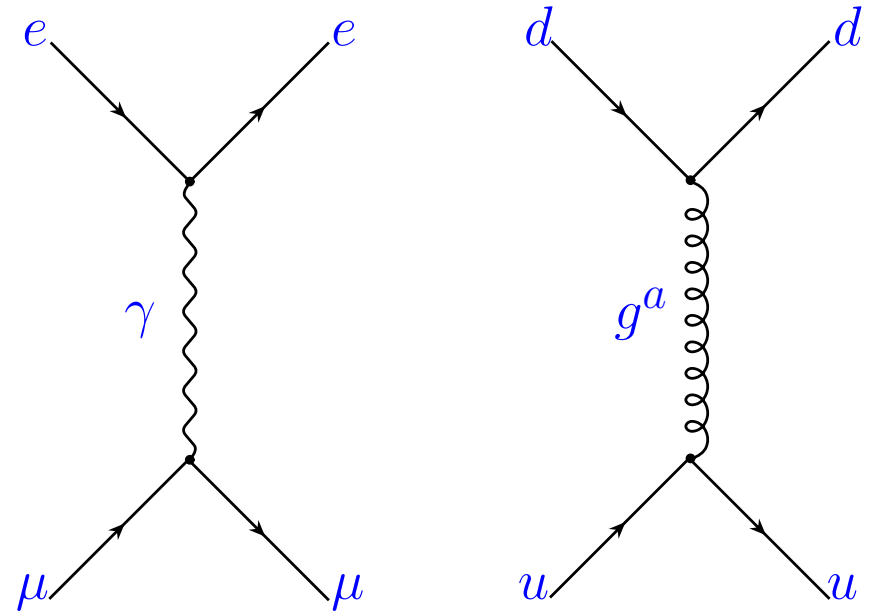
$$D_\mu^{AB} = \partial_\mu - ig_s (t^a)^{AB} A_\mu^a$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Оно нелинейно за счет неабелевости ($f^{abc} \neq 0$).

КХД: цветные глюоны \Rightarrow конфайнмент

Рассмотрим описание $e\mu$ - и qq -рассеяния (d - и u -флейворов): волнистая линия обозначает фотон, а пунктирная – глюон.

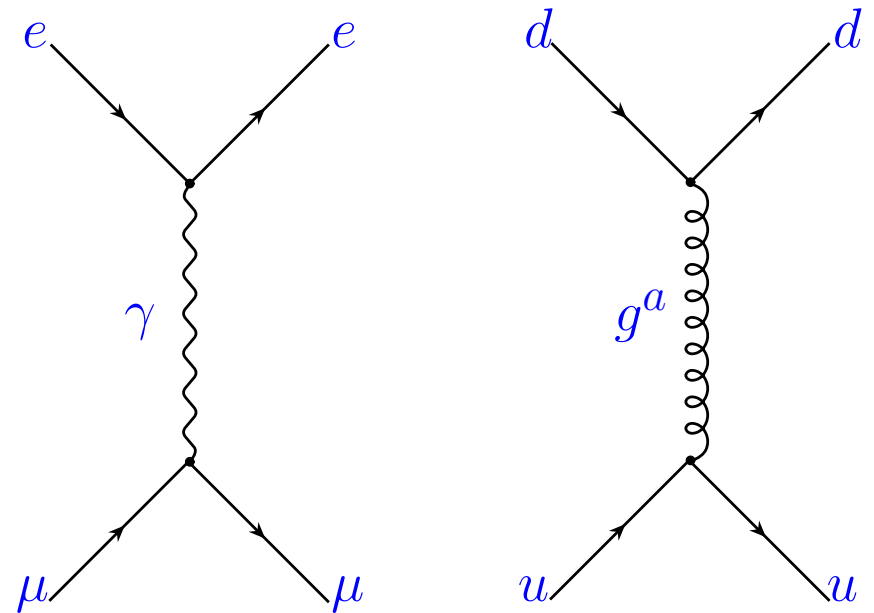


Сравнение:

Параметр	Фотон	Глюон
Масса	0	0
Спин	1	1
Вершина	$e\gamma_\mu$	$g_s\gamma_\mu(t^a)_{ij}$
Заряд	0	$\neq 0$

КХД: цветные глюоны \Rightarrow конфайнмент

Рассмотрим описание $e\mu$ - и qq -рассеяния (d - и u -флейворов): волнистая линия обозначает фотон, а пунктирная – глюон.



Сравнение:

Параметр	Фотон	Глюон
Масса	0	0
Спин	1	1
Вершина	$e\gamma_\mu$	$g_s\gamma_\mu(t^a)_{ij}$
Заряд	0	$\neq 0$

Неабелевость КХД приводит к заряженным (цветным) глюонам. Отсюда – конфайнмент!

Безмассовая КХД: каковы адроны?

PS- и V-мезоны из u - и d -кварков		
тип мезона	PS	V
состав	$\pi^0 [\bar{u}u - \bar{d}d], \pi^\pm [\bar{u}d, \bar{d}u]$	$\rho^0(\omega) [\bar{u}u - \bar{d}d], \rho^\pm [\bar{u}d, \bar{d}u]$
масса	140 МэВ	770(780) МэВ

Безмассовая КХД: каковы адроны?

PS- и V-мезоны из u - и d -кварков		
тип мезона	PS	V
состав	$\pi^0 [\bar{u}u - \bar{d}d]$, $\pi^\pm [\bar{u}d, \bar{d}u]$	$\rho^0(\omega) [\bar{u}u - \bar{d}d]$, $\rho^\pm [\bar{u}d, \bar{d}u]$
масса	140 МэВ	770(780) МэВ

Барионы из u - и d -кварков			
состав	$p [uud]$	$n [udd]$	$\Delta^{++} [uuu]$, $\Delta^+ [uud]$, $\Delta^0 [udd]$, $\Delta^- [ddd]$
масса	938 МэВ	939 МэВ	1232 МэВ

Свойства адронов
в
непертурбативной КХД

КХД ПС: адроны в нпКХД

Проблема: как описывать связанные состояния в КХД?

КХД ПС: адроны в нпКХД

Проблема: как описывать связанные состояния в КХД?

Метод правил сумм КХД позволяет рассчитывать характеристики адронных состояний (массы, распадные константы, магнитные моменты), но ничего не говорит о самом процессе связывания кварков в адрон (**адронизация, конфайнмент**).

КХД ПС: адроны в нпКХД

Проблема: как описывать связанные состояния в КХД?

Метод правил сумм КХД позволяет рассчитывать характеристики адронных состояний (массы, распадные константы, магнитные моменты), но ничего не говорит о самом процессе связывания кварков в адрон (**адронизация, конфайнмент**).

