Lecture 4: Sum Rules for Form Factors

QCD and Local Duality

A. P. Bakulev

Bogolyubov Lab. Theor. Phys., JINR (Dubna, Russia)

July 9, 2005

Содержание

- Локальная дуальность для формфактора осциллятора.
- Правила сумм КХД: 3-точечный кореллятор векторного и двух аксиальных токов и формфактор пиона.
- Локальная дуальность для формфактора пиона и тождество Уорда.
- Факторизация, пионная амплитуда распределения (πAP), ее эволюция в пертурбативной КХД
- πAP в правилах сумм КХД с нелокальными конденсатами

Local duality for form factor of 2D oscillator

Local duality: oscillator FF

- Оказывается, в подходе “локальной дуальности” (ЛД), разработанном в ОИЯИ А. В. Радюшкиным с соавторами, можно рассчитать ФФ при больших q и без обращения к ПС с двумя состояниями.

Local duality: oscillator FF

- Оказывается, в подходе “локальной дуальности” (ЛД), разработанном в ОИЯИ А. В. Радюшкиным с соавторами, можно рассчитать ФФ при больших q и без обращения к ПС с двумя состояниями.
- Идея подхода заключается в том, что в пределе $M \to \infty$ все степенные поправки обращаются в ноль. Единственный параметр, который помнит о степенных поправках, – это s_0. Его фиксируют из борелевских ПС (т.е. с конечными M) или из эксперимента.

Local duality: oscillator FF

- Оказывается, в подходе "локальной дуальности" (ЛД), разработанном в ОИЯИ А. В. Радюшкиным с соавторами, можно рассчитать ФФ при больших q и без обращения к ПС с двумя состояниями.
- Идея подхода заключается в том, что в пределе $M \to \infty$ все степенные поправки обращаются в ноль. Единственный параметр, который помнит о степенных поправках, – это s_0. Его фиксируют из борелевских ПС (т.е. с конечными M) или из эксперимента.
- Мы будем фиксировать s_0 из ПС ЛД для $|\psi_0(0)|^2$:

$$\left\{|\psi_0(0)|^2\right\}_{\rm LD} = \frac{m\, s_0^{\rm LD}}{2\pi} = \frac{m\,\omega}{\pi} \quad \text{with} \quad \boxed{s_0^{\rm LD} = 2\,\omega}$$

Local duality: oscillator FF

Для ФФ получаем

$$\left\{|\psi_0(0)|^2\right\}_{\rm LD} F_{00}^{\rm LD}(Q^2) = \int_0^{2\,\omega}\!\!\int_0^{2\,\omega} \rho_0(s_1, s_2, Q^2)\, ds_1\, ds_2\,.$$

Local duality: oscillator FF

Для ФФ получаем

$$\left\{|\psi_0(0)|^2\right\}_{\rm LD} F_{00}^{\rm LD}(Q^2) = \int_0^{2\,\omega}\!\!\int_0^{2\,\omega} \rho_0(s_1,s_2,Q^2)\,ds_1\,ds_2\,.$$

Рассмотрим его значение при $Q^2=0$: мы знаем, что $\rho_0(s_1,s_2,0)=\dfrac{m}{2\pi}\,\delta\left(s_1-s_2\right)$. Поэтому

$$\left\{|\psi_0(0)|^2\right\}_{\rm LD} F_{00}^{\rm LD}(0) = \left\{|\psi_0(0)|^2\right\}_{\rm LD}\,,$$

и, следовательно,

$$\boxed{F_{00}^{\rm LD}(Q^2=0)=1}$$

Local duality: oscillator FF

Для ФФ получаем

$$\left\{|\psi_0(0)|^2\right\}_{\rm LD} F_{00}^{\rm LD}(Q^2) = \int_0^{2\,\omega}\!\!\int_0^{2\,\omega} \rho_0(s_1, s_2, Q^2)\, ds_1\, ds_2\,.$$

Используем интегральное представление

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right)\delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

Local duality: oscillator FF

Для ФФ получаем

$$\left\{|\psi_0(0)|^2\right\}_{\mathrm{LD}} F_{00}^{\mathrm{LD}}(Q^2) = \int_0^{2\,\omega}\!\!\int_0^{2\,\omega} \rho_0(s_1, s_2, Q^2)\, ds_1\, ds_2\,.$$

Используем интегральное представление

$$\rho_0(s_1, s_2, Q^2) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \delta\left(s_1 - \frac{k^2}{2m}\right) \delta\left(s_2 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)$$

$$F_{00}^{\mathrm{LD}}(Q^2) = \int \frac{d^2k}{4m\,\omega\,\pi}\, \theta\left(2\,\omega - \frac{k^2}{2m}\right) \theta\left(2\,\omega - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right)\,.$$

Интеграл берется легко из геометрических соображений. Кто скажет как?

Local duality: oscillator FF

$$= \frac{2}{\pi}\left[\arccos\left(\frac{Q}{4\sqrt{m\,\omega}}\right) - \frac{Q}{4\sqrt{m\,\omega}}\sqrt{1-\frac{Q^2}{16m\,\omega}}\right]\theta\left(16m\,\omega - Q^2\right)$$

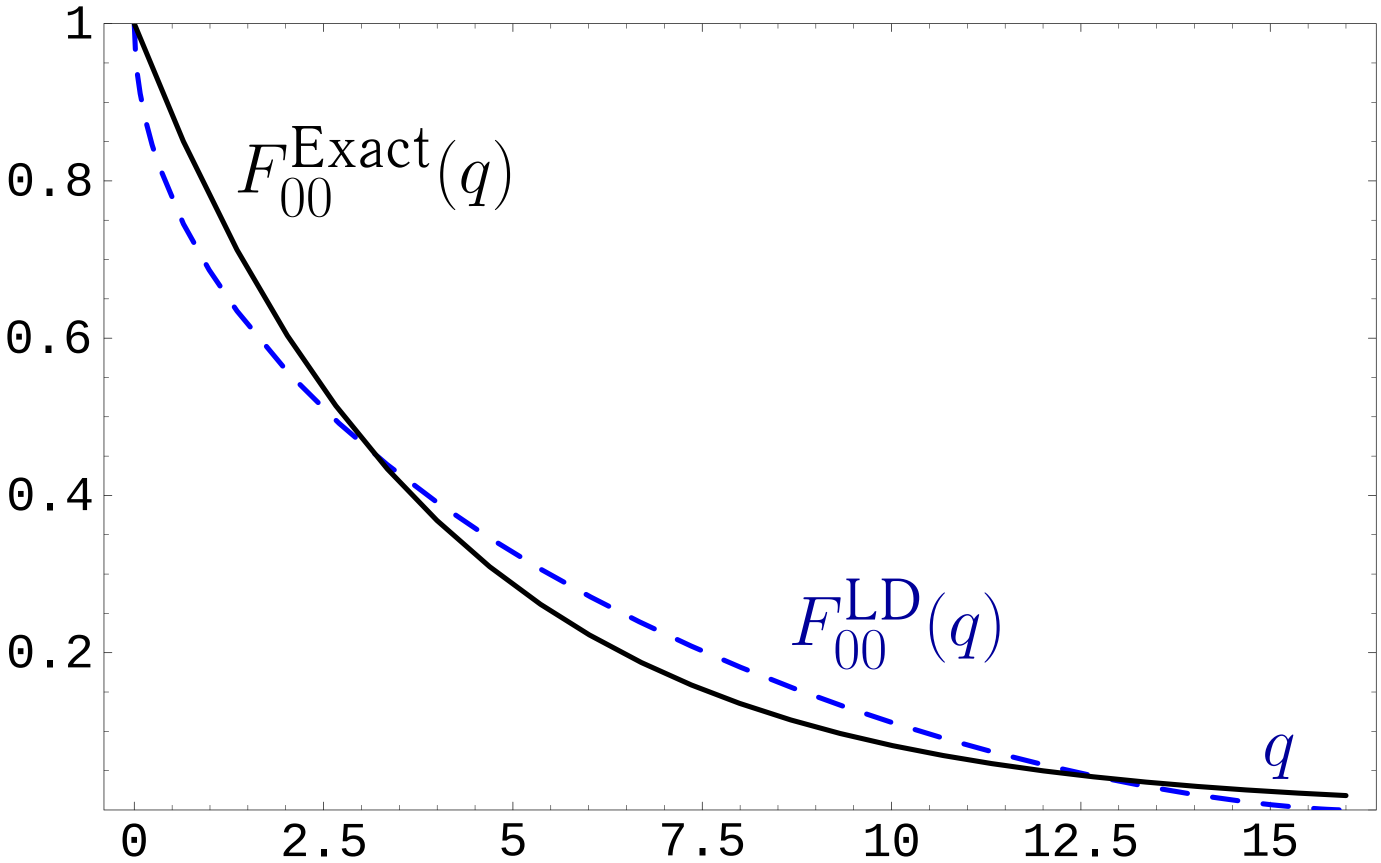
или в безразмерных переменных

$$F_{00}^{\rm LD}(q) = \frac{2}{\pi}\left[\arccos\sqrt{\frac{q}{16}} - \sqrt{\frac{q}{16}}\sqrt{1-\frac{q}{16}}\right]\theta\left(1-\frac{q}{16}\right)\,.$$

Local duality: oscillator FF

$$F_{00}^{\mathrm{LD}}(q) = \frac{2}{\pi}\left[\arccos\sqrt{\frac{q}{16}} - \sqrt{\frac{q}{16}}\sqrt{1-\frac{q}{16}}\right]\theta\left(1-\frac{q}{16}\right).$$

Посмотрим сравнение с точным ФФ:



Локальная дуальность и физика за ней

Подход ЛД основан на очень простом физическом приближении:

$$F_{00}^{\mathrm{LD}}(Q^2) = \frac{1}{|\psi_0(0)|^2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \theta\!\left(s_0 - \frac{k^2}{2m}\right) \theta\!\left(s_0 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right).$$

Локальная дуальность и физика за ней

Подход ЛД основан на очень простом физическом приближении:

$$F_{00}^{\rm LD}(Q^2) = \frac{1}{|\psi_0(0)|^2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\theta\left(s_0 - \frac{k^2}{2m}\right)\theta\left(s_0 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right).$$

Сравним с импульсным представлением точного ФФ

$$F_{00}(Q^2) = \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\Psi_0(k)\Psi_0^*(k+Q)\,.$$

Локальная дуальность и физика за ней

Подход ЛД основан на очень простом физическом приближении:

$$F_{00}^{\mathrm{LD}}(Q^2) = \frac{1}{|\psi_0(0)|^2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\theta\left(s_0 - \frac{k^2}{2m}\right)\theta\left(s_0 - \frac{(k+Q)^2}{2m}\right).$$

Сравним с импульсным представлением точного ФФ

$$F_{00}(Q^2) = \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\Psi_0(k)\Psi_0^*(k+Q)\,.$$

Вывод: ЛД эквивалентна приближению

$$\Psi_0(k)^{\mathrm{LD}} = \frac{1}{|\psi_0(0)|}\theta\left(s_0 - \frac{k^2}{2m}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{m\,\omega}}\,\theta\left(4m\,\omega - k^2\right).$$

Локальная дуальность и физика за ней

Вывод: ЛД эквивалентна приближению

$$\Psi_0(k)^{\rm LD} = \sqrt{\frac{\pi}{m\,\omega}}\,\theta\big(4m\,\omega - k^2\big)$$

для точных ВФ осциллятор

$$\Psi_0(k) = 2\sqrt{\frac{\pi}{m\,\omega}}\,\exp\left(-\frac{k^2}{2m\,\omega}\right)$$