Предложен в 1977 г. **Шифманом, Вайнштейном и Захаровым (ИТЭФ)** для описания спектра состояний J/ψ -частицы, содержащей c -кварк и открытой в 1974 г. на e^+e^- -коллайдере SPEAR (SLAC) (параллельно была открыта и в $p + Be$ -взаимодействиях в BNL). В 1979 г. применен для описания легких адронов в **безмассовой КХД**.

КХД ПС: адроны в нпКХД

Проблема: как описывать связанные состояния в КХД?

Метод правил сумм КХД позволяет рассчитывать характеристики адронных состояний (массы, распадные константы, магнитные моменты), но ничего не говорит о самом процессе связывания кварков в адрон (**адронизация, конфайнмент**).

Предложен в 1977 г. **Шифманом, Вайнштейном и Захаровым (ИТЭФ)** для описания спектра состояний J/ψ -частицы, содержащей c -кварк и открытой в 1974 г. на e^+e^- -коллайдере SPEAR (SLAC) (параллельно была открыта и в $p + Be$ -взаимодействиях в BNL). В 1979 г. применен для описания легких адронов в **безмассовой КХД**.

Основная идея: посчитать **корреляторы адронных токов** $\langle 0|T [J_1(x)J_2(0)] |0\rangle$ двумя способами. Правило сумм – результат согласования.

КХД ПС: общая схема

Коррелятор адронных токов берется в дисперсионном представлении

$$F_{x \rightarrow q} [\langle 0 | T [J_1(x) J_2(0)] | 0 \rangle] (Q^2) \equiv \Pi (Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho_{12}(s) ds}{s + Q^2}.$$

после чего к нему применяют преобразование Бореля:

$$B_{Q^2 \rightarrow M^2} [\Pi(Q^2)] \equiv \Phi (M^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_{12}(s) e^{-s/M^2} \frac{ds}{M^2},$$

которое “давит” вклады высших состояний и способствует улучшению качества правил сумм. Кроме того, оно уничтожает все вычитания в дисперсионном представлении.

КХД ПС: общая схема

1-ый способ: операторное разложение с учетом наличия конденсатов кварковых и глюонных полей в КХД-вакууме

$$\Phi(Q^2) = \Phi_{\text{pert}}(Q^2) + c_{GG} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right\rangle + c_{\bar{q}q} \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2$$

Здесь $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right\rangle = 0.012 \text{ ГэВ}^4$, $\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2 = 0.0018 \text{ ГэВ}^6$.

2-ой способ: феноменологическое насыщение спектральной плотности адронными состояниями

$$\rho_{\text{had}}(s) = f_h^2 \delta(s - m_h^2) + \rho_{\text{pert}}(s) \theta(s - s_0)$$

в виде модели основное состояние $h + \text{continuum}$, который начинается с порога $s = s_0$.

КХД ПС: общая схема

Вопрос: Почему вклад континуума моделируют с помощью пертурбативной спектральной плотности?

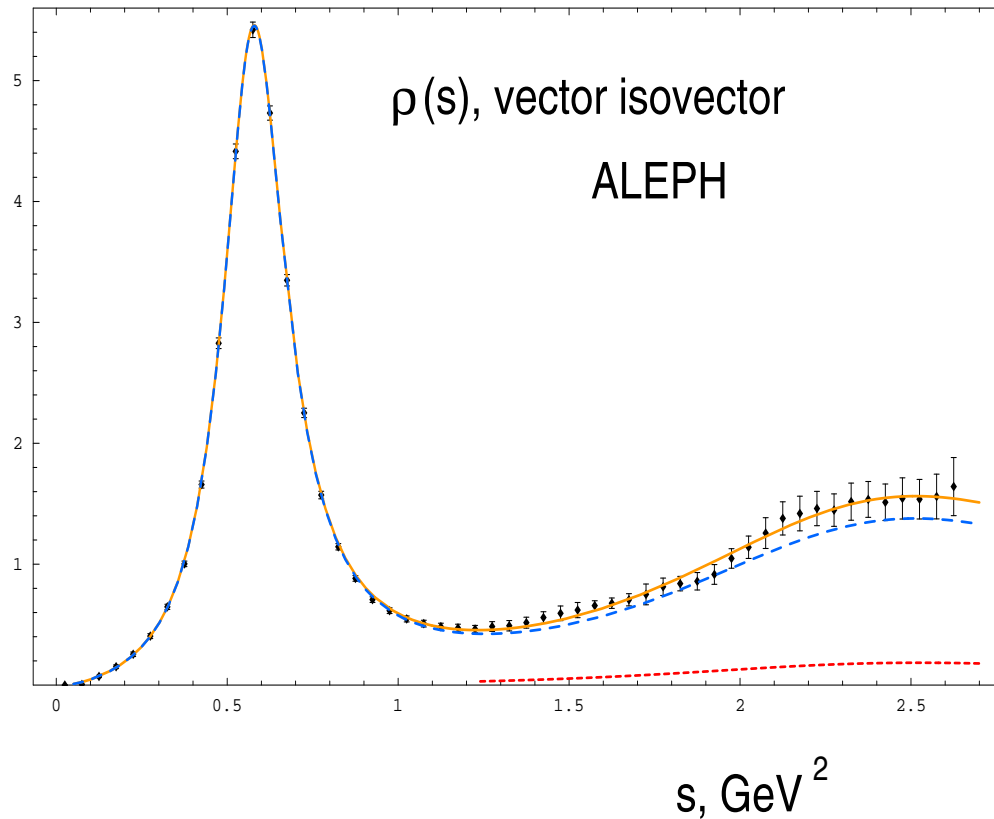
Ответ: у нас имеется строгое соотношение между кварковой и адронной спектральными плотностями при $M^2 \rightarrow \infty$ (когда все степенные поправки обращаются в 0)

$$\int_0^{\infty} \rho_{\text{pert}}(s) ds = \int_0^{\infty} \rho_{\text{had}}(s) ds ,$$

но оно дает нам право говорить о глобальной спектральной дуальности кварков и адронов. А вот эксперименты по e^+e^- -аннигиляции в адроны и по τ -распаду позволяют говорить и о локальной дуальности.

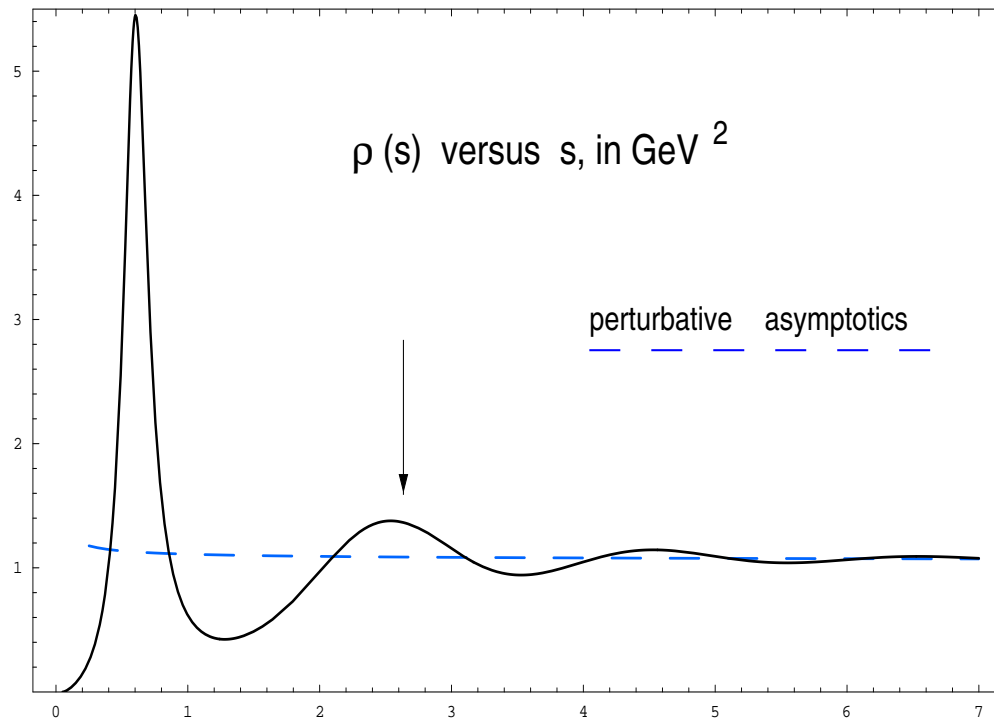
Кварк-адронная дуальность

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho_{\text{pert}}(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \rho_{\text{had}}(s) ds$$



Кварк-адронная дуальность

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho_{\text{pert}}(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \rho_{\text{had}}(s) ds$$



Quantum-mechanical toy model:

Two-Dimensional Harmonic Oscillator

Two-Dimensional Oscillator

Simplest system with confinement – oscillator with potential $V(\vec{r}) = m\omega^2 r^2/2$. All formulas greatly simplify if $D = 2$. Then energy levels are

$$E_n = (2n + 1)\omega ,$$

and wave function values in the origin are

$$|\psi_n(0)|^2 = \frac{m\omega}{\pi} .$$

We will be interested in energy (E_0) and $|\psi_0(0)|^2$ of the ground state.

The general scheme of Sum Rule method

- We study correlator $M(\mu)$, which has spectral expansion:

$$M^{\text{spec}}(\mu) = |\psi_0(0)|^2 e^{-E_0/\mu} + \text{“higher states”}$$

The general scheme of Sum Rule method

- We study correlator $M(\mu)$, which has spectral expansion:

$$M^{\text{spec}}(\mu) = |\psi_0(0)|^2 e^{-E_0/\mu} + \text{“higher states”}$$

- We construct perturbative expansion of this correlator:

$$M^{\text{pert}}(\mu) = M_0(\mu) + \sum_{n \geq 1} C_{2n} \frac{E_0^{2n}}{\mu^{2n}},$$

where $M_0(\mu)$ corresponds to free particle and has dispersion representation:

$$M_0(\mu) = \int_0^\infty \rho_0(s) e^{-s/\mu} ds.$$

The general scheme of Sum Rule method

- We study correlator $M(\mu)$, which has expansion:

$$M^{\text{spec}}(\mu) = |\psi_0(0)|^2 e^{-E_0/\mu} + \text{“higher states”}$$

- We construct perturbative expansion of this correlator:

$$M^{\text{pert}}(\mu) = M_0(\mu) + \sum_{n \geq 1} C_{2n}(Q^2) \frac{E_0^{2n}}{\mu^{2n}}$$

- Sum Rule – it is simply

$$M^{\text{spec}}(\mu) = M^{\text{pert}}(\mu)$$

The general scheme of Sum Rule method

- It appears that higher state contributions can be well approximated by

“higher states” = “free states” outside interval $(0, s_0)$

The general scheme of Sum Rule method

- It appears that higher state contributions can be well approximated by

“higher states” = “free states” outside interval $(0, s_0)$

- As a result we have Sum Rule (SR):

$$|\psi_0(0)|^2 = \int_0^{s_0} \rho_0(s) e^{-(s-E_0)/\mu} ds$$

+ “power corrections”

The general scheme of Sum Rule method

- It appears that higher state contributions can be well approximated by

“higher states” = “free states” outside interval $(0, s_0)$

- As a result we have Sum Rule (SR):

$$|\psi_0(0)|^2 = \int_0^{s_0} \rho_0(s) e^{-(s-E_0)/\mu} ds$$
$$+ e^{E_0/\mu} \left[C_2 \frac{E_0^2}{\mu^2} + C_4 \frac{E_0^4}{\mu^4} + \dots \right]$$

$M(n, E)$ and Green function $G(\vec{x}, -E)$

- Consider Green function

$$G(\vec{x}, E) = \sum_{k \geq 0} \frac{\psi_k(\vec{x})\psi_k^*(0)}{E_k - E}.$$

It has poles in E at $E = E_k$. We will use its analytic continuation to negative E , which is regular function:

$$G(\vec{x}, -E) = \sum_{k \geq 0} \frac{\psi_k(\vec{x})\psi_k^*(0)}{E_k + E}.$$

$M(n, E)$ and Green function $G(\vec{x}, -E)$

- We will use its analytic continuation to negative E , which is regular function:

$$G(\vec{x}, -E) = \sum_{k \geq 0} \frac{\psi_k(\vec{x}) \psi_k^*(0)}{E_k + E}.$$

- Consider correlator:

$$M(n, E) = \frac{(-E)^n}{(n-1)!} \frac{d^n}{dE^n} G(0, -E) \equiv \hat{D}_n(E) G(0, -E)$$

$M(n, E)$ and Green function $G(\vec{x}, -E)$

- We will use its analytic continuation to negative E , which is regular function:

$$G(\vec{x}, -E) = \sum_{k \geq 0} \frac{\psi_k(\vec{x}) \psi_k^*(0)}{E_k + E}.$$

- Consider correlator:

$$M(n, E) = \frac{(-E)^n}{(n-1)!} \frac{d^n}{dE^n} G(0, -E) \equiv \hat{D}_n(E) G(0, -E)$$

- Lipmann–Schwinger equation for Green function:

$$G(\vec{x}) = G_0(\vec{x}) - G_0(\vec{x} - \vec{y}) \otimes V(\vec{y}) \otimes G_0(\vec{y}) + \dots$$