При этом

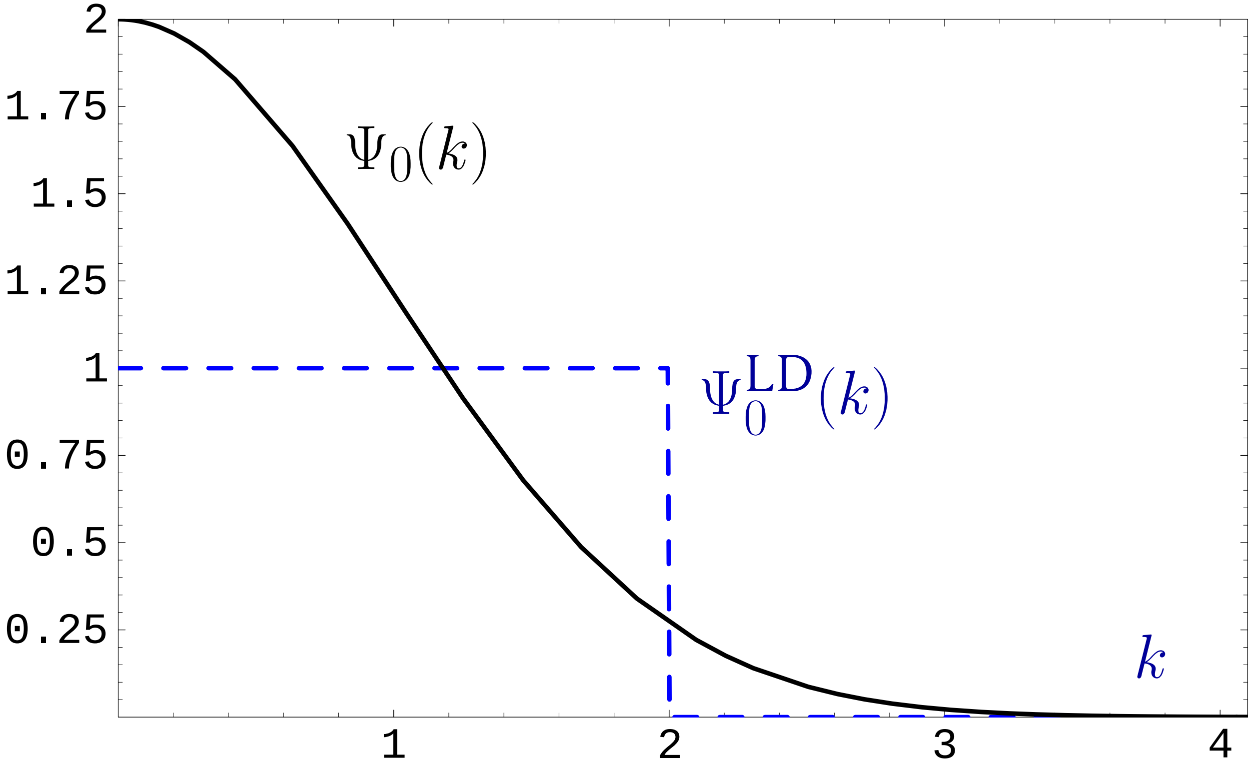
$$\int d^2k\,\Psi_0(k) = \int d^2k\,\Psi_0^{\rm LD}(k)\,;$$

$$\int d^2k\,k^2\Psi_0(k) = \int d^2k\,k^2\Psi_0^{\rm LD}(k)\,.$$

Локальная дуальность и физика за ней

$$\int d^2k\,\Psi_0(k) = \int d^2k\,\Psi_0^{\rm LD}(k)\,; \qquad \int d^2k\,k^2\Psi_0(k) = \int d^2k\,k^2\Psi_0^{\rm LD}(k).$$

Посмотрим картинку:



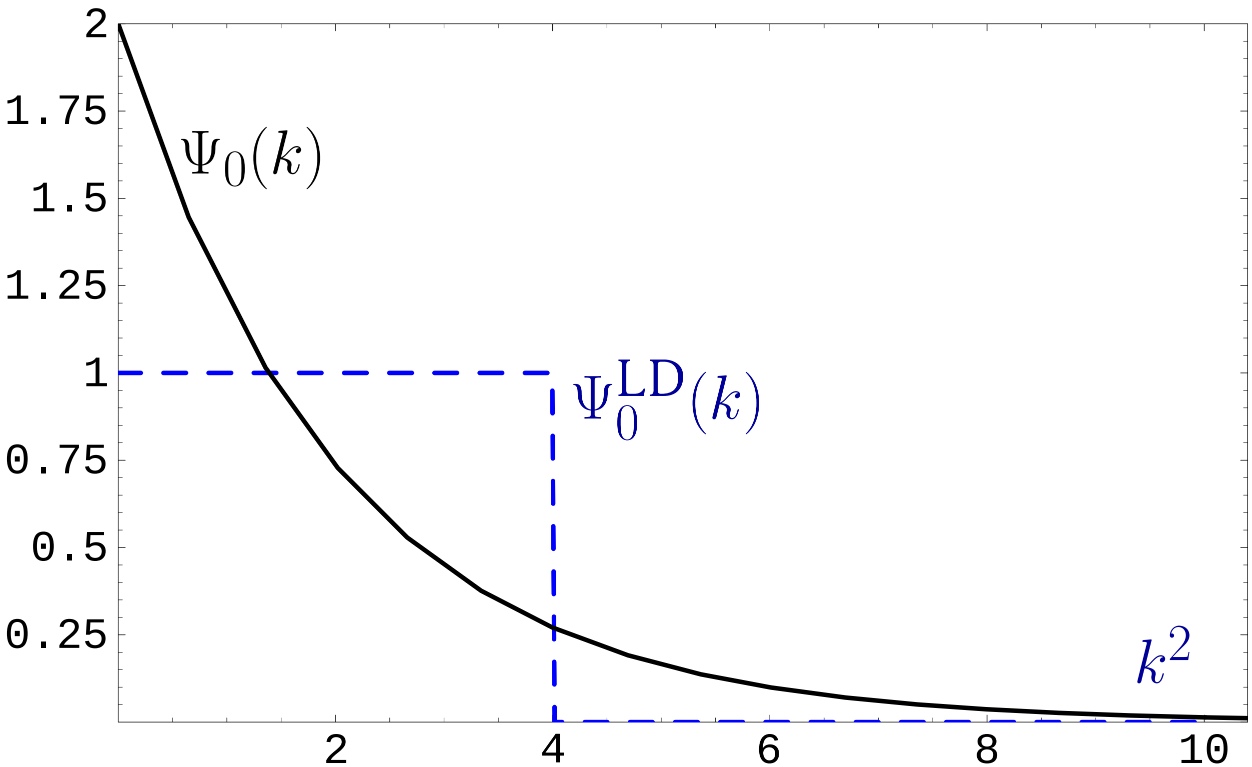
Вопрос:

Равны ли площади под кривыми? Почему нет, если интегралы по d^2k **равны?**

Локальная дуальность и физика за ней

$$\int d^2k\,\Psi_0(k) = \int d^2k\,\Psi_0^{\rm LD}(k)\,; \qquad \int d^2k\,f(k^2) = \pi\int dk^2\,f(k^2)\,.$$

Посмотрим картинку:



Ответ:

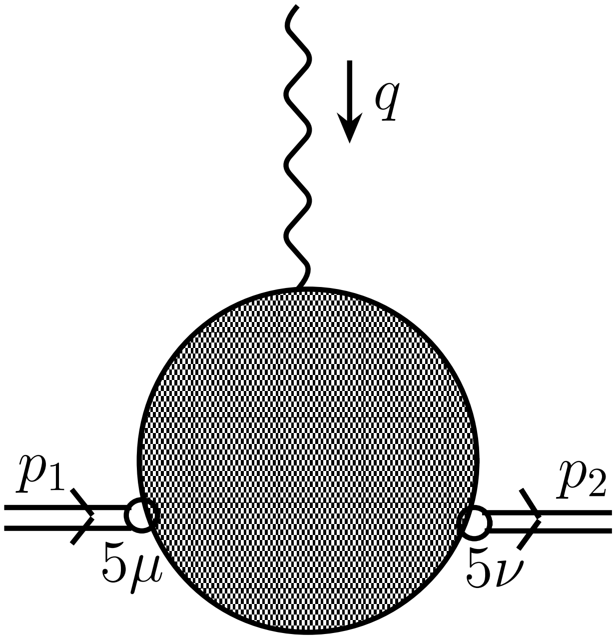
Теперь – равны, так как сейчас абсцисса – k^2!

КХД ПС
для
ФФ пиона

AAV-коррелятор: пионный вклад

Рассмотрим коррелятор двух аксиальных токов $j_{5\mu}$, $j_{5\nu}$ и электромагнитного тока $J^\alpha = e_u \bar{u}\gamma^\mu u + e_d \bar{d}\gamma^\mu d$

$$T^\alpha_{\mu\nu}(p_1,p_2) = \iint e^{-ip_1x+ip_2y} \langle 0|T\{j_{5\mu}(y)J^\alpha(0)j^+_{5\nu}(x)\}\rangle\, d^4x d^4y\,.$$



Пионный вклад равен

$$\langle 0|j_\mu(y)|p_2\rangle\langle p_2|J^\alpha(0)|p_1\rangle\langle p_1|j^+_\nu(x)|0\rangle\,.$$

Здесь-то и возникает формфактор: $\langle p_2|J^\alpha(0)|p_1\rangle = (p_1+p_2)^\alpha F(Q^2)$, а значит пионный вклад есть

$$2f_\pi^2 F(Q^2) P_\mu P^\alpha P_\nu + O(q^\alpha, q_\mu, q_\nu)\,.$$

AAV-коррелятор: пионный вклад

Нас будет интересовать лоренцева структура $P_\mu P^\alpha P_\nu$, где $P = (p_1 + p_2)/2$. Для ее выделения будем умножать наш коррелятор на $n^\mu n_\alpha n^\nu / 2(np)^3$, где 4-вектор n обладает свойствами: $n^2 = 0$, $np_1 = np_2 = nP$ и $nq = 0$:

$$T(p_1^2, p_2^2, q^2) = \frac{n^\mu n_\alpha n^\nu}{2(nP)^3} T^\mu_{\alpha\beta}(p_1, p_2)\,.$$

Определим сразу борелевскую амплитуду $\Phi(M_1^2, M_2^2, Q^2)$ как двойное преобразование Бореля $-p_1^2 \to M_1^2, -p_2^2 \to M_2^2$ для амплитуды $T(-p_1^2, -p_2^2, q^2 = -Q^2)$. Для нее двойное дисперсионное представление запишется в виде

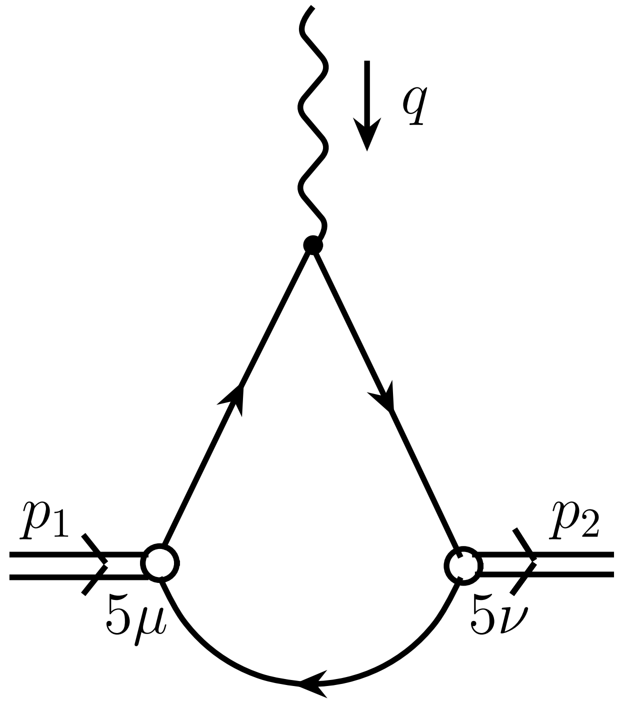
$$\Phi(M_1^2, M_2^2, Q^2) = \int_0^\infty \frac{ds_1}{M_1^2} \int_0^\infty \frac{ds_2}{M_2^2}\, \rho(s_1, s_2, Q^2)\, e^{-s_1/M_1^2 - s_2/M_2^2}\,.$$

AAV-коррелятор: пертурбативный вклад

Рассмотрим пертурбативный вклад.

$$\Phi^{\rm pert}(M_1^2, M_2^2, Q^2) = \frac{3}{2\pi^2(M_1^2+M_2^2)}$$

$$\int_0^1 x\bar{x}\exp\left\{\frac{-xQ^2}{\bar{x}(M_1^2+M_2^2)}\right\}dx\,.$$



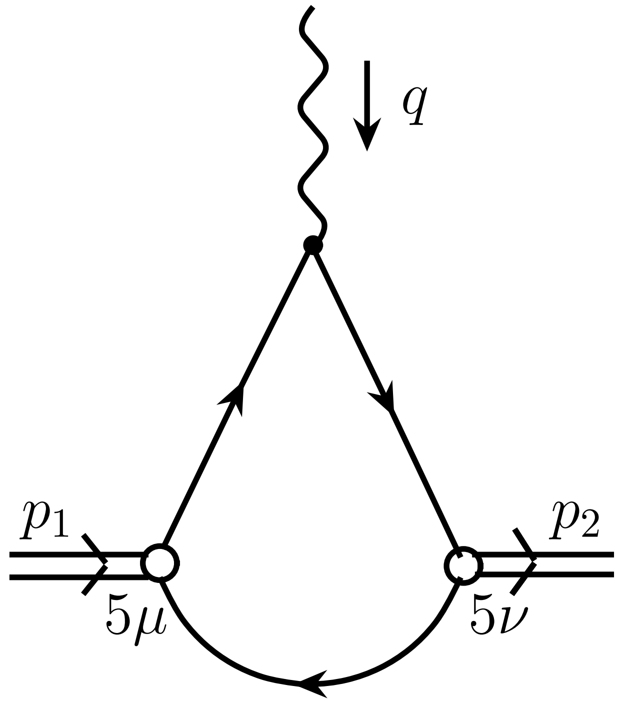
А вот и интересная задача: найти спектральную плотность $\rho^{\rm pert}(s_1, s_2, Q^2)$.