$M(n, E)$ and Green function $G(\vec{x}, -E)$

- Consider correlator:

$$M(n, E) = \frac{(-E)^n}{(n-1)!} \frac{d^n}{dE^n} G(0, -E) \equiv \hat{D}_n(E) G(0, -E)$$

- Lipmann–Schwinger equation for Green function:

$$G(\vec{x}) = G_0(\vec{x}) - G_0(\vec{x} - \vec{y}) \otimes V(\vec{y}) \otimes G_0(\vec{y}) + \dots$$

- Lipmann–Schwinger equation for our correlator M :

$$M(n, E) = M_0(n, E) - M_0(n, E) \frac{\omega^2}{4E^2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) + \dots$$

$M(n, E)$ and Green function $G(\vec{x}, -E)$

- Lipmann–Schwinger equation for our correlator M :

$$M(n, E) = M_0(n, E) - M_0(n, E) \frac{\omega^2}{4E^2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) + \dots$$

Asymptotic Freedom in Quantum Mechanics

is violated by **Power Corrections**

of the type ω^2/E^2

D=3 осцилятор:

Сравним разные представления для M/M_0

Спектральное представл. |

Т. В.

$$\frac{1}{M_0(n, E)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\Psi_k(\omega)|^2}{\left[1 + \frac{E_k}{E}\right]^{n+1}} = 1 - \frac{\omega^2}{4E^2} (n + \frac{1}{2})(n - \frac{1}{2}) + \dots$$

Сравним при

$$\underline{E = \omega, n = 1}$$

0-уровень < 1/3 суммы Σ

$$0.255 \left(1 + 0.308 + 0.206 + 0.147 + \dots + 0.04 + \dots \right)$$

$$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \dots = \frac{3}{16}$$

10 уровней $\approx 2/3 \cdot \Sigma$

As. f. - уже работает!

Спектральный ряд сходится плохо!

Улучшить сходимость Σ и не испортить ТВ
E и n одновременно $\rightarrow \infty$

$$E = \mu \cdot n, \quad n \rightarrow \infty$$



3. Преобразование Бореля

$$M(\mu) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} M(E = n \cdot \mu, n) =$$

$$= \mu \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-E)^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dE}\right)^n G(\vec{x}, -E) \Big|_{\vec{x}=0}$$

$\hat{B}(E \rightarrow \mu)$ - Преобразование Бореля

\hat{B} : E^{-d} из Т. В. $\rightarrow \mu^{-d}$

$$\hat{B} \frac{1}{E^d} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-E)^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dE}\right)^n \frac{1}{E^d} = \frac{1}{\Gamma(d)} \frac{1}{\mu^d} \text{ - на гом}$$

↑
Факториальное
подавление

\hat{B} : Спектральное представление

$$M(\mu) \equiv \mu \hat{B} G(0, -E) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \omega} \frac{|\psi_k|^2}{\left(1 + \frac{E_k}{\mu \cdot n}\right)^{n+1}} = \sum_{k=0} |\psi_k(0)|^2 e^{-\frac{E_k}{\mu}}$$

экспоненциальное подавление
высоких состояний

$$M_0(\mu) \equiv \mu \hat{B}(E \rightarrow \mu) G_0(0, -E) = \left(\frac{\mu m}{2\pi}\right)^{\frac{D}{2}} \leftarrow \begin{array}{c} \triangle \\ \text{на гом} \end{array}$$

D=3 осциллятор, $M(\mu)/M_0(\mu)$ ПРИ $\mu = \omega$

Что улучшилось?

спектральное представление

$$M(\mu) = \left(\frac{2}{e}\right)^{D/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + \frac{D}{2} - 1)!}{k!} e^{-2k} =$$

$$= 0.63 (1 + 0.2 + 0.04 + \dots)$$

↑
4/5 всей Σ

↑
МАЛЫЕ поправки

T.V.
↙

$$M(\mu) = 1 - \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$\approx 0.75$$

"Правила сумм" действительно насыщаются 1 уровнем.

Что такое

$$M(\mu) = \sum_{k=0} |\psi_k(0)|^2 e^{-\frac{E_k}{\mu}}$$

-8-

физически?

ФГ в (\vec{x}, t) представления

$$G(\vec{x}, t; 0, 0) = \sum_{k=0} \psi_k(\vec{x}) \psi_k^*(0) e^{-iE_k t} \theta(t)$$

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_0 \right] G(\vec{x}, t; 0, 0) = i \delta(\vec{x}) \delta(t)$$

$$M(\mu) = G(0, \frac{1}{i\mu}; 0, 0) - \text{ФГ в мнимом времени}$$

$t \rightarrow \frac{1}{i\mu}$

Улучшая ПС естественно пришли к ФГ
при $t = \frac{1}{i\mu}$

Свободная ФГ

$$G_0(\vec{x}, t) = \left(\frac{mi}{2\pi t} \right)^{D/2} e^{+im(\vec{x})^2/2t} \rightarrow M_0(\vec{x}; \mu) =$$
$$= \left(\frac{m}{2\pi} \mu \right)^{D/2} e^{-m\mu(\vec{x})^2/2}$$

$$G(\vec{x}; -E) \stackrel{D=3}{\sim} \frac{1}{|\vec{x}|} e^{-\sqrt{2mE} |\vec{x}|}$$

Резюме

1 Почему "Правила сумм" ?

$$\sum (\text{спектр}) = \sum (\text{free}) + \left(\frac{\text{собст. мода}}{E} \right)^n$$

При больших E - "Асимпт. свобода"

2 Борелизация

$$\hat{B} \sum_{n=0}^{\infty} = \text{Вклад 0-уровня} + \text{поправки}$$

[малые при малем μ]

3. Борелизация \leftrightarrow Ф.Г. в мнимом времени

$$E - m_0 c^2$$

ОСЦИЛЛЯТОР, D=2

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛ.

$$\hat{M}^{osc}(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m\omega}{\pi} \cdot \exp\left\{- (2k+1) \frac{\omega}{\mu}\right\} = \left[\frac{m\omega}{2\pi \operatorname{sh}\left(\frac{\omega}{\mu}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{1}{\psi_k} \left| \right|^2$ (green arrow to $\frac{m\omega}{\pi}$)
 $-\frac{E_k}{\mu}$ (green arrow to $-(2k+1)\frac{\omega}{\mu}$)
 Точная ФГ $G(0, \frac{1}{i\mu})$ (green arrow to the square root)

Т. В. по $\frac{\omega}{\mu}$

$$M^{osc}(\mu) = \frac{m\mu}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^2 + \frac{7}{360} \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^4 - \dots \right)^{\frac{1}{2}}$$

$M_0(\mu)$ (red arrow to $\frac{m\mu}{2\pi}$)
 $M_0 \otimes V \otimes M_0$ (red arrow to the series)

(1) При больших $\tau = 1/\mu$ или малых μ слева выживает $|\psi_0(\omega)|^2 e^{-E_0/\mu}$

Но, рушится Т.В. справа

(2) При малых τ , больших μ слева

"включается" много резонансов: $M^{osc} \rightarrow M_0$

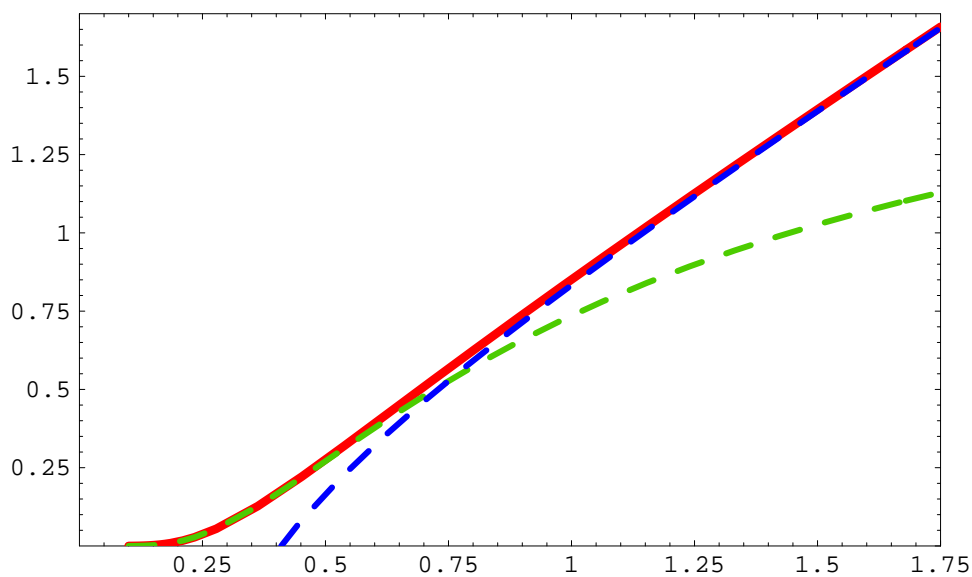
Зато справа работает Т.В.

("Асимптот. свобода" при $\mu \gg \omega$)

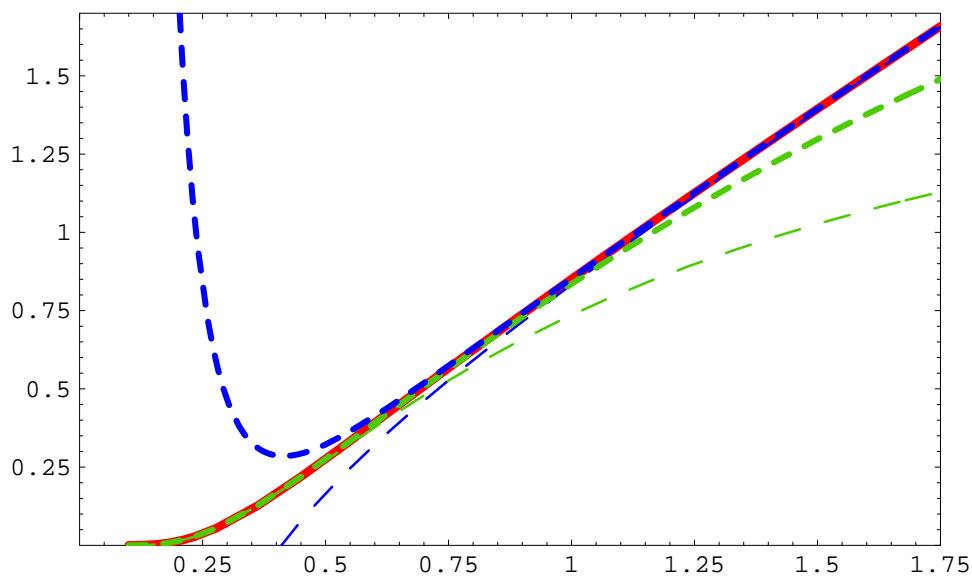
Ищем "рабочее ОКНО"

где работают и Т.В. и основное состояние

Точное решение; Основное состояние; 1-ая степ. поправка.



Основное +1 возбужденное состояния; 1+2-ая степ.поправки



Вклады высоких резонансов важны

можно ли учесть их "эффективно"?

"СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ" В КМ

"Свободная плотность", $E_k = \frac{k^2}{2m}$

def

$$M_0(\mu) \equiv \sum_{k=0} |\Psi_k(0)|^2 e^{-E_k/\mu} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-E_k/\mu} = \int_0^\infty dE e^{-E/\mu} \rho_0(E)$$

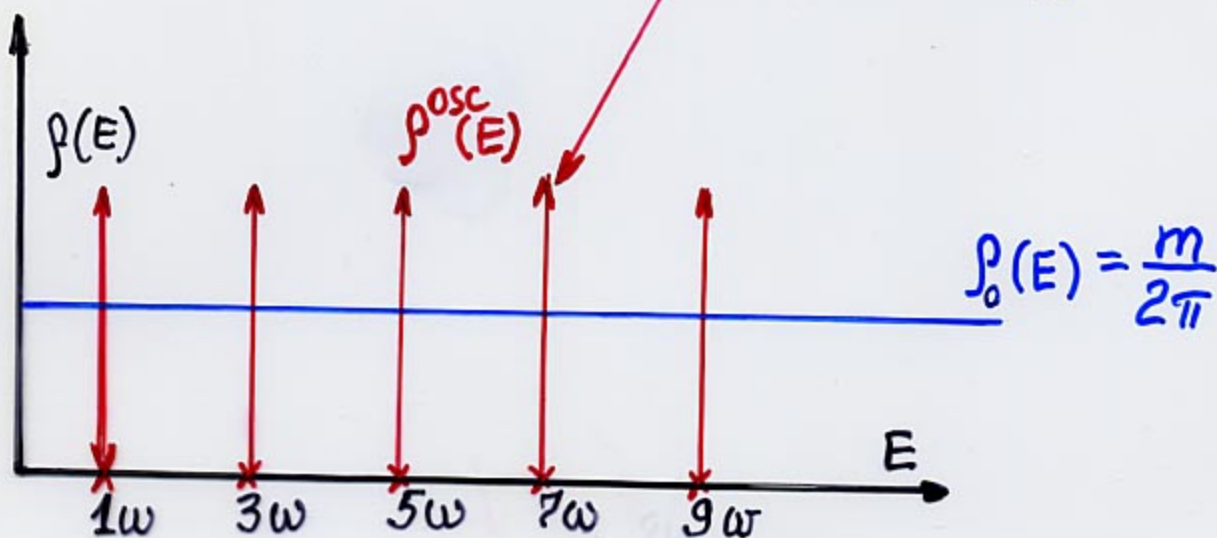
$$\rho_0(E) = \left. \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{D/2} \frac{E^{D/2-1}}{\Gamma(D/2)} \right|_{D=2} = \frac{m}{2\pi}$$