AAV-коррелятор: пертурбативный вклад

Рассмотрим пертурбативный вклад.

$$\Phi^{\text{pert}}(M_1^2, M_2^2, Q^2) = \frac{3}{2\pi^2(M_1^2+M_2^2)}$$

$$\int_0^1 x\bar{x} \exp\left\{\frac{-xQ^2}{\bar{x}(M_1^2+M_2^2)}\right\} dx\,.$$



А вот и интересная задача: найти спектральную плотность $\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$. Я выпишу ответ:

$$\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, t) = \frac{3}{4\pi^2}\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{d^3}{3dt^3}\right]\frac{1}{\sqrt{(s_1+s_2+t)^2-4s_1s_2}}\,.$$

AAV-коррелятор: пертурбативный вклад

$$\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, t) = \frac{3}{4\pi^2}\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^3}{3dt^3}\right]\frac{1}{\sqrt{(s_1+s_2+t)^2 - 4s_1 s_2}}\,.$$

Свойства спектральной плотности $\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$:

- $\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2 \gg s_i) = \dfrac{3}{2\pi^2}\left[\dfrac{s_1+s_2}{Q^4} - 4\dfrac{s_1^2+s_2^2+4s_1 s_2}{Q^6} + \ldots\right]$

AAV-коррелятор: пертурбативный вклад

$$\rho^{\rm pert}(s_1, s_2, t) = \frac{3}{4\pi^2}\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^3}{3dt^3}\right]\frac{1}{\sqrt{(s_1+s_2+t)^2 - 4s_1 s_2}}\,.$$

Свойства спектральной плотности $\rho^{\rm pert}(s_1, s_2, Q^2)$:

- $\rho^{\rm pert}(s_1, s_2, Q^2 \gg s_i) = \frac{3}{2\pi^2}\left[\frac{s_1+s_2}{Q^4} - 4\frac{s_1^2+s_2^2+4s_1s_2}{Q^6} + \ldots\right]$
- $\rho^{\rm pert}(s_1, s_2, Q^2 \to 0) =$
$\frac{1}{4\pi^2}\delta(s_1 - s_2) + \frac{Q^2}{4\pi^2}(s_1+s_2)\delta''(s_1-s_2) + \ldots$

Сейчас мы займемся получением $\rho^{\rm pert}(s_1, s_2, Q^2 = 0)$ из тождеств Уорда для AAV-коррелятора.

Тождества Уорда для AAV-коррелятора

Пусть

$$T^{\alpha}_{\mu\nu}(x,z,y) = \langle 0|T\{j_{5\mu}(y)J^{\alpha}(z)j^{+}_{5\nu}(x)\}\rangle\,.$$

Дифференцируем $T^{\alpha}_{\mu,\nu}(x,z,y)$ по z^{α}

$$\boxed{\partial_{z_\alpha}T^{\alpha}_{\mu,\nu}(x,z,y) = e_\pi\langle 0|T\left[j^{+}_{5\mu}(x)j_{5\nu}(y)\right]|0\rangle\left[\delta(z-x)-\delta(z-y)\right]}$$

где $e_\pi \equiv e_u - e_d = 1$. Это — тождества Уорда (ТУ) в x-представлении.

Тождества Уорда для AAV-коррелятора

Пусть

$$T^{\alpha}_{\mu\nu}(x,z,y) = \langle 0|T\{j_{5\mu}(y)J^{\alpha}(z)j^{+}_{5\nu}(x)\}\rangle\,.$$

Дифференцируем $T^{\alpha}_{\mu,\nu}(x,z,y)$ по z^{α}

$$\boxed{\partial_{z_\alpha}T^{\alpha}_{\mu,\nu}(x,z,y) = e_\pi\langle 0|T\left[j^{+}_{5\mu}(x)j_{5\nu}(y)\right]|0\rangle\left[\delta(z-x)-\delta(z-y)\right]}$$

где $e_\pi \equiv e_u - e_d = 1$. Это — тождества Уорда (ТУ) в x-представлении. В p-представлении

$$\boxed{q_\alpha T^{\alpha}_{\mu,\nu}(p_1,p_2,q) = \left[\Pi_{5\mu,5\nu}(p_2) - \Pi_{5\mu,5\nu}(p_1)\right],}$$

где $\Pi_{5\mu,5\nu}(p) \equiv i\int dx\,\exp(-ipx)\langle 0|T\left[j^{+}_{5\mu}(x)j_{5\nu}(0)\right]|0\rangle$.

Тождества Уорда для AAV-коррелятора

Вводя лоренцевы структуры для корреляторов

$$\Pi_{5\mu,5\nu}(p) = g_{\mu\nu}\Pi_1(p^2) + p_\mu p_\nu \Pi(p^2)$$

$$T^{\alpha}_{\mu,\nu}(p_1,p_2,q) = 2\ P_\mu P_\nu P^\alpha T\left(p_1^2,p_2^2,q^2\right) + P_\mu P_\nu q^\alpha T_0\left(p_1^2,p_2^2,q^2\right) + \ldots$$

получаем тождества Уорда–Такахаши

$$\boxed{\left(p_2^2 - p_1^2\right) T\left(p_1^2,p_2^2,Q^2\right) + Q^2 T_0\left(p_1^2,p_2^2,Q^2\right) = \left[\Pi\left(p_2^2\right) - \Pi\left(p_1^2\right)\right]}$$

Тождества Уорда для AAV-коррелятора

Вводя лоренцевы структуры для корреляторов

$$\Pi_{5\mu,5\nu}(p) = g_{\mu\nu}\Pi_1(p^2) + p_\mu p_\nu \Pi(p^2)$$

$$T^\alpha_{\mu,\nu}(p_1,p_2,q) = 2\; P_\mu P_\nu P^\alpha T\left(p_1^2,p_2^2,q^2\right) + P_\mu P_\nu q^\alpha T_0\left(p_1^2,p_2^2,q^2\right) + \ldots$$

получаем тождества Уорда–Такахаши

$$\boxed{\left(p_2^2 - p_1^2\right) T\left(p_1^2,p_2^2,Q^2\right) + Q^2 T_0\left(p_1^2,p_2^2,Q^2\right) = \left[\Pi\left(p_2^2\right) - \Pi\left(p_1^2\right)\right]}$$

При $Q^2 = 0$ они сводятся к

$$\left(p_2^2 - p_1^2\right) T\left(p_1^2,p_2^2,0\right) = \left[\Pi\left(p_2^2\right) - \Pi\left(p_1^2\right)\right].$$

что дает связь спектральных плотностей 3- и 2-точечных корреляторов.

Тождества Уорда для AAV-коррелятора

Вводя лоренцевы структуры для корреляторов

$$\Pi_{5\mu,5\nu}(p) = g_{\mu\nu}\Pi_1(p^2) + p_\mu p_\nu \Pi(p^2)$$

$$T^{\alpha}_{\mu,\nu}(p_1,p_2,q) = 2\ P_\mu P_\nu P^\alpha T\left(p_1^2,p_2^2,q^2\right) + P_\mu P_\nu q^\alpha T_0\left(p_1^2,p_2^2,q^2\right) + \ldots$$

получаем тождества Уорда–Такахаши

$$\boxed{\left(p_2^2 - p_1^2\right) T\left(p_1^2,p_2^2,Q^2\right) + Q^2 T_0\left(p_1^2,p_2^2,Q^2\right) = \left[\Pi\left(p_2^2\right) - \Pi\left(p_1^2\right)\right]}$$

При $Q^2 = 0$ они дают связь спектральных плотностей:

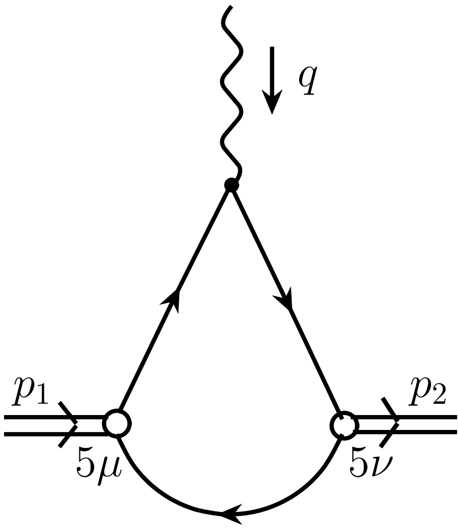
$$\boxed{\rho_3\left(s_1,s_2,0\right) = \delta(s_1 - s_2)\,\rho_2(s_1) = \frac{1}{4\pi^2}\,\delta(s_1 - s_2).}$$

(back to pQCD)

AAV-коррелятор: операторное разложение

Пертурбативный вклад: $\Phi^{\text{pert}}(M^2, Q^2) =$

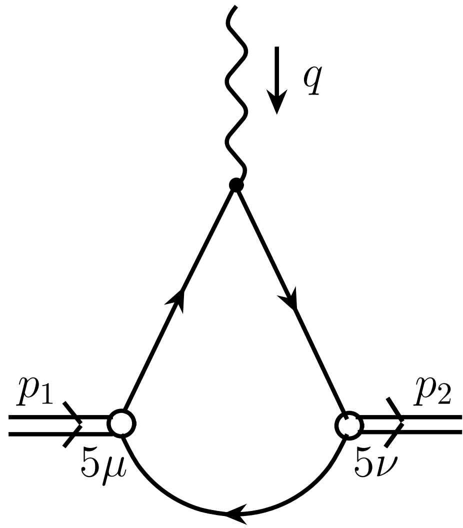
$$\frac{1}{M^4}\int_0^{s_0}\int_0^{s_0}\rho^{\text{pert}}\left(s_1, s_2, Q^2\right) e^{-(s_1+s_2)/M^2} ds_1 ds_2$$



AAV-коррелятор: операторное разложение

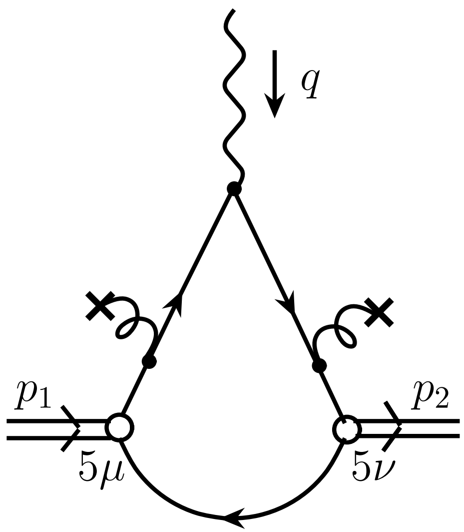
Пертурбативный вклад: $\Phi^{\text{pert}}(M^2, Q^2) =$

$$\frac{1}{M^4}\int_0^{s_0}\int_0^{s_0}\rho^{\text{pert}}\left(s_1, s_2, Q^2\right) e^{-(s_1+s_2)/M^2} ds_1 ds_2$$