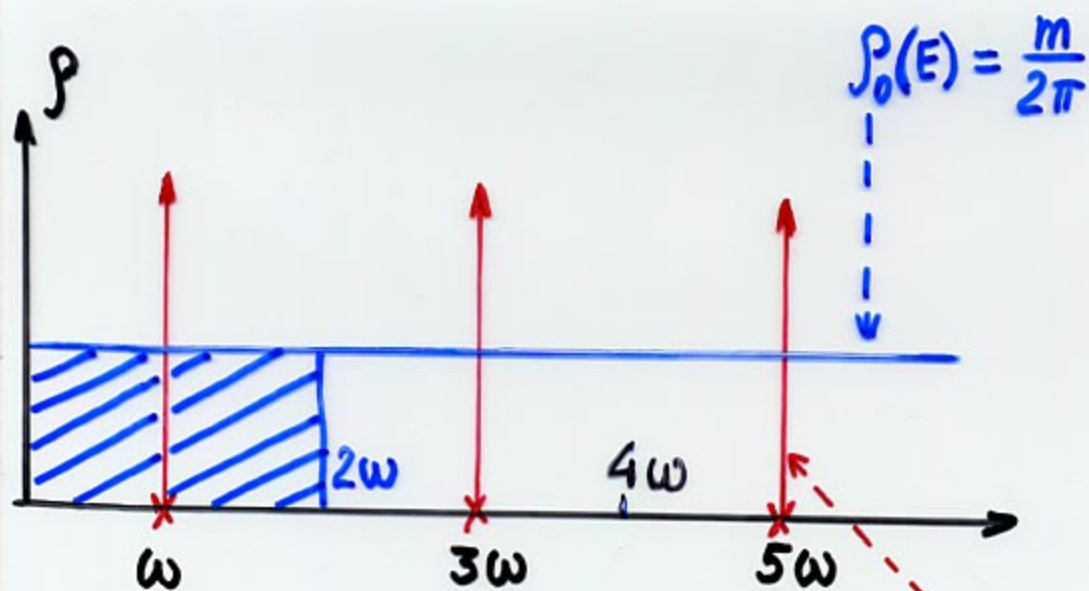
Осцилляторная плотность, $E_k = (2k + \frac{D}{2})\omega$

$$M^{\text{osc}}(\mu) = \sum_{k=0} |\Psi_k(0)|^2 e^{-E_k/\mu}$$

$$(D=2) = \int dE e^{-E/\mu} \left\{ \rho^{\text{osc}}(E) = \frac{m\omega}{\pi} \sum_{k=0} \delta(E - (2k+1)\omega) \right\}$$

Совершенно разное поведение ρ





$$\rho_0(E) = \frac{m}{2\pi}$$

$$\rho^{osc}(E) = \frac{m\omega}{\pi} \sum_{k=0} \delta(E - (2k+1)\omega)$$

$$\int_{2k\omega}^{2(k+1)\omega} \rho_0(E) E^0 dE = \frac{m\omega}{\pi} = \int_{2k\omega}^{2(k+1)\omega} \rho^{osc}(E) E^0 dE$$

$$\int_{2k\omega}^{2(k+1)\omega} \rho_0(E) E^1 dE = \frac{m\omega^2}{\pi} (2k+1) = \int_{2k\omega}^{2(k+1)\omega} \rho^{osc}(E) E^1 dE$$

$\forall k$

Дуальность между каждым резонансом

и свободным состоянием

это - Наблюдение.

Для E^n , $n > 1$ точная дуальность нарушена,
но остаётся приближенная
при $k \gg 1$

Глобальная дуальность

$$D=2 \quad M^{osc}(\mu) = M_0(\mu) \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\omega}{\mu} \right)^2 + \frac{7}{360} \left(\frac{\omega}{\mu} \right)^4 - \dots \right)$$

$$M^{osc}(\mu) - M_0(\mu) = \begin{cases} \sum_{k=2,4,\dots} \frac{A_k}{\mu^k} \\ \int_0^\infty [\rho^{osc}(E) - \rho_0(E)] e^{-E/\mu} dE \end{cases}$$

$$\int_0^\infty [\rho^{osc}(E) - \rho_0(E)] dE \stackrel{\mu \rightarrow \infty}{=} 0 \quad \leftarrow \begin{matrix} GD \\ \text{Это-Теорема} \end{matrix}$$

Верно для \forall потенциалов, конечных в 0

$\rho^{EXACT}(E)$ близко к $\rho_0(E)$

в интегральном (слабом) смысле

ΔD и интервал?

На гом

$D=4$ осциллятор

$$\rho_0(E) = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 E$$

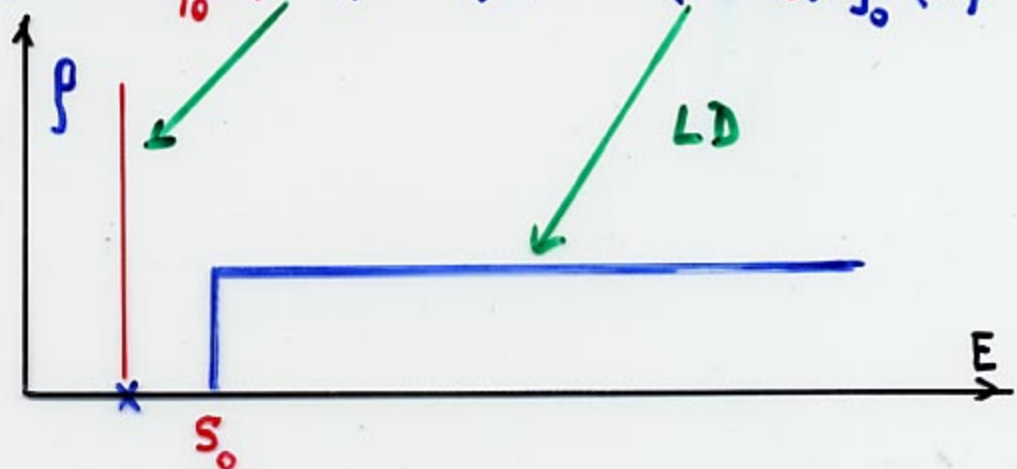
$$E_k = (2k+2)\omega$$

$$|\psi_k(0)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi} \right)^2 \frac{(2k+2)}{2}$$

ПРАВИЛА СУММ, $D=2$ ОСЦИЛЛЯТОР
 "ПОЛОВИННАЯ ЗАДАЧА": $E_0 = \omega$
 $|\psi_0(\omega)|^2$?

Модель: $\rho(E) \rightarrow \rho^{ph}(E)$

$$\rho^{ph}(E) = |\psi_0(\omega)|^2 \delta(E - \omega) + \theta(E - s_0) \cdot \rho_0(E)$$



$$M(\mu) \approx M^{ph}(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-E/\mu} \rho^{ph}(E) dE =$$

$$= |\psi_0(\omega)|^2 e^{-\frac{\omega}{\mu}} + \int_{s_0}^{\infty} e^{-E/\mu} \rho_0(E) dE$$

Высшие резонансы

$$\approx M_0(\mu) + M_0(\mu) \left(-\frac{1}{6} \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^2 + \frac{7}{360} \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^4 - \dots \right)$$

↑
 степенные поправки

Равенство справедливо в "Окне μ "

Окно достоверности

-14-

СТЕПЕН. ПОПРАВКИ $\leq 0.3 \cdot M_0$

ВЫСШ. СОСТОЯНИЯ $\leq 0.3 M_0$



d

$$\leq \mu \leq$$



u

$$|\psi_0(\omega)|^2 = e^{\frac{\omega \epsilon}{\mu}} \left\{ \int_0^{s_0} e^{-\frac{\epsilon}{\mu}} \rho(\epsilon) d\epsilon + M_0(\mu) [\text{СТЕПЕН. ПОПРАВКИ}] \right\} = f(\mu; s_0)$$

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ: $|\psi_0(\omega)|^2 = \text{const}$

ПРИБЛИЖЕННОЕ
РЕШЕНИЕ

$$|\psi_0(\omega)|^2 = f(\mu; s_0)$$

ЗАВИСИТ ОТ μ И s_0

Принцип "МИНИМАЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ":

Найти s_0 такое, что $|\psi_0(\omega)|^2$

НАИМЕНЕЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНА К μ

В ОКНЕ ДОСТОВЕРНОСТИ

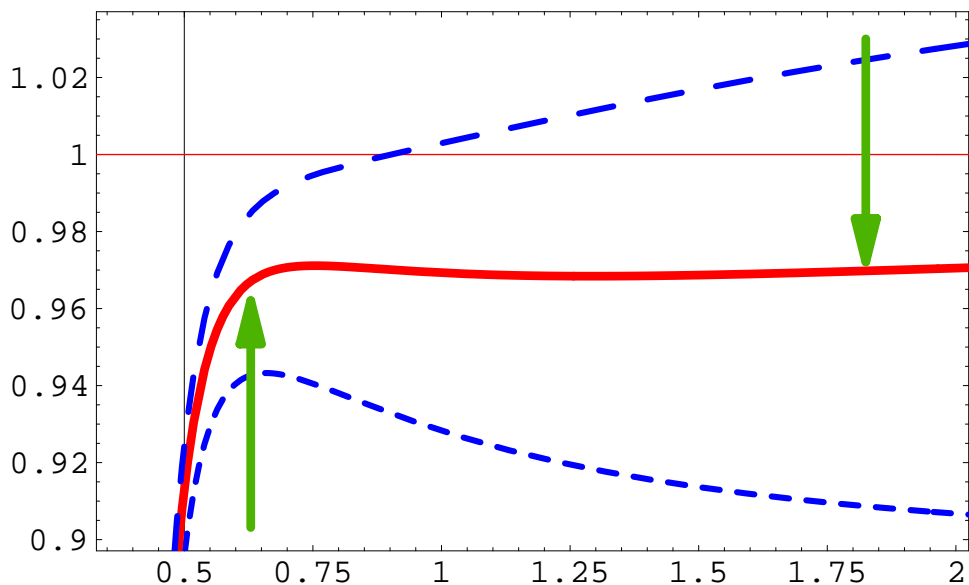
3 порядок: $-\frac{1}{6} \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^2 + \frac{7}{360} \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^4 - \frac{31}{15120} \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^6$

$|\tilde{\psi}_0(0)|^2 \approx 0.97 \quad \chi^2 \approx 10^{-7} \quad s_0 \approx 1.98 \omega$

Точные : 1

2

График $|\tilde{\psi}_0(0)|^2(\mu, s_0)$



Хорошо!

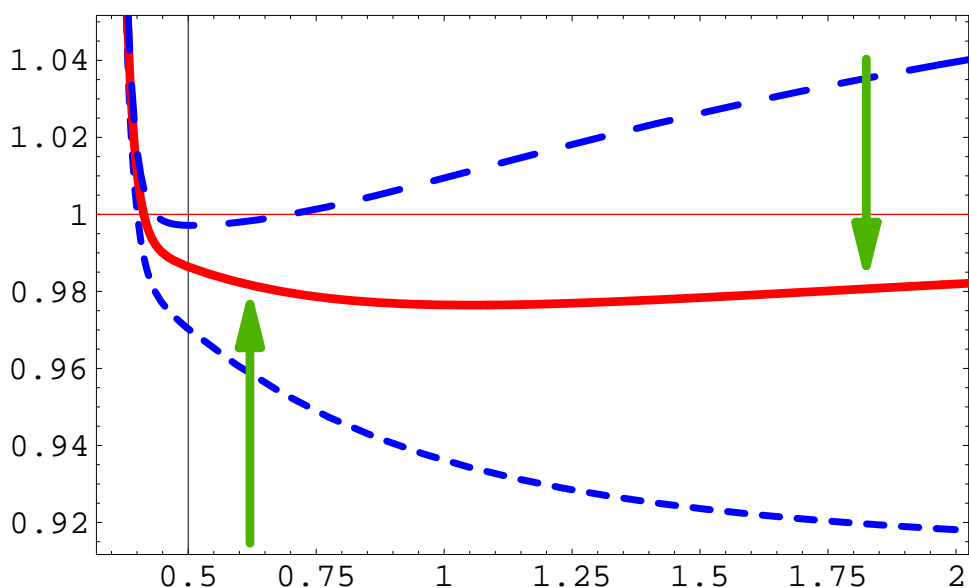
10 порядок

$|\tilde{\psi}_0(0)|^2 \approx 0.98 \quad \chi^2 \approx 3 * 10^{-7}$

$s_0 \approx 2.02 \omega$

Точные : 1

2



2% - неизлечимы, \Rightarrow из модели резонансов по LD
из GD $\Rightarrow |\tilde{\psi}_0(0)|^2 = \frac{s_0}{2} \approx 1.01$ - Хорошо!