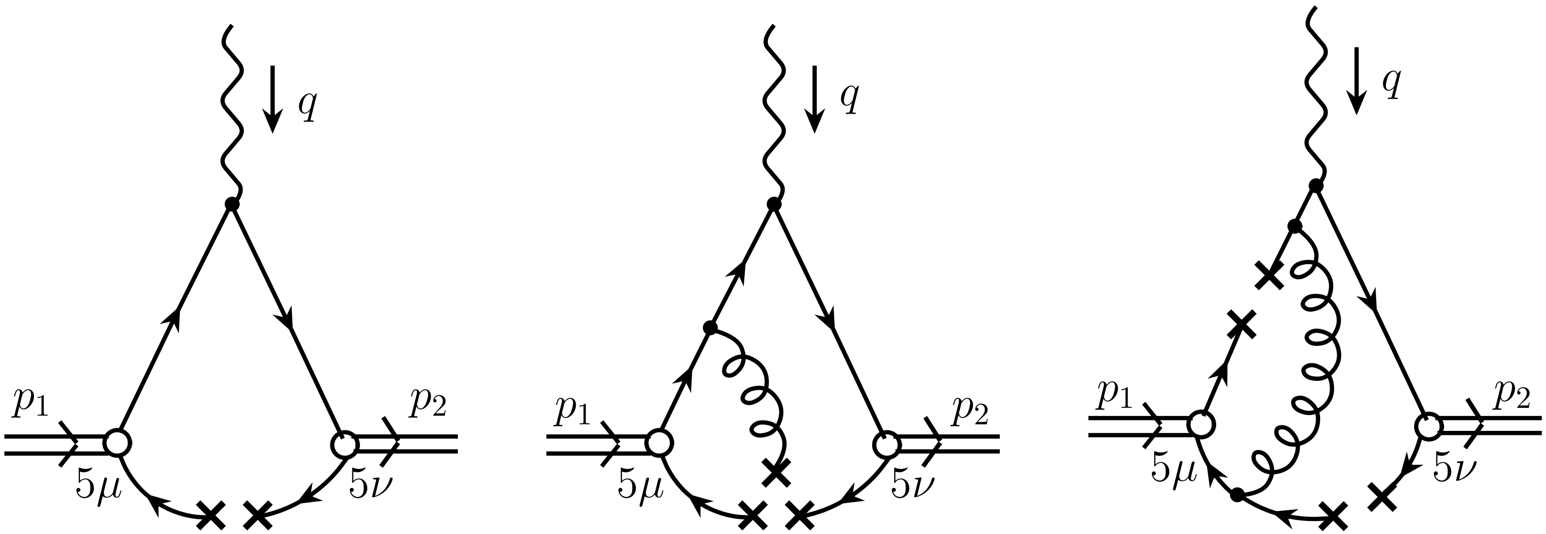
Вклад глюонного конденсата:

$$\Phi^{GG}(M^2, Q^2) = \frac{1}{12\pi\, M^6}\langle\frac{\alpha_s}{\pi}GG\rangle$$



AAV-коррелятор: операторное разложение

Вклады кварковых конденсатов:



$$\Phi^{\bar{q}q}(M^2,Q^2) = \frac{208\,\pi\alpha_s\langle\bar{q}q\rangle^2}{81\,M^8}\left[1+\frac{2\,Q^2}{13\,M^2}\right]$$

КХД правила сумм для ФФ пиона

$$f_\pi^2 F_\pi(Q^2) = \int_0^{s_0} ds_1 \int_0^{s_0} ds_2 \exp\left(-\frac{s_1+s_2}{M^2}\right) \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$$

$$+\frac{\alpha_s \langle GG \rangle}{12\pi M^2} + \frac{16}{81} \frac{\pi \alpha_s \langle \bar{q} q \rangle^2}{M^4} \left[13 + 2\frac{Q^2}{M^2}\right]$$

Это правило сумм хорошо работает в области $0.5\ \text{ГэВ}^2 \lesssim Q^2 \lesssim 2\ \text{ГэВ}^2$. И понятно почему: операторное разложение строилось в предположении $Q^2 \sim P_1^2 \sim P_2^2 \gg \Lambda^2_{\text{QCD}}$.

КХД правила сумм для ФФ пиона

$$f_\pi^2 F_\pi(Q^2) = \int_0^{s_0} ds_1 \int_0^{s_0} ds_2 \exp\left(-\frac{s_1+s_2}{M^2}\right) \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$$

$$+\frac{\alpha_s\langle GG\rangle}{12\pi M^2} + \frac{16}{81}\frac{\pi\alpha_s\langle\bar{q}q\rangle^2}{M^4}\left[13 + 2\frac{Q^2}{M^2}\right]$$

Это правило сумм хорошо работает в области $0.5\ \text{ГэВ}^2 \lesssim Q^2 \lesssim 2\ \text{ГэВ}^2$. И понятно почему: операторное разложение строилось в предположении $Q^2 \sim P_1^2 \sim P_2^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$. В области малых Q^2 мы должны использовать тождества Уорда и строить операторное разложение в согласии с ним. В области больших Q^2 операторное разложение взрывается из-за растущих вкладов в коэффициенты.

Локальная дуальность для ФФ пиона

Локальная дуальность для $F_\pi(Q^2)$

В подходе локальной дуальности получим следующее соотношение

$$\boxed{F_{\pi;\mathrm{LD}}(Q^2) = \int_0^{s_{\mathrm{LD}}} ds_1 \int_0^{s_{\mathrm{LD}}} ds_2\, \rho^{\mathrm{pert}}(s_1, s_2, Q^2)}$$

и $s_{\mathrm{LD}} \simeq 0.7$ ГэВ^2.

Локальная дуальность для $F_\pi(Q^2)$

В подходе локальной дуальности получим следующее соотношение

$$\boxed{F_{\pi;\mathrm{LD}}(Q^2) = \int_0^{s_{\mathrm{LD}}} ds_1 \int_0^{s_{\mathrm{LD}}} ds_2\, \rho^{\mathrm{pert}}(s_1, s_2, Q^2)}$$

и $s_{\mathrm{LD}} \simeq 0.7$ ГэВ^2. Интегралы явно берутся и мы имеем простую формулу

$$\boxed{F_{\pi;\mathrm{LD}}(Q^2) = 1 - \frac{1 + 6\, s_{\mathrm{LD}}/Q^2}{\left[1 + 4\, s_{\mathrm{LD}}/Q^2\right]^{3/2}}}$$

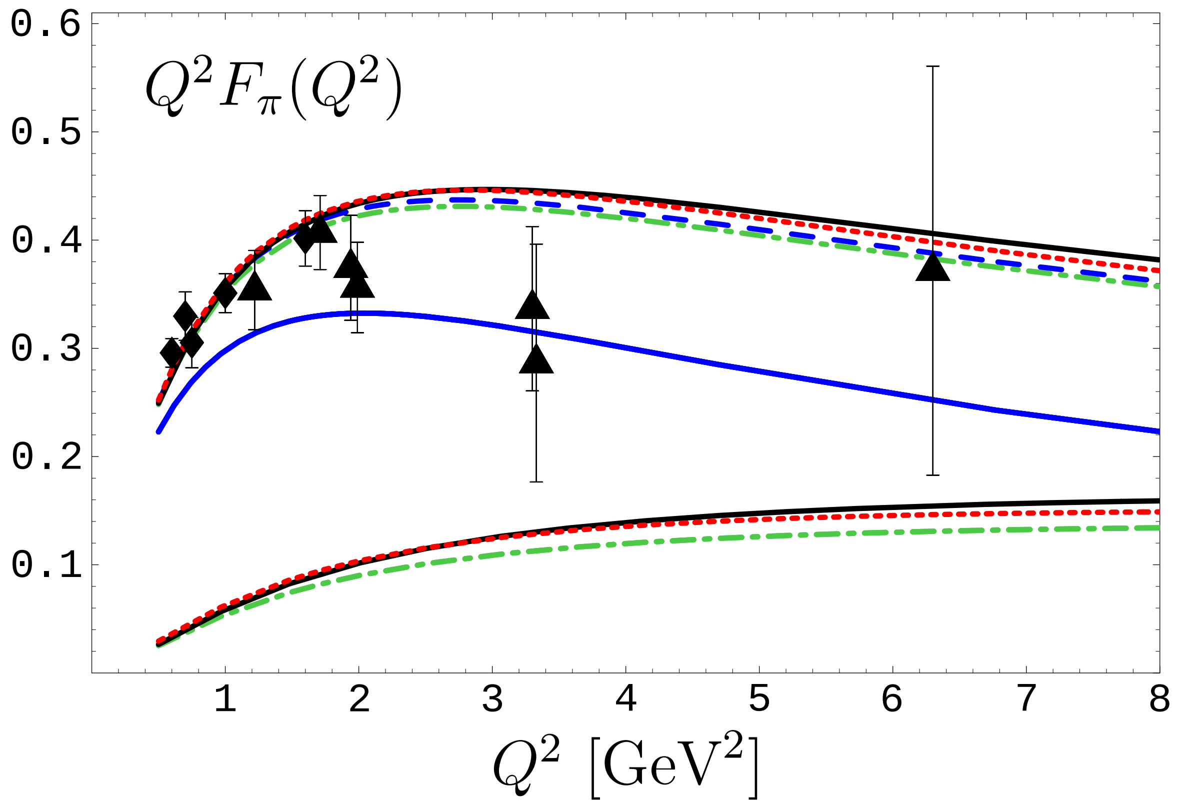
Эта формула замечательна тем, что в ней благодаря тождеству Уорда автоматически имеется $\boxed{F_{\pi;\mathrm{LD}}(0) = 1}$.

Жесткий КХД-вклад в ФФ пиона

Обмен жестким глюоном хорошо описывается формулой

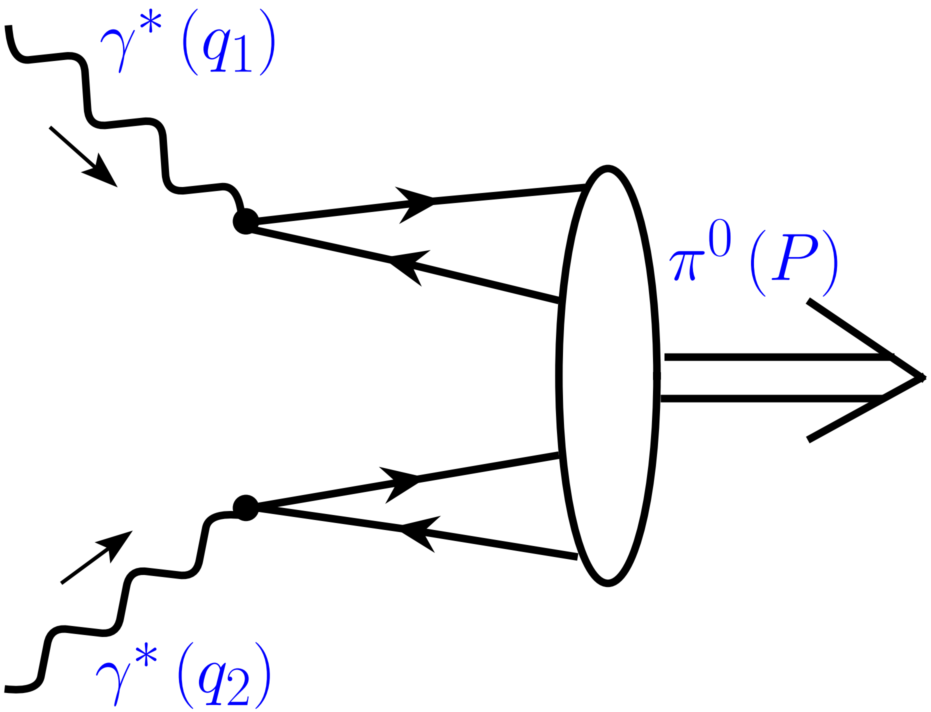
$$\frac{1}{f_\pi^2}\int_0^{s_0} ds_1 \int_0^{s_0} ds_2 \Delta\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, q^2) \approx \frac{\alpha_s}{\pi}\frac{1}{1+Q^2/2s_0}\,.$$

Получаем такую картинку: даже на $Q^2 = 8$ ГэВ^2 мягкий вклад все еще большого жесткого глюонного обмена!
Хотя мягкий $\sim 1/Q^4$, а жесткий $\sim 1/Q^2$.



Факторизация и амплитуда распределения пиона в КХД ТВ

Факторизация для ФФ $\gamma^*\gamma^* \to \pi^0$-перехода



Виртуальные фотоны γ^* "цепляются" за электромагнитные токи, $J_\mu = e_d \bar{d}\gamma_\mu d + e_u \bar{u}\gamma_\mu u$, кварков в пионе $\pi^0 = \dfrac{\bar{u}u - \bar{d}d}{\sqrt{2}}$ (forward). В жестком процессе виртуальности фотонов $-q_1^2, -q_2^2 \gg m_\rho^2$.