ПОЛНАЯ ЗАДАЧА

$$|\tilde{\Psi}_0(\omega)|^2 e^{-E_0/\mu} \stackrel{E_0 - ?}{=} \frac{\mu}{2} \left\{ (1 - e^{-s_0/\mu}) + \text{СТЕПЕН. ПОПРАВКИ} \right\}$$

$|\Psi_0(\omega)|^2 - ?$

↑
ВЫСШИЕ РЕЗОНАНСЫ

$$|\tilde{\Psi}_0(\omega)|^2 E_0 e^{-E_0/\mu} \stackrel{\partial(E/\mu)}{=} \frac{\mu^2}{2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{s_0}{\mu}\right) e^{-s_0/\mu} + \frac{1}{6} \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^2 + \dots \right\}$$

↑
дочерние ПС

$$E_0 = E_0(s_0, \mu) = \mu \frac{1 - \left(1 + \frac{s_0}{\mu}\right) e^{-s_0/\mu} + \frac{1}{6} \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^2 - \dots}{1 - e^{-s_0/\mu} - \frac{1}{6} \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^2 + \dots}$$

$E_0 \approx E_0(s_0, \mu)$ - из минимальной чувствительности к μ при подходящем s_0 в окне

$$d \leq \mu \leq u$$

3 порядок

$$E_0 \approx 0.96 \omega \quad |\tilde{\psi}_0(0)|^2 \approx 0.9 \quad \chi^2 \approx 3 \cdot 10^{-7} \quad s_0 \approx 1.8 \omega$$

Точные : 1

1

2

График $E_0(\mu, s_0)$

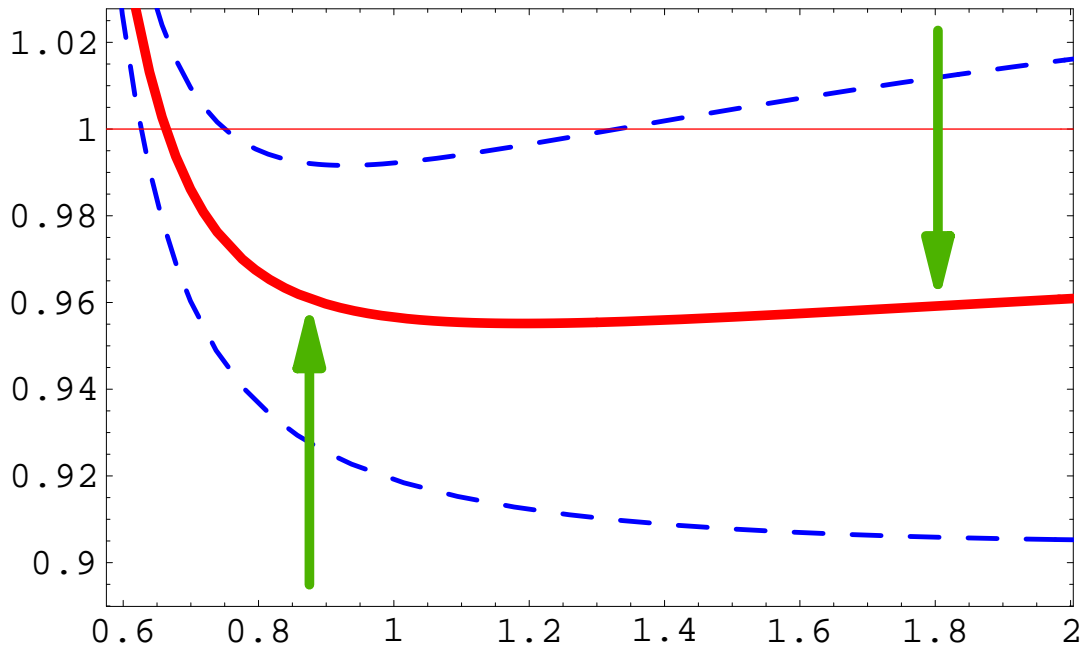
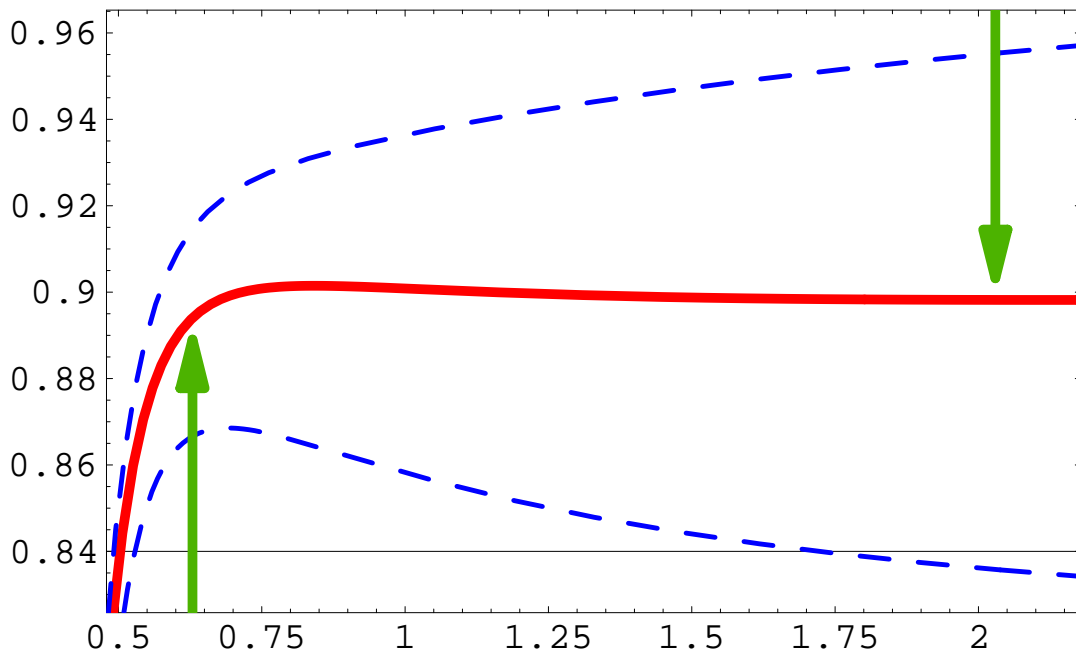


График $|\tilde{\psi}_0(0)|^2(\mu, s_0)$



Хорошо!

Лучший фит:

$$E_0 = 0.96\omega; \quad |\tilde{\Psi}_0(\omega)|^2 = 0.9; \quad \xi = 1.8\omega$$

Заклучение

- * Правила сумм дают значения $E_0, \Psi_0(\omega)$ с точностью не хуже 10%
- * Главный источник ошибки — грубость модели для спектральной плотности высших состояний
- * В КХД спектральная плотность ближе к пертурбативной