Кинематика процесса

$$P = q_1 + q_2\,; \qquad q = (q_1 - q_2)/2\,; \qquad Q_i^2 \equiv -q_i^2$$

$$P^2 = m_\pi^2 \approx 0\,; \qquad Q^2 \equiv -q^2 = (Q_1^2 + Q_2^2)/2 \gg m_\rho^2$$

Амплитуда (T) и формфактор (F)

$$\begin{aligned}
T\left(q_1,\varepsilon_1;q_2,\varepsilon_2\right) &= \int dz^D e^{-iq_1 z}\langle 0|\varepsilon_1^{\mu}J_{\mu}(z)\varepsilon_2^{\nu}J_{\nu}(0)|\pi(P)\rangle \\
&\equiv -i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_1^{\mu}\varepsilon_2^{\nu}P^{\rho}q^{\sigma}F_{\gamma^*\gamma^*\to\pi^0}(q_1^2,q_2^2)
\end{aligned}$$

Вычисляем в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}\left(q_1;q_2\right) &= \int dz^D e^{-iq_1 z}\langle 0|J_{\mu}(z)J_{\nu}(0)\hat{\mathbf{S}}|\pi(P)\rangle \\
&= \ldots\sum_f e_f^2\bar{\psi}_f(z)\gamma_{\mu}\psi_f(z)\bar{\psi}_f(0)\gamma_{\nu}\psi_f(0)\ldots \\
&= \ldots\sum_f e_f^2\bar{\psi}_f(z)\left[\gamma_{\mu}i\hat{S}(z)\gamma_{\nu}\right]\psi_f(0)\ldots
\end{aligned}$$

Тождество ($\varepsilon_{0123}=+1$): $\boxed{\gamma_{\mu}\hat{z}\gamma_{\nu}=S_{\mu z\nu\alpha}\gamma^{\alpha}+i\varepsilon_{\mu z\nu\alpha}\gamma^{\alpha}\gamma_5}$

Появление пионной амплитуды $\varphi_\pi(x)$

$$T_{\mu\nu}(q_1;q_2) \sim \int dz^D e^{-iq_1 z}\left(\frac{z^\beta}{z^4}\right)\sum_f e_f^2 \underbrace{\langle 0|\bar{\psi}_f(z)\gamma_\alpha\gamma_5\psi_f(0)|\pi(P)\rangle}$$

Появился новый объект — πAP

Появление пионной амплитуды $\varphi_\pi(x)$

$$T_{\mu\nu}\left(q_1; q_2\right) \sim \int dz^D e^{-iq_1 z}\left(\frac{z^\beta}{z^4}\right)\sum_f e_f^2 \underbrace{\langle 0|\bar{\psi}_f(z)\gamma_\alpha\gamma_5\psi_f(0)|\pi(P)\rangle}$$

Появился новый объект — πAP. Этот объект содержит в себе всю непертурбативную информацию о пионе: все, что мы не можем вычислить в теории возмущений, убрано в него. Параметризация (back):

$$\langle 0 \mid \bar{d}(z)\gamma_\alpha\gamma_5 d(0) \mid \pi(P)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0 \mid \bar{d}(z)\gamma_\alpha\gamma_5 u(0) \mid \pi(P)\rangle$$

$$= \frac{if_\pi P_\alpha}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx\ e^{ix(zP)}\ \left[\varphi_\pi^{\text{Tw-2}}(x,\mu^2) + z^2 g_1^{\text{Tw-4}}(x,\mu^2)\right]$$

Вклады ведущего и высшего твистов разделены.

Твисты и сингулярности на световом конус

Чем важно разделение сингулярностей по z^2?

$$T_{\mu\nu}(q_1;q_2) \;\sim\; \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\alpha \int_0^1 dx \int dz^D e^{-i(q_1-xP)z} \left[\frac{z^\beta}{z^4}\varphi_\pi^{\text{Tw-2}}(x,\mu^2) + \frac{z^\beta}{z^2} g_1^{\text{Tw-4}}(x,\mu^2)\right]$$

Тем, что мы можем сразу определить ведущий вклад и его асимптотику при больших Q^2. Действительно ($D = 4-2\varepsilon$):

$$\frac{z^\beta}{z^4} \overset{\text{Фурье}}{\Rightarrow} \frac{(q_1-xP)^\beta}{(q_1-xP)^2}\,; \qquad \frac{z^\beta}{z^2} \overset{\text{Фурье}}{\Rightarrow} 4\,\frac{(q_1-xP)^\beta}{(q_1-xP)^4}$$

Кусок с q_1^β даст структуру формфакора $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\alpha q_1^\beta$. А что будет с куском $\sim xP$ из числителя?

Преобразование Фурье в D измерениях

Для $D = 4 - 2\varepsilon$:

$$i \int \frac{e^{-iqz} dz^D}{(-z^2 + i0)^n} = \frac{\Gamma(D/2 - n)}{\Gamma(n)} \frac{2^{D-2n} \pi^{D/2}}{(-q^2 - i0)^{D/2-n}}$$

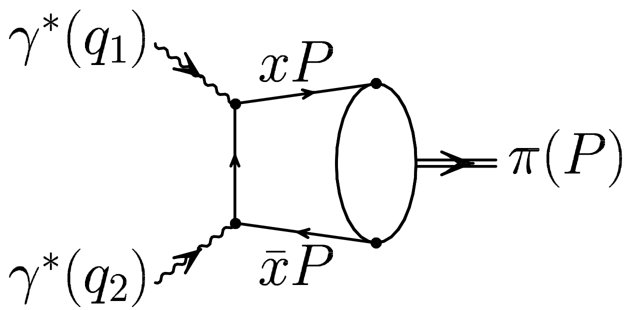
$$\frac{-i}{(2\pi)^D} \int \frac{e^{iqz} dq^D}{(-q^2 - i0)^n} = \frac{\Gamma(D/2 - n)}{\Gamma(n)} \frac{2^{-2n} \pi^{-D/2}}{(-z^2 + i0)^{D/2-n}}$$

Задача для любознательных: показать, что оба преобразования согласуются друг с другом.

Факторизация для $\gamma^*\gamma^* \to \pi^0$-формфактора

Результат для формфактора перехода $\gamma^*\gamma^* \to \pi$:

$(q_1 - xP)^2 = \bar{x}Q_1^2 + xQ_2^2$



$F_{\gamma^*\gamma^*\to\pi^0}(Q_1^2, Q_2^2) =$

$-q_{1,2}^2 = Q_{1,2}^2 \geq 1 \text{ GeV}^2$

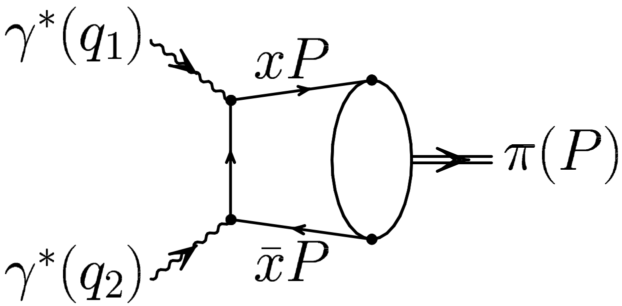
$$= \frac{\sqrt{2}}{3} f_\pi \int_0^1 \frac{\varphi_\pi(x;\mu^2)}{Q_1^2\bar{x} + Q_2^2 x} dx + O\left(\frac{\delta^2_{\text{Tw-4}}}{Q^4}\right)$$

Здесь $\delta^2_{\text{Tw-4}}$ – масштаб вклада твиста 4

Факторизация: общая схема

Формфактор перехода $\gamma^*\gamma^* \to \pi$:

$\boxed{\text{разделение малых и больших расстояний}}$



$$F_{\gamma^*\gamma^*\to\pi^0}(Q_1^2, Q_2^2) =$$

$$-q_{1,2}^2 = Q_{1,2}^2 \geq 1\ \text{GeV}^2$$

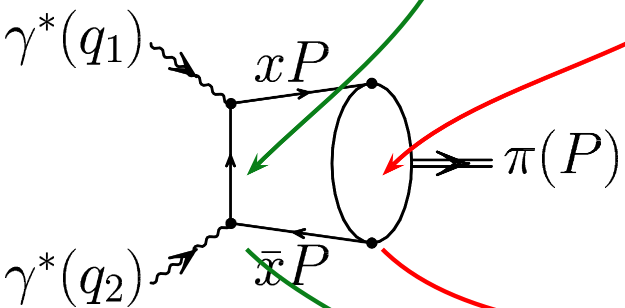
$$= \; C(q_1^2, q_2^2; \mu^2; x) \; \otimes \; \varphi_\pi(x; \mu^2) \; + \; O\left(\frac{\delta_{\text{Tw-4}}^2}{Q^4}\right)$$

Здесь $\delta_{\text{Tw-4}}^2$ – масштаб вклада твиста 4

Факторизация: общая схема

Формфактор перехода $\gamma^*\gamma^* \to \pi$:

разделение малых и больших расстояний



$$F_{\gamma^*\gamma^*\to\pi^0}(Q_1^2, Q_2^2) =$$

$$-q_{1,2}^2 = Q_{1,2}^2 \geq 1\ \mathrm{GeV}^2$$

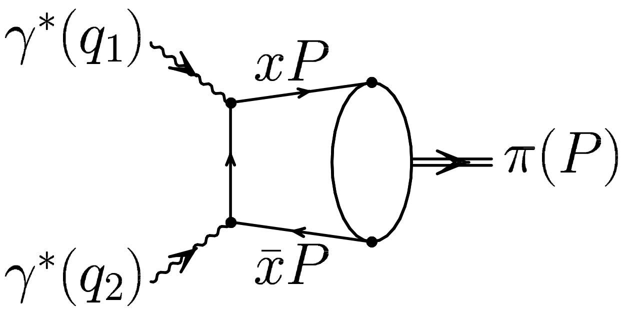
$$= \boxed{C(q_1^2, q_2^2; \mu^2; x)} \otimes \boxed{\varphi_\pi(x; \mu^2)} + O\left(\frac{\delta^2_{\text{Tw-4}}}{Q^4}\right)$$

Здесь $\delta^2_{\text{Tw-4}}$ – масштаб вклада твиста 4

Факторизация: общая схема

Формфактор перехода $\gamma^*\gamma^* \to \pi$:

$\boxed{\varphi_\pi(x) \text{ появляется в виде свертки}}$



$$F_{\gamma^*\gamma^*\to\pi^0}(Q_1^2, Q_2^2) =$$

$$-q_{1,2}^2 = Q_{1,2}^2 \geq 1 \text{ GeV}^2$$

$$\simeq \boxed{\int_0^1 \frac{\varphi_\pi(x;\mu^2)}{Q_1^2\bar{x} + Q_2^2 x} dx} + O\left(\frac{\delta^2_{\text{Tw-4}}}{Q^4}\right)$$

Факторизация: общие свойства πАР

Итак, что же такое πАР $\varphi_\pi(x,\mu^2)$ ведущего твиста 2?

- она описывает матричный элемент нелокального аксиального тока на световом конусе

$$\langle 0 \mid \left[\bar{d}(z)\gamma_\alpha\gamma_5 E(z,0) u(0)\right]_{\mu^2} \mid \pi(P)\rangle\Big|_{z^2=0} \quad = \quad i f_\pi P_\alpha \int_0^1 dx\; e^{ix(zP)}\; \varphi_\pi^{\text{Tw-2}}(x,\mu^2)$$

Факторизация: общие свойства πАР

Итак, что же такое πАР $\varphi_\pi(x,\mu^2)$ ведущего твиста 2?

- она описывает матричный элемент нелокального аксиального тока на световом конусе

$$\langle 0 \mid \left[\bar{d}(z)\gamma_\alpha\gamma_5 E(z,0)u(0)\right]_{\mu^2} \mid \pi(P)\rangle\Big|_{z^2=0} =$$

$$i f_\pi P_\alpha \int_0^1 dx\ e^{ix(zP)}\ \varphi_\pi^{\text{Tw-2}}(x,\mu^2)$$

- она калибровочно-инвариантна за счет струны Фока–Швингера:

$$E(z,0) = \mathcal{P}e^{ig\int_0^z A_\mu(\tau)d\tau^\mu}$$

Факторизация: общие свойства πAP

Итак, что же такое πAP $\varphi_\pi(x,\mu^2)$ ведущего твиста 2?

- она описывает матричный элемент нелокального аксиального тока на световом конусе

$$\langle 0 \mid \left[\bar{d}(z)\gamma_\alpha\gamma_5 E(z,0) u(0)\right]_{\mu^2} \mid \pi(P)\rangle\Big|_{z^2=0} \;=$$

$$i f_\pi P_\alpha \int_0^1 dx\; e^{ix(zP)}\; \varphi_\pi^{\text{Tw-2}}(x,\mu^2)$$

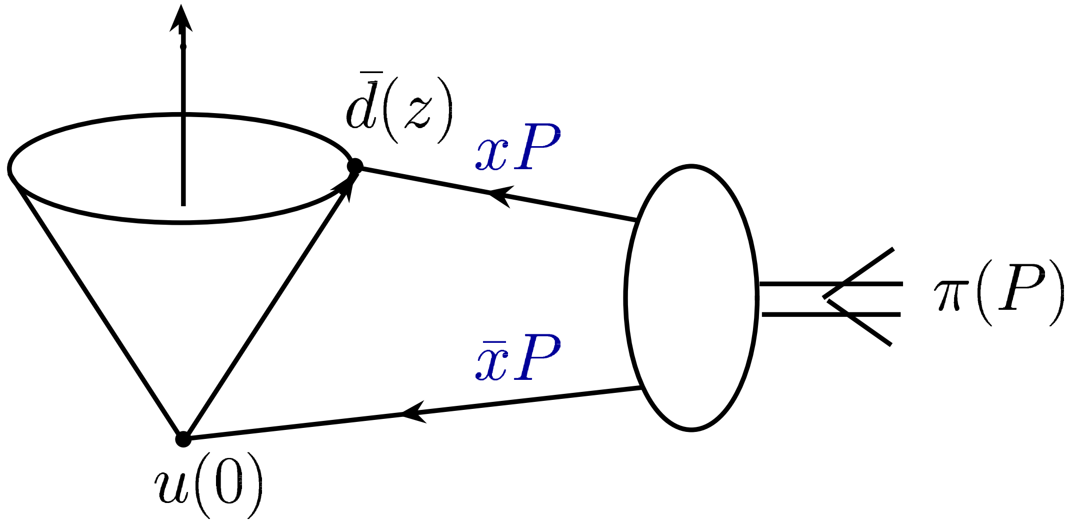
- она калибровочно-инвариантна за счет струны Фока–Швингера:

$$E(z,0) = \mathcal{P} e^{ig\int_0^z A_\mu(\tau)d\tau^\mu}$$

В твисте 4 имеется 6 различных πAP, четыре имееют значение для анализа $F_{\gamma^*\gamma^*\to\pi^0}(Q_1^2,Q_2^2)$.

Факторизация: физический смысл πAP

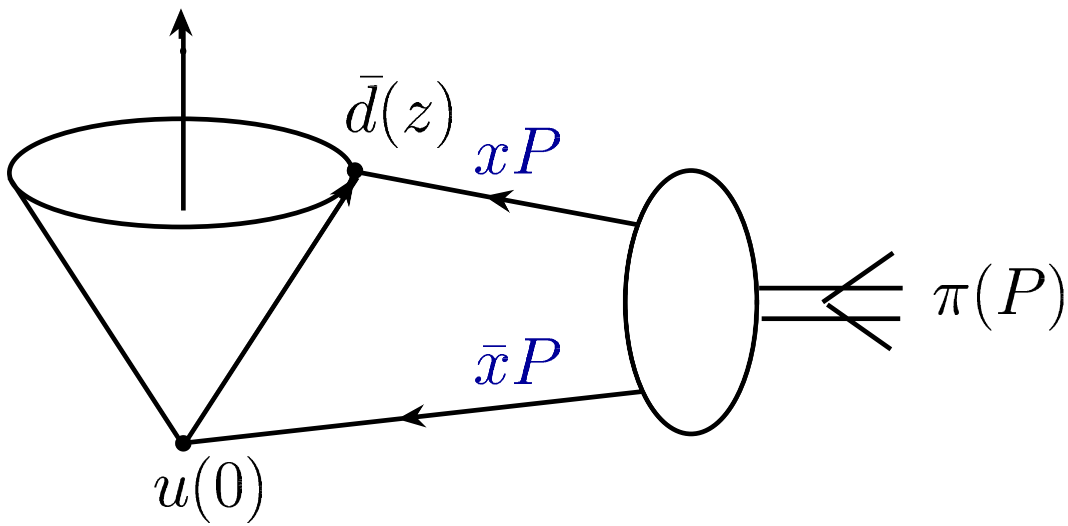
$\varphi_\pi(x;\mu^2)$ – амплитуда перехода $\pi \to u + d$



- нормировка на 1
- симметрична по замене $x \rightleftarrows \bar{x}$ (здесь $\bar{x} \equiv 1 - x$)

Факторизация: физический смысл πAP

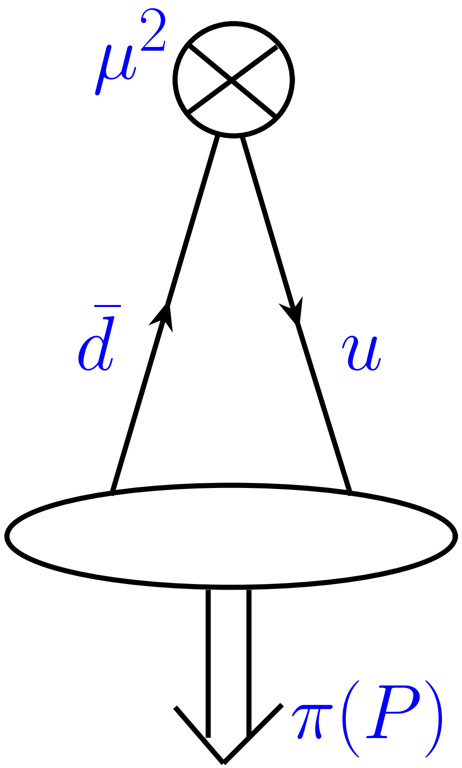
$\varphi_\pi(x;\mu^2)$ – амплитуда перехода $\pi \to u + d$



- нормировка на 1
- симметрична по замене $x \rightleftarrows \bar{x}$ (здесь $\bar{x} \equiv 1 - x$)
- мультипликативно перенормируема **[Ефремов–Радюшкин; Бродский–Лепаж, (ЕРБЛ)]**
- асимптотическая πАР в 1-петлевом приближении: $\varphi_\pi(x;\mu^2 \to \infty) = \varphi^{As}(x) = 6x(1-x)$

Факторизация: эволюция πАР в пКХД

$\varphi_\pi(x;\mu^2)$ зависит от масштаба μ^2. Эта зависимость полностью определяется в пКХД уравнением ЕРБЛ:



$$\frac{d\,\varphi_\pi(x;\mu^2)}{d\,\ln\mu^2} = V(x,u;\alpha_s(\mu^2)) \underset{u}{\otimes} \varphi_\pi(u;\mu^2)$$

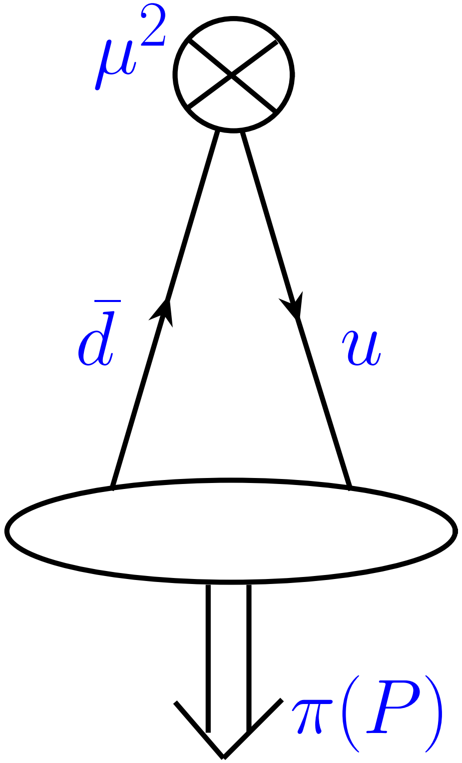
$$V(x,u;\alpha_s) = \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) V_0(x,u) + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 V_1(x,u) + \ldots$$

Факторизация: эволюция πAP в пКХД

$\varphi_\pi(x;\mu^2)$ зависит от масштаба μ^2. Эта зависимость полностью определяется в пКХД уравнением ЕРБЛ:

$$\frac{d\,\varphi_\pi(x;\mu^2)}{d\ln\mu^2} = V(x,u;\alpha_s(\mu^2)) \underset{u}{\otimes} \varphi_\pi(u;\mu^2)$$

$$V(x,u;\alpha_s) = \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) V_0(x,u) + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 V_1(x,u) + \ldots$$



Решение ЕРБЛ: $\varphi_\pi(x;\mu^2) = \varphi^{As}(x)\times$

$$\times\Big[1 + a_2(\mu^2)C_2^{3/2}(\xi) + a_4(\mu^2)C_4^{3/2}(\xi) + \ldots\Big]_{\xi\equiv 2x-1}$$

где $C_n^{3/2}(\xi)$ – полиномы Гегенбауера (собственные функции 1-петлевого ядра ЕРБЛ-эволюции).

Факторизация: эволюция πАР в пКХД

При этом вся μ^2-зависимость переходит в коэффициенты:

$$\varphi_\pi(x;\mu^2) \Leftrightarrow \left\{a_2(\mu^2), a_4(\mu^2), \ldots\right\},$$

причем в 1-петлевом приближении

$$a_n{}^{\text{1-loop}}(\mu^2) = a_n(\mu_0^2)\left[\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\alpha_s(\mu_0^2)}\right]^{\gamma_0(n)/(2b_0)},$$

где $\gamma_0(n)$ – аномальные размерности, определяемые собственными значениями 1-петлевого ядра эволюции V_0, а b_0 – первый коэффициент разложения бета-функции КХД:

$$\beta\left(\alpha_s(Q^2)\right) \equiv \frac{d\alpha_s\left(\mu^2\right)}{d\ln(\mu^2)} = -\frac{\alpha_s^2\left(\mu^2\right)}{4\pi}\left[b_0 + b_1\frac{\alpha_s\left(\mu^2\right)}{4\pi} + \ldots\right].$$

Pion DA in QCD Sum Rules with Non-Local Condensates

Non-Local Condensates in QCD SR

- Illustration of
  NLC-model: $\langle\bar{q}(0)q(z)\rangle = \langle\bar{q}(0)q(0)\rangle e^{-|z^2|\lambda_q^2/8}$

Non-Local Condensates in QCD SR

- Illustration of
  NLC-model: $\langle \bar{q}(0)q(z)\rangle = \langle \bar{q}(0)q(0)\rangle e^{-|z^2|\lambda_q^2/8}$
- A **single scale** parameter $\lambda_q^2 = \langle k^2 \rangle$ characterizing the average momentum of quarks in QCD vacuum:

$$\lambda_q^2 = \begin{cases} 0.4 \pm 0.1 \text{ GeV}^2 & [\ \textbf{QCD SRs, 1987}\ ] \\ 0.5 \pm 0.05 \text{ GeV}^2 & [\ \textbf{QCD SRs, 1991}\ ] \\ \approx 0.4 - 0.5 \text{ GeV}^2 & [\ \textbf{Lattice, 1998-2002}\ ] \end{cases}$$

Non-Local Condensates in QCD SR

- Illustration of
  NLC-model: $\langle \bar{q}(0) q(z) \rangle = \langle \bar{q}(0) q(0) \rangle e^{-|z^2|\lambda_q^2/8}$
- A **single scale** parameter $\lambda_q^2 = \langle k^2 \rangle$ characterizing the average momentum of quarks in QCD vacuum:

$$\lambda_q^2 = \begin{cases} 0.4 \pm 0.1 \text{ GeV}^2 & [\ \textbf{QCD SRs, 1987}\ ] \\ 0.5 \pm 0.05 \text{ GeV}^2 & [\ \textbf{QCD SRs, 1991}\ ] \\ \approx 0.4 - 0.5 \text{ GeV}^2 & [\ \textbf{Lattice, 1998-2002}\ ] \end{cases}$$

- Correlation length $\lambda_q^{-1} \simeq 0.3$ Fm $\sim \rho$-meson size

Non-Local Condensates in QCD SR

- Illustration of
  NLC-model: $\langle \bar{q}(0)q(z)\rangle = \langle \bar{q}(0)q(0)\rangle e^{-|z^2|\lambda_q^2/8}$
- A **single scale** parameter $\lambda_q^2 = \langle k^2 \rangle$ characterizing the average momentum of quarks in QCD vacuum:

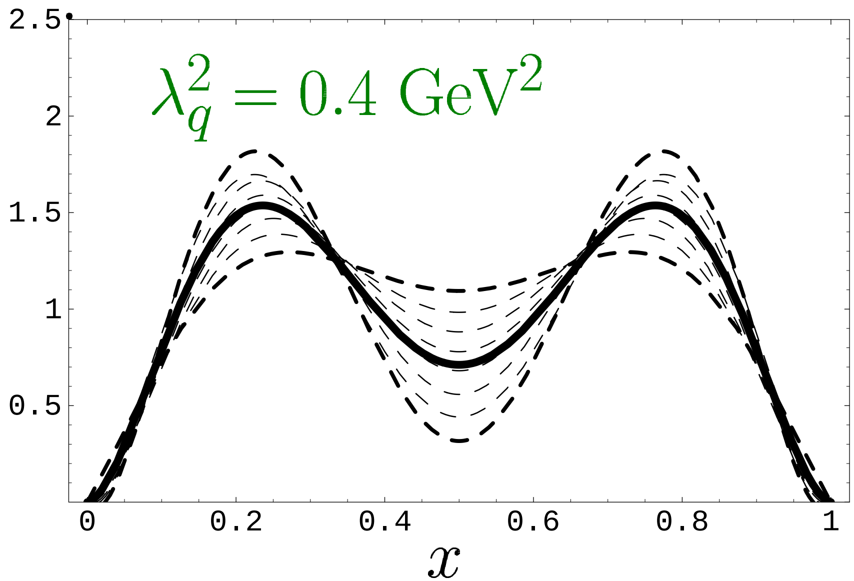
$$\lambda_q^2 = \begin{cases} 0.4 \pm 0.1 \text{ GeV}^2 & [\ \textbf{QCD SRs, 1987}\ ] \\ 0.5 \pm 0.05 \text{ GeV}^2 & [\ \textbf{QCD SRs, 1991}\ ] \\ \approx 0.4 - 0.5 \text{ GeV}^2 & [\ \textbf{Lattice, 1998-2002}\ ] \end{cases}$$

- Correlation length $\lambda_q^{-1} \simeq 0.3$ Fm $\sim \rho$-meson size
- Possible to include second ($\Lambda \simeq 450$ MeV) scale with $\langle \bar{q}(0)q(z)\rangle\Big|_{|z|\gg 1 \text{ Fm}} \sim \langle \bar{q}(0)q(0)\rangle e^{-|z|\Lambda}$ (not included here)

NLC SRs for Pion DA

produce **bunch** of self-consistent 2-parameter models $\varphi_\pi(x)$ at $\mu^2 \simeq 1\ \ \mathrm{GeV}^2$:

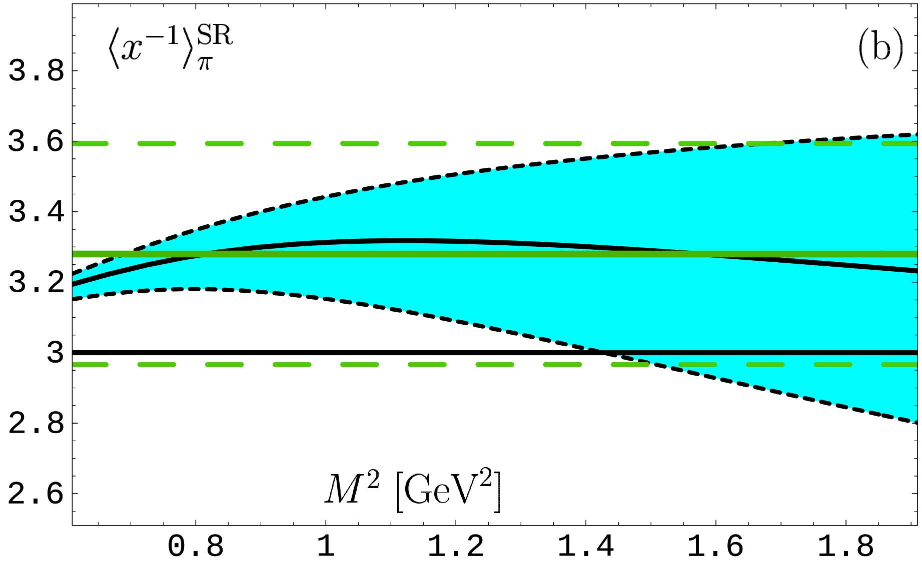
$$\varphi_\pi(x) = \varphi^{\mathrm{as}}(x)\left[1 + a_2\ C_2^{3/2}(2x-1) + a_4\ C_4^{3/2}(2x-1)\right]$$



$$\begin{array}{ccc}
a_2^{\mathbf{b.f.}} & = & +0.188 \\
a_4^{\mathbf{b.f.}} & = & -0.130 \\
\chi^2 & \approx & 0.001 \\
\langle x^{-1}\rangle^{\mathrm{SR}} & = & 3.30(30)
\end{array}$$

NLC SR estimate of $\langle x^{-1}\rangle_\pi^{SR}$

BMS [PLB (2001)]: at $\mu^2 \simeq 1$ GeV^2



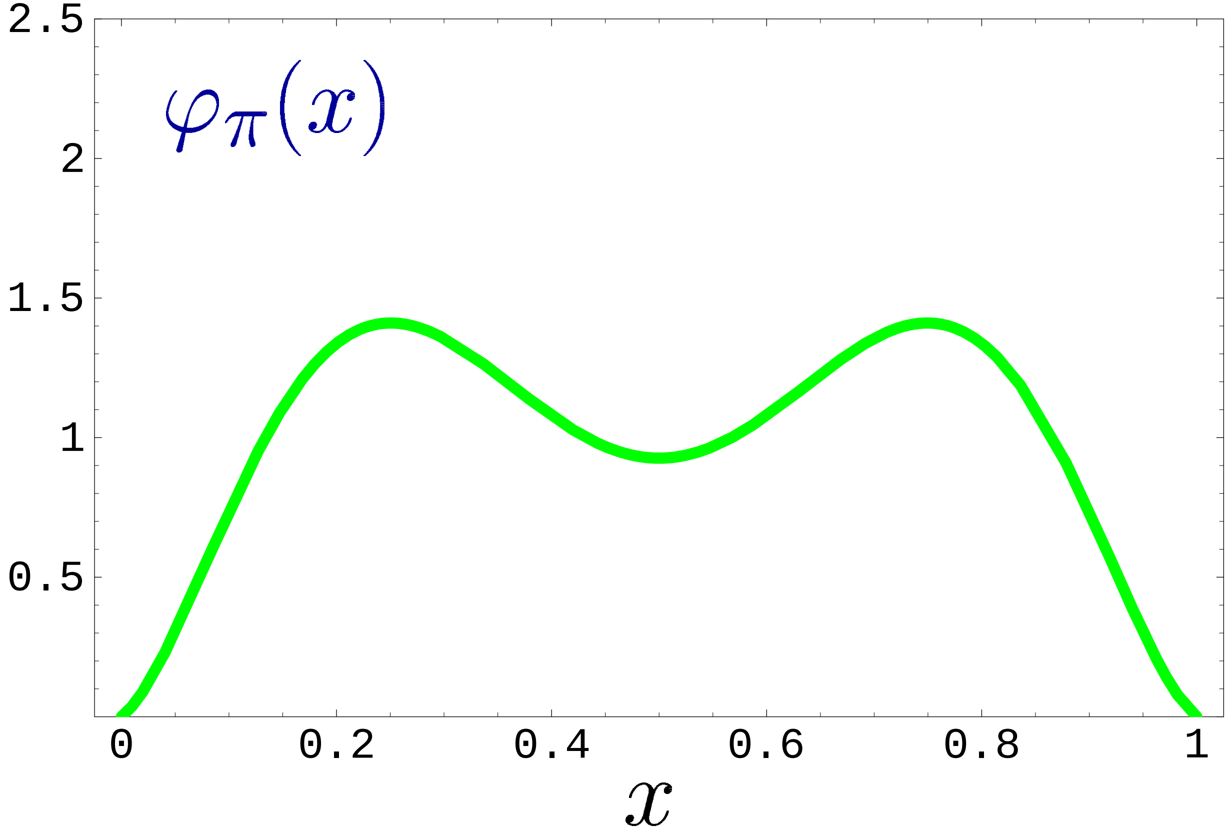
$\lambda_q^2 = 0.4$ GeV^2,

$\langle x^{-1}\rangle_\pi^{\rm SR} = 3.3 \pm 0.3,$

$\frac{1}{3}\langle x^{-1}\rangle = 1 + a_2 + a_4 + \ldots$

The moment $\langle x^{-1}\rangle_\pi^{\rm SR}$ could be determined only in NLC SRs because end-point singularities absent

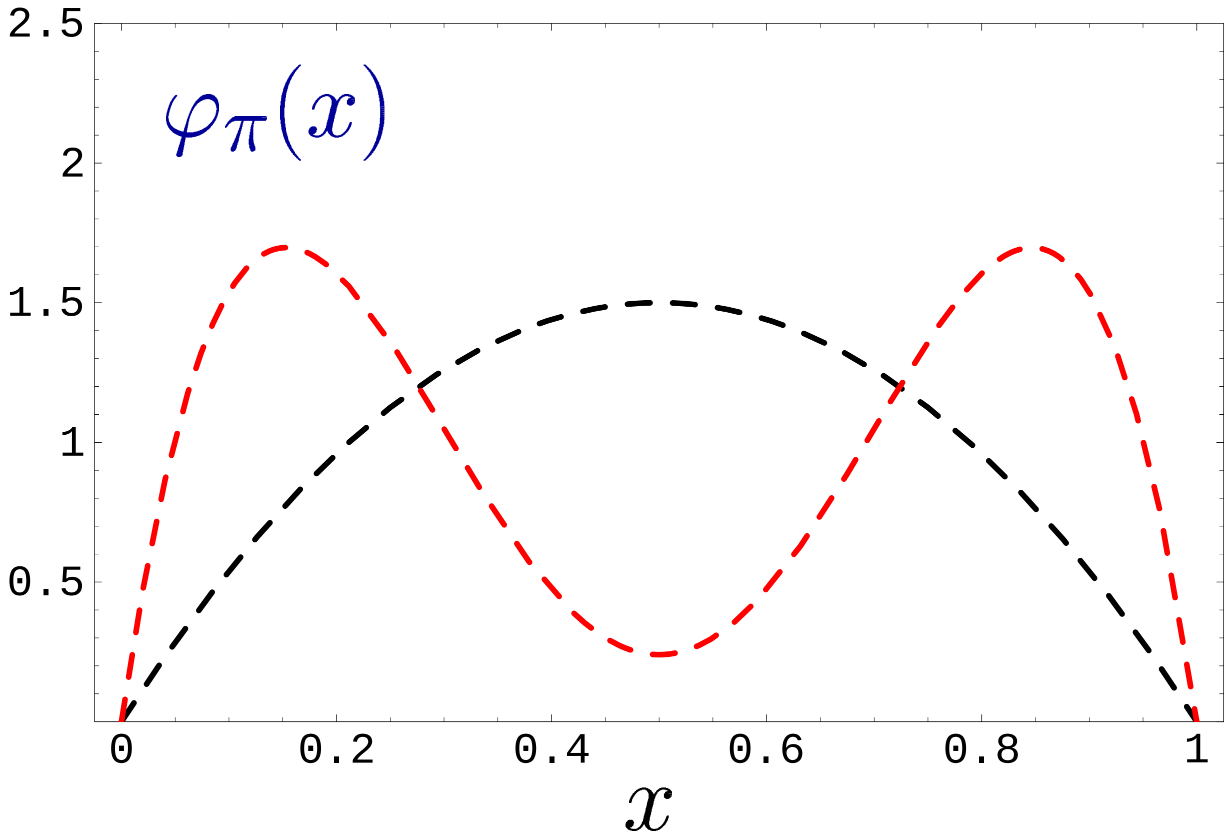
BMS vs CZ distribution amplitude



Curves	DAs
—	**BMS**

BMS DA is end-point suppressed!

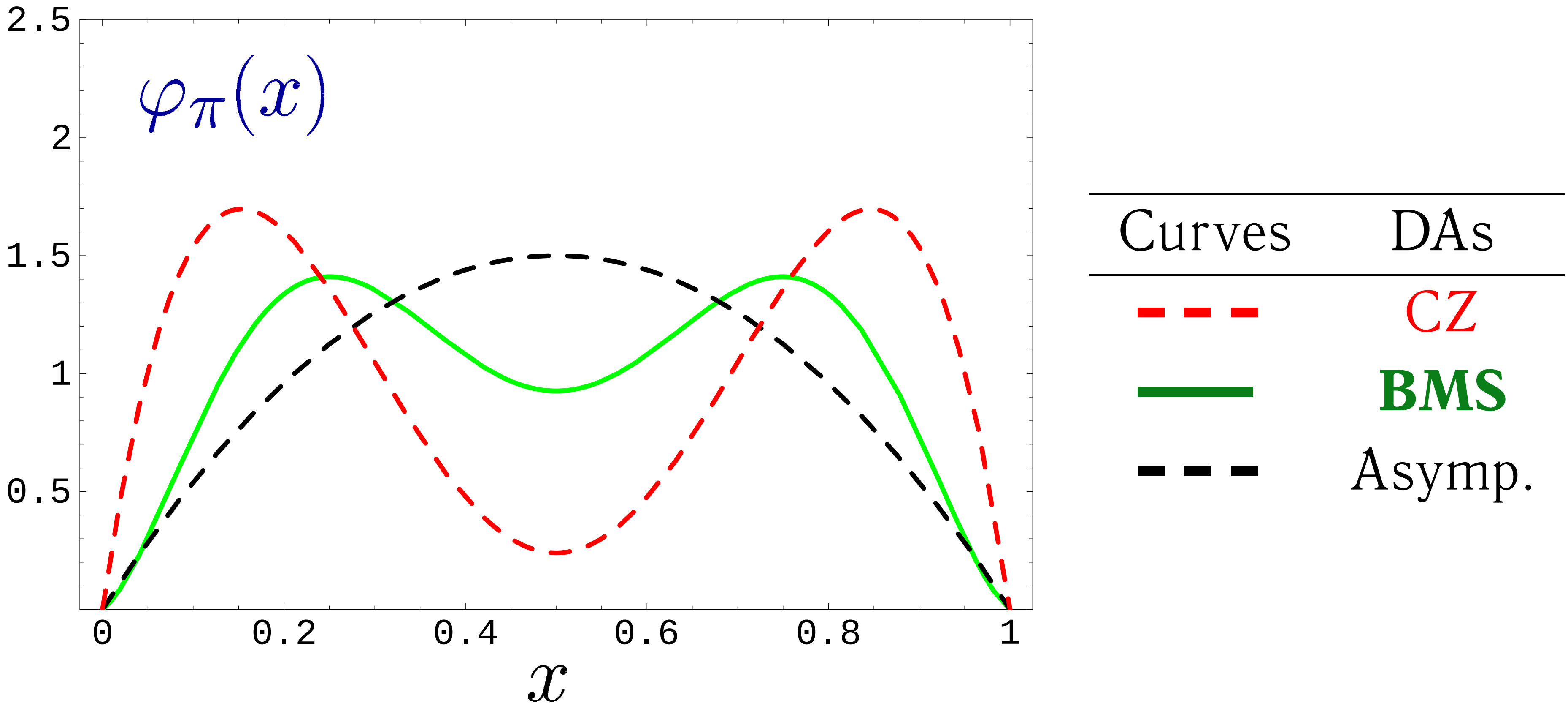
BMS vs CZ distribution amplitude



Curves	DAs
red dashed line	CZ
black dashed line	Asymp.

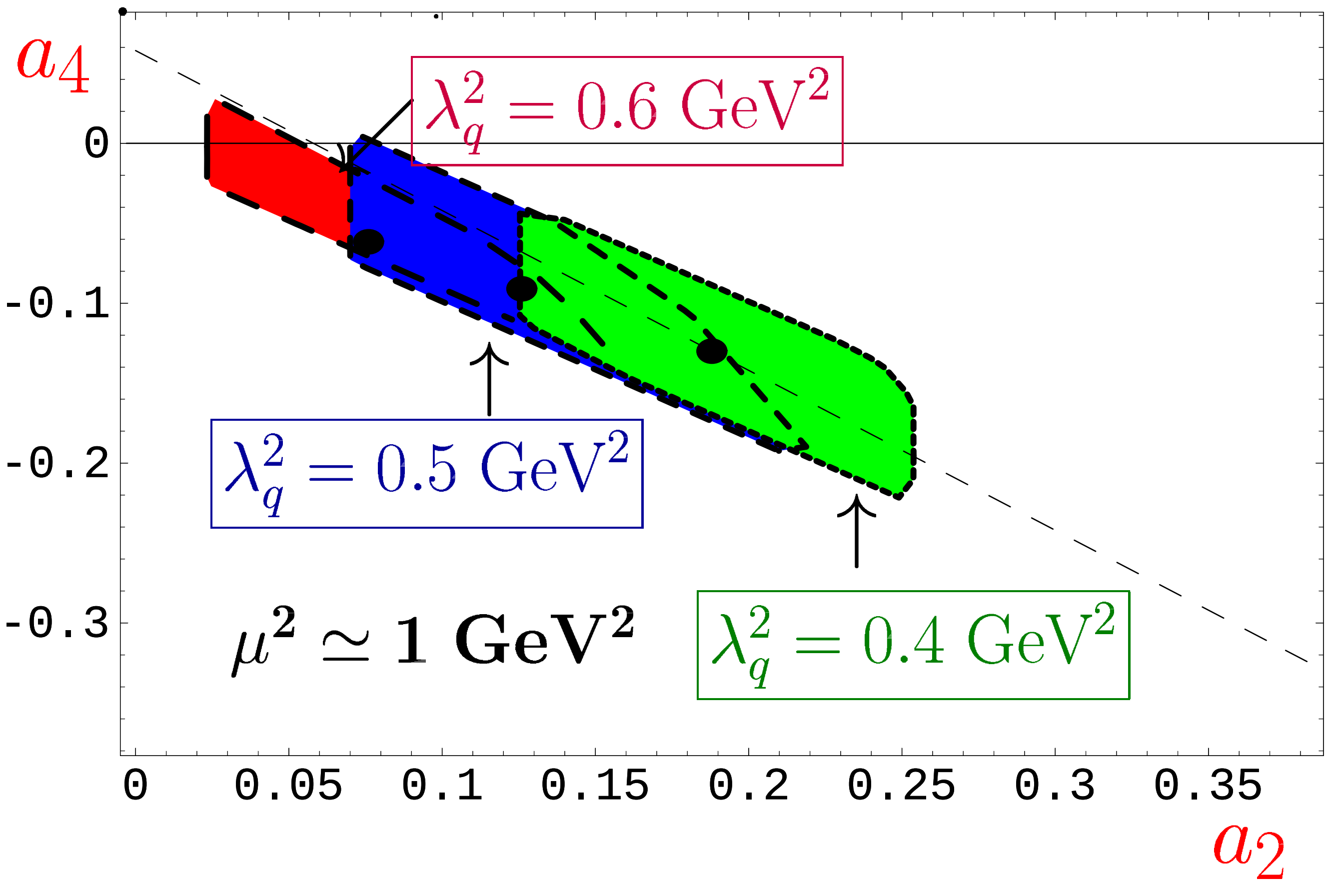
CZ DA: end-point enhancement

BMS vs CZ distribution amplitude



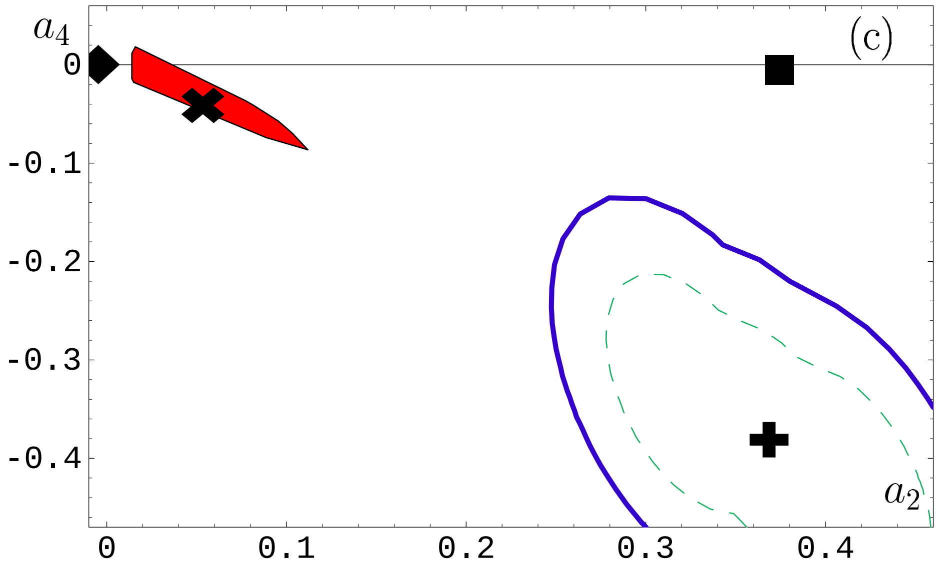
BMS bunch is 2-humped but end-point suppressed!

NLC SR Constraints on a_2, a_4 of Pion DA



NLC SR Results vs NLO CLEO Constraints

[BMS, PRD 67 (2003) 074012]



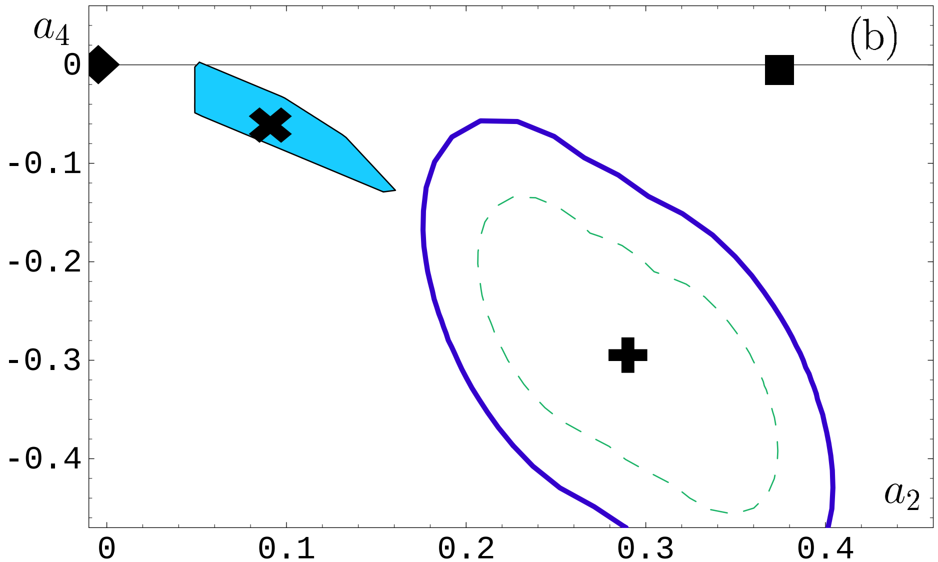
$\Leftrightarrow \lambda_q^2 = 0.6\ \text{GeV}^2,$

$\delta^2_{\text{Tw-4}} = 0.28(3)\ \text{GeV}^2$

No agreement with CLEO data for $\lambda_q^2 = 0.6$ GeV^2

NLC SR Results vs NLO CLEO Constraints

[BMS, PRD 67 (2003) 074012]

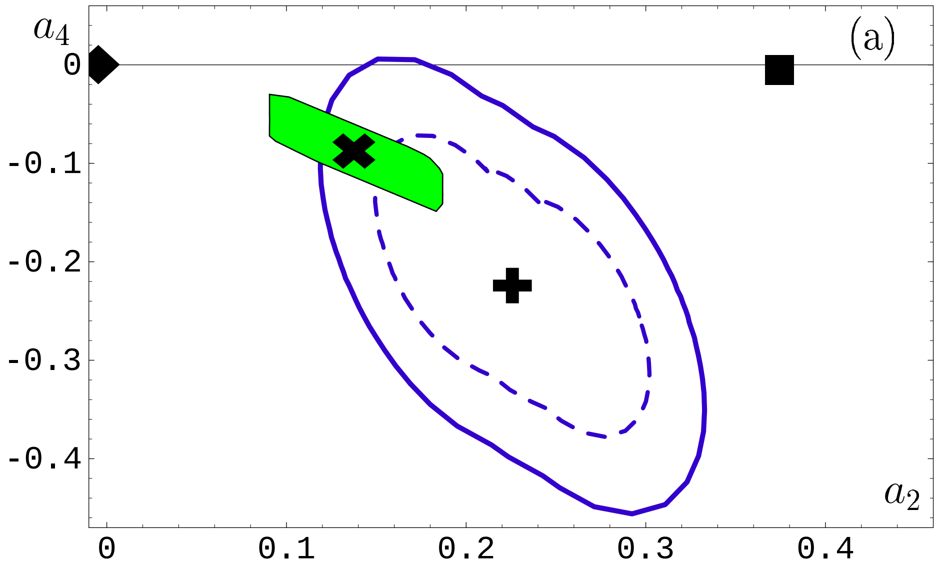


 $\Leftrightarrow \lambda_q^2 = 0.5\ \mathrm{GeV}^2$,
$\delta^2_{\text{Tw-4}} = 0.23(2)\ \mathrm{GeV}^2$

Bad agreement with CLEO data for $\lambda_q^2 = 0.5\ \mathrm{GeV}^2$

NLC SR Results vs NLO CLEO Constraints

[BMS, PRD 67 (2003) 074012]



$\Leftrightarrow \lambda_q^2 = 0.4$ GeV^2,
$\delta^2_{\text{Tw-4}} = 0.19(2)$ GeV^2

Reasonable agreement with CLEO data for $\boldsymbol{\lambda_q^2 = 0.4}$ GeV^2

CONCLUSIONS

- **QCD SR** method with **NLC** for pion DA gives us admissible sets (**bunches**) of DAs for each λ_q value.

CONCLUSIONS

- **QCD SR** method with **NLC** for pion DA gives us admissible sets (**bunches**) of DAs for each λ_q value.
- NLO LCSR method produces **new constraints** on pion DA parameters $(\mathbf{a_2}, \mathbf{a_4})$ in conjunction with CLEO data.

CONCLUSIONS

- **QCD SR** method with **NLC** for pion DA gives us admissible sets (**bunches**) of DAs for each λ_q value.
- NLO LCSR method produces **new constraints** on pion DA parameters ($\mathbf{a_2, a_4}$) in conjunction with CLEO data.
- Comparing **NLC SRs** with new CLEO **constraints** allows to fix value of QCD vacuum nonlocality $\lambda_q^2 = 0.4\ \mathrm{GeV}^2$